

УДК 539.3

Ю. И. Димитриенко, А. П. Соколов,
С. В. Сборщиков**МОДЕЛИРОВАНИЕ МИКРОРАЗРУШЕНИЯ
ТКАНЕВЫХ КОМПОЗИТОВ**

Предложена математическая модель процессов микроразрушения тканевых композиционных материалов, основанная на методе асимптотического усреднения и конечно-элементном решении локальных задач на ячейках периодичности. В качестве критерия прочности матрицы используется модифицированная модель Писаренко—Лебедева, а критерия прочности армирующих нитей — двухуровневая модель повреждаемости пучка моноволокон. Модель обеспечивает определение зоны распространения микроразрушения в композите при изменении действующей нагрузки. Приведены численные примеры, показывающие возможности разработанной модели для численного исследования процессов микроразрушения тканевых композитов.

E-mail: dimit.bmstu@gmail.com

Ключевые слова: композиты, микроразрушение, численное моделирование, метод конечных элементов, метод асимптотического усреднения, углепластики, критерий прочности, повреждаемость.

Тканевые композиты относятся к наиболее распространенным типам композиционных материалов. Их широко применяют в аэрокосмической технике, судостроении, электротехнической промышленности и других отраслях. Одной из проблем, с которой сталкиваются конструкторы — разработчики изделий из тканевых композитов, является сложность экспериментального определения полного комплекса необходимых характеристик этих материалов. Обычно из них изготавливают тонкостенные оболочечные или панельные конструкции. Чтобы определить упругие и прочностные характеристики этих материалов в поперечном направлении по отношению к укладке слоев ткани и при межслоевом сдвиге в плоскости в таких конструкциях, приходится применять только косвенные экспериментальные методы (методы изгиба коротких балок, растяжения надрезанных образцов и т. п.) ввиду отсутствия принципиальной технической возможности проведения прямых экспериментов. В результате полученные данные, как правило, не обеспечивают желаемой достоверности информации о свойствах тканевых композитов.

В инженерных методиках расчетов композитных конструкций обычно пренебрегают поперечными и межслойными эффектами (например, при расчете по оболочечным теориям типа Кирхгофа—Лява), и вопрос о достоверности указанных характеристик не является чересчур острым. Однако с переходом к методам детального компьютерного 3D-моделирования композитных конструкций необходимость в информации о полном комплексе упругопрочностных характеристик резко возрастает.

Существует довольно много приближенных методов расчета упругопрочностных характеристик тканевых композитов, однако в последнее время возник интерес к численным методам конечно-элементного моделирования микроразрушения композитов. Одним из наиболее перспективных является метод асимптотического усреднения (или метод гомогенизации) [1—3]. В работах [4—11] предложена технология расчета упругих, тепловых и электромагнитных характеристик композитов на основе информации о свойствах их структурных компонентов. Настоящая работа, которая служит продолжением исследований в этой области, посвящена разработке конечно-элементного метода моделирования микроразрушения тканевых композитов.

Математическая постановка локальных задач. Тканевый композит имеет достаточно четко выраженную периодическую структуру, его ячейка периодичности (ЯП) для одного из типов плетения ткани показана на рис. 1. Для периодической структуры, согласно методу асимптотического усреднения [4—11], формулируем серию так называемых локальных задач L_{pq} теории упругости в $1/8$ ЯП \tilde{V}_{ξ} :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{ij(pq)/j} = 0; \\ \sigma_{ij(pq)} = C_{ijkl}(\xi^l, z) \varepsilon_{kl(pq)}; \\ \varepsilon_{ij(pq)} = \frac{1}{2} (U_{i(pq)/j} + U_{j(pq)/i}); \\ \left[[U_{i(pq)}] \right] = 0, \left[[\sigma_{ij(pq)}] \right] = 0, \xi^l \in \tilde{\Sigma}_{\xi\alpha N}, \end{array} \right. \quad (1)$$

где $\sigma_{ij(pq)}$, $\varepsilon_{kl(pq)}$ — компоненты тензоров напряжений и деформаций в ЯП; $C_{ijkl}(\xi^l, z_1, z_2)$ — компоненты тензоров модулей упругости структурных компонентов композита (их различие для разных компонентов описывает зависимость от координат ξ^l); z_1, z_2 — параметры повреждаемости компонентов композита (выражения для них представлены далее); ξ^l — «локальные» координаты в ЯП;

$\bullet_{,l} = \partial \bullet / \partial \xi^l$ — производные по локальным координатам; $U_{i(pq)}(\xi_i)$ — компоненты вектора перемещений (искомые неизвестные функции задачи — псевдоперемещения); $[[U_{i(pq)}]] = 0$ — скачки функций на поверхностях раздела $\tilde{\Sigma}_{\xi^{\alpha N}}$ компонентов композита ($\alpha = 1, \dots, N-1$ — номер армирующего компонента (нити) композита; $\alpha = N$ — индекс, соответствующий матрице композита).

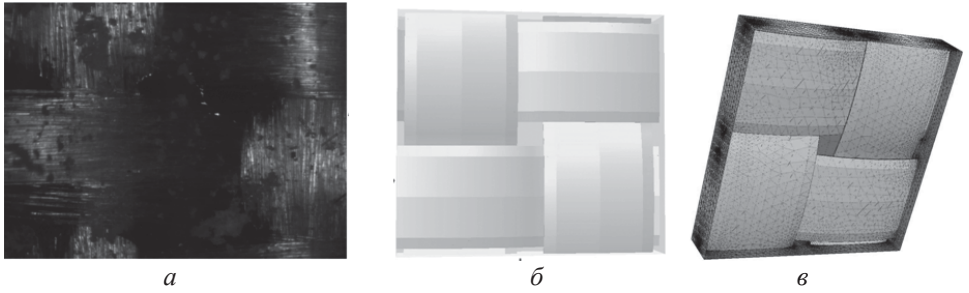


Рис. 1. Реальная микроструктура (а), геометрическая (б) и конечно-элементная (в) модели тканевого композита

Система (1) дополняется специальными граничными условиями на торцовых поверхностях $\Sigma'_s = \{\xi_s = 0, 5\}$ 1/8 ЯП:

$$\begin{aligned} \Sigma'_i : U_{i(pp)} &= (1/2)\bar{\varepsilon}_{pp}\delta_{ip}, U_{j(pp)/i} = 0, U_{k(pp)/i} = 0, i \neq j \neq k \neq i; \\ \Sigma'_j : U_{i(pq)} &= (1/4)\bar{\varepsilon}_{pq}\delta_{ip}, U_{j(pq)/j} = 0, U_{k(pq)} = 0, i, j = \{p, q\}; \\ \Sigma'_k : U_{i(pq)/k} &= 0, U_{j(pq)/k} = 0, U_{k(pq)} = 0, i \neq j \neq k \neq i, p \neq q. \end{aligned} \quad (2)$$

Граничные условия на плоскостях симметрии $\Sigma_s = \{\xi_s = 0\}$ имеют аналогичный вид, но на них $\bar{\varepsilon}_{pq} = 0$. Здесь $\bar{\varepsilon}_{pq}$ — усредненные деформации по ЯП, являющиеся входными данными задачи L_{pq} .

Расчет компонент тензоров модулей упругости матрицы и армирующих нитей с учетом повреждаемости. В ячейке периодичности тканевого композита имеется три структурных компонента: два типа армирующих нитей, ориентированных по двум взаимно ортогональным направлениям $O\xi_1$ и $O\xi_2$ и окружающей их матрицы, т. е. $N = 3$. Нити искривлены в плоскостях $O\xi_1\xi_3$ и $O\xi_2\xi_3$ соответственно, форма искривления близка к волне синусоиды (рис. 2). Для реальных композитов нити не являются монолитными материалами, а состоят из большого числа (обычно несколько тысяч) волокон (моноволокон), которые также соединены между собой матрицей. Ввиду такой специфической структуры, даже если моноволокна изотропны (например, стеклянные волокна), нить является уже криволинейно-

трансверсально-изотропным материалом, ее ось трансверсальной изотропии $O\xi_1'$ (или $O\xi_2'$ для 2-й системы нитей) является переменной: в каждой точке ξ_k она наклонена по касательной к средней линии нити (см. рис. 2).

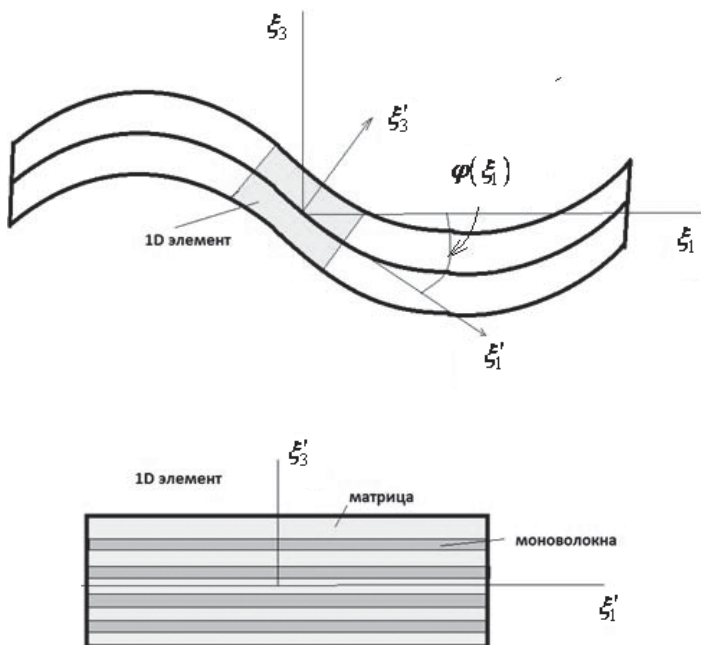


Рис. 2. Модель искривленной нити в ЯП и 1D-элемент с моноволокнами в составе нити

Для вычисления компонент тензора модулей упругости нити $C_{ijkl}^{(\alpha)}(\xi_k, z_1, z_2) = C_{ijkl}(\xi_k, z_1, z_2)$, $\xi_k \in \tilde{V}_{\xi\alpha}$ ($\tilde{V}_{\xi\alpha}$ — область в ЯП, занятая α -й нитью в системе координат $O\xi_i'$, связанной с ЯП) воспользуемся приближенной моделью смесового типа [12], в которой нить рассматривается как система последовательно расположенных однонаправленных (1D) элементов, повернутых на некоторый угол $\varphi_\alpha(\xi_k)$, соответствующий углу поворота средней линии α -й нити. В собственной системе координат $O\xi_i'$, связанной с нитью (ось $O\xi_\alpha'$ направлена по касательной к средней линии нити), технические упругие константы нити вычисляются по следующим формулам:

$$E_l = E_f \varphi_f + E_m (1 - \varphi_f), \quad E_t = \left(\frac{\varphi_f}{E_f} + \frac{1 - \varphi_f}{E_m} \right)^{-1}; \quad (3)$$

$$\nu_l = \nu_f \varphi_f + \nu_m (1 - \varphi_f), \quad \nu_t = \nu_m;$$

$$G_l = \left(\frac{2\varphi_f(1+\nu_f)}{E_f} + \frac{2(1-\varphi_f)(1+\nu_m)}{E_m} \right)^{-1}, \quad (3)$$

где E_l — продольный модуль упругости нити в направлении $O\xi'_\alpha$; E_t — поперечный модуль упругости нити в плоскости, ортогональной к $O\xi'_\alpha$; ν_l, ν_t — продольный и поперечный коэффициенты Пуассона нити; $G_l, G_t = \frac{E_t}{2(1+\nu_t)}$ — продольный и поперечный модули сдвига нити; E_f, E_m — модули упругости моноволокон и матрицы; ν_f, ν_m — коэффициенты Пуассона волокон и матрицы; φ_f — относительное объемное содержание волокон в нитях.

По полученным значениям упругих констант нити вычисляется тензор упругих податливостей $\Pi_{ijkl}^{(\alpha)'}$ 1D-элемента 1-й нити:

$$\Pi_{ijkl}^{(\alpha)'} = \begin{bmatrix} \Pi'_{1111} & \Pi'_{1122} & \Pi'_{1133} & \Pi'_{1123} & \Pi'_{1113} & \Pi'_{1112} \\ & \Pi'_{2222} & \Pi'_{2233} & \Pi'_{2223} & \Pi'_{2213} & \Pi'_{2212} \\ & & \Pi'_{3333} & \Pi'_{3323} & \Pi'_{3313} & \Pi'_{3312} \\ & & & \Pi'_{2323} & \Pi'_{2313} & \Pi'_{2312} \\ \text{сим.} & & & & \Pi'_{1313} & \Pi'_{1312} \\ & & & & & \Pi'_{1212} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_l} & -\frac{\nu_l}{E_l} & -\frac{\nu_l}{E_l} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_l}{E_l} & \frac{1}{E_t} & -\frac{\nu_t}{E_t} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_l}{E_l} & -\frac{\nu_t}{E_t} & \frac{1}{E_t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2G_t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2G_l} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2G_l} \end{bmatrix}. \quad (4)$$

Для 2-й системы нитей тензор $\Pi_{ijkl}^{(\alpha)'}$ вычисляется по формуле (4), в которой необходимо выполнить циклическую перестановку индексов: $1 \rightarrow 2, 2 \rightarrow 3, 3 \rightarrow 1$.

Тензор модулей упругости нитей в собственной системе координат $O\xi_i'$ является обратным для тензора упругих податливостей: $C_{ijkl}^{(\alpha)'} = (\Pi_{ijkl}^{(\alpha)'})^{-1}$. В развиваемой здесь модели предполагается, что нить может частично разрушиться, когда значения 1 достигнет параметр повреждаемости $z_1^{(\alpha)}$; при этом обнуляются все модули упругости, кроме $C_{\alpha\alpha\alpha\alpha}^{(\alpha)'}$. Такое частичное разрушение происходит из-за разрушения матрицы в составе нити, без разрыва моноволокон. Если значения 1 достигает параметр повреждаемости $z_2^{(\alpha)}$, то происходит полное разрушение нити (в данной точке) из-за разрушения моноволокон в ней, а следовательно, и матрицы, окружающей моноволокна. При полном разрушении нити обнуляются все модули упругости $C_{ijkl}^{(\alpha)'}$. С учетом изложенного выражение для компонент тензора модулей упругости нити в собственной системе координат можно записать так:

$$C_{ijkl}^{(\alpha)'} = [1 - h(z_1^{(\alpha)} - 1)] \left\{ [1 - h(z_2^{(\alpha)} - 1)] \times \right. \\ \left. \times (\Pi_{ijkl}^{(\alpha)'})^{-1} + h(z_2^{(\alpha)} - 1) C_{\alpha\alpha\alpha\alpha}^{(\alpha)'} \delta_{\alpha i} \delta_{\alpha j} \delta_{\alpha k} \delta_{\alpha l} \right\}, \quad (5)$$

где $h(z_2^{(\alpha)} - 1)$ — функция Хевисайда: $h(z_2^{(\alpha)} - 1) = 0$, если $z_2^{(\alpha)} < 1$, и $h(z_2^{(\alpha)} - 1) = 1$, если $z_2^{(\alpha)} \geq 1$.

Для нахождения компонент тензора модулей упругости нити в единой системе координат $O\xi_i$ используем формулы преобразования компонент тензора 4-го ранга при повороте системы координат на угол $\varphi_\alpha(\xi_k)$:

$$C_{ijkl}^{(\alpha)}(\xi^l, z_1^{(\alpha)}, z_2^{(\alpha)}) = C_{ijkl}^{(\alpha)'} Q_i^{(\alpha)m}(\xi_k) Q_j^{(\alpha)n}(\xi_k) Q_k^{(\alpha)s}(\xi_k) Q_l^{(\alpha)r}(\xi_k), \quad (6)$$

где $Q_i^{(\alpha)m}(\xi_k)$ — матрицы поворота:

$$Q_i^{(1)m}(\xi_k) = \begin{pmatrix} \cos \varphi_1(\xi_k) & 0 & \sin \varphi_1(\xi_k) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \varphi_1(\xi_k) & 0 & \cos \varphi_1(\xi_k) \end{pmatrix}; \quad (7)$$

$$Q_i^{(2)m}(\xi_k) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi_2(\xi_k) & \sin \varphi_2(\xi_k) \\ 0 & -\sin \varphi_2(\xi_k) & \cos \varphi_2(\xi_k) \end{pmatrix}. \quad (7)$$

Матрица предполагается изотропной, ее тензор упругих податливостей $\Pi_{ijkl}^{(3)}$ одинаков в собственной и единой системах координат и выражается через технические упругие константы стандартным образом [2]:

$$\Pi_{ijkl}^{(3)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_m} & -\frac{\nu_m}{E_m} & -\frac{\nu_m}{E_m} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_m}{E_m} & \frac{1}{E_m} & -\frac{\nu_m}{E_m} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_m}{E_m} & -\frac{\nu_m}{E_m} & \frac{1}{E_m} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2G_m} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2G_m} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2G_m} \end{bmatrix}, \quad (8)$$

где $G_m = \frac{E_m}{2(1+\nu_m)}$ — модуль сдвига матрицы.

При разрушении матрицы в некоторой точке ЯП все компоненты тензора модулей упругости $C_{ijkl}^{(3)} = (\Pi_{ijkl}^{(3)})^{-1}$ в этой точке обнуляются.

Эффективные упругие характеристики композита. Для определения компонент тензора эффективного модуля упругости композита \bar{C}_{ijpq} , связывающего усредненные напряжения и деформации композита $\bar{\sigma}_{ij} = \bar{C}_{ijkl} \bar{\varepsilon}_{kl}$, воспользуемся решением серии локальных задач L_{pq} (1), (2). Методика их численного решения описана в работах [4—8]. После численного решения задач L_{pq} находим поля псевдоперемещений $U_{i(pq)}^\alpha$ и псевдонапряжений $\sigma_{ij(pq)}(\xi_k)$ в ЯП при заданных средних деформациях $\bar{\varepsilon}_{kl}$. По этим полям определяем средние напряжения:

$$\langle \sigma_{ij} \rangle = \sum_{p,q}^3 \bar{\sigma}_{ij(pq)}, \quad \bar{\sigma}_{ij(pq)} = \left\langle \sigma_{ij(pq)} \right\rangle = \int_{\tilde{V}_{\xi}} \sigma_{ij(pq)}(\xi_k) dV_{\xi}. \quad (9)$$

Тогда компоненты тензора эффективных модулей упругости композита

$$\bar{C}_{ijpq} = \frac{\bar{\sigma}_{ij(pq)}}{\bar{\varepsilon}_{pq}}, \quad (10)$$

где по p и q суммирования нет. После расчета тензора модулей упругости \bar{C}_{ijpq} находили эффективный тензор упругих податливостей $\bar{\Pi}_{ijpq}$, являющийся обратным к \bar{C}_{ijpq} . Были получены девять техниче-

ских упругих констант композита: $E_{\alpha} = \frac{1}{\bar{\Pi}_{\alpha\alpha\alpha\alpha}}$ — эффективные мо-

дули упругости; $\nu_{\alpha\beta} = -\frac{\bar{\Pi}_{\alpha\alpha\beta\beta}}{E_{\alpha}}$ — эффективные коэффициенты Пуас-

сона; $G_{\alpha\beta} = \bar{C}_{\alpha\beta\alpha\beta}$ — эффективные модули сдвига.

Компоненты тензоров концентраций напряжений в матрице

и в нитях. Компоненты тензоров концентраций напряжений B_{ijkl}^{α} связывают микронапряжения в матрице и в нитях со средними напряжениями $\sigma_{ij}^{(\alpha)}(\xi_k) = \sum_{p,q}^3 \sigma_{ij(pq)}(\xi_k)$ в композите:

$$\sigma_{ij}^{(\alpha)}(\xi_k) = B_{ijkl}^{(\alpha)}(\xi_k) \bar{\sigma}_{kl}, \quad \xi_k \in \tilde{V}_{\xi\alpha}, \quad \alpha = 1, \dots, 3. \quad (11)$$

Компоненты B_{ijkl}^{α} в матрице и в нитях вычисляют по формулам [4—10]

$$B_{ijpq}^{(\alpha)}(\xi_k) = \sigma_{ij(kl)}(\xi_k) \bar{\Pi}_{klpq}, \quad \xi_k \in \tilde{V}_{\xi\alpha}, \quad \alpha = 1, \dots, 3. \quad (12)$$

Коэффициенты концентрации напряжений в той части матрицы, которая находится в составе нити, рассчитывают следующим образом [12]:

$$B_{m1} = \frac{E_m}{E_l}; \quad B_{m2} = \frac{E_m}{E_l}; \quad B_{m3} = \frac{G_m}{G_l}; \quad B_{m4} = \text{tg } \varphi_f. \quad (13)$$

Напряжения $\sigma_{ij}^{(\alpha)'}(\xi_k)$ в нитях в собственной системе координат вычисляются с помощью матриц поворота:

$$\sigma_{ij}^{(\alpha)'}(\xi_k) = \sigma_{ln}^{(\alpha)}(\xi_k)' Q_i^{(\alpha)l}(\xi_k) Q_j^{(\alpha)n}(\xi_k). \quad (14)$$

Критерии прочности матрицы и нити. Критерий прочности изотропной матрицы в составе ЯП (вне нитей) выберем в виде модифицированного критерия прочности типа Писаренко—Лебедева, который образован совокупностью трех отдельных критериев разрушения при растяжении, сжатии и совместном нагружении. При разрушении и сжатии прочность описывается критерием Мизеса, при совместном нагружении — критерием типа Ягна:

$$\begin{aligned}\sigma_{\text{и}}^{(3)} &= \sigma_{\text{тм}}, & \text{если } \sigma^{(3)} > \sigma_{\text{тм}}; \\ \sigma_{\text{и}}^{(3)} &= \sigma_{\text{см}}, & \text{если } \sigma^{(3)} < -\sigma_{\text{см}},\end{aligned}$$

$$B_1\sigma^{(3)} + B_0\sigma^{(3)2} + B_2\sigma_{\text{и}}^{(3)2} = 1, \quad \text{если } -\sigma_{\text{см}} < \sigma^{(3)} < \sigma_{\text{тм}}, \quad (15)$$

где $\sigma^{(3)}$, $\sigma_{\text{и}}^{(3)}$ — 1-й и 2-й инварианты тензора напряжений:

$$\begin{aligned}\sigma^{(3)} &= \sigma_{\text{и}}^{(3)}; & \sigma_{\text{и}}^{(3)} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\sigma_{11}^{(3)} - \sigma_{22}^{(3)})^2 + (\sigma_{11}^{(3)} - \sigma_{33}^{(3)})^2 + \\ & & & + (\sigma_{22}^{(3)} - \sigma_{33}^{(3)})^2 + 6(\sigma_{12}^{(3)2} + \sigma_{23}^{(3)2} + \sigma_{13}^{(3)2});\end{aligned} \quad (16)$$

$\sigma_{\text{тм}}$, $\sigma_{\text{см}}$, $\sigma_{\text{см}}$ — пределы прочности матрицы на растяжение, сжатие и сдвиг; B_1 , B_0 , B_2 — коэффициенты:

$$B_1 = \frac{\sigma_{\text{см}} - \sigma_{\text{тм}}}{\sigma_{\text{см}}\sigma_{\text{тм}}}; \quad B_0 = \frac{1}{\sigma_{\text{см}}\sigma_{\text{тм}}} - \frac{1}{3\sigma_{\text{см}}^2}; \quad B_2 = \frac{1}{3\sigma_{\text{см}}^2}. \quad (17)$$

Критерий прочности (15) можно записать в единой форме с помощью функции Хевисайда $h(X)$:

$$z^{(3)}(\sigma_{ij}^{(3)}) = 1, \quad (18)$$

где $z^{(3)}(\sigma_{ij}^{(3)})$ — параметр повреждаемости матрицы:

$$\begin{aligned}z^{(3)}(\sigma_{ij}^{(3)}) &= \frac{\sigma_{\text{и}}^{(3)}}{\sigma_{\text{тм}}} h\left(\frac{\sigma^{(3)}}{\sigma_{\text{тм}}}\right) + \frac{\sigma_{\text{и}}^{(3)}}{\sigma_{\text{см}}} h\left(-\frac{\sigma^{(3)}}{\sigma_{\text{см}}}\right) + \\ & + (B_1\sigma^{(3)} + B_0\sigma^{(3)2} + B_2\sigma_{\text{и}}^{(3)2}) \left(1 - h\left(\frac{\sigma^{(3)}}{\sigma_{\text{тм}}}\right) - h\left(-\frac{\sigma^{(3)}}{\sigma_{\text{см}}}\right)\right).\end{aligned} \quad (19)$$

Критерий прочности α -й нити формулируется для каждого ее отдельного 1D-элемента в собственной системе координат. Этот критерий имеет следующий вид [12]:

$$z_1^{(\alpha)}(\sigma_{ij}^{(\alpha)}) = 1 \quad \text{или} \quad z_2^{(\alpha)}(\sigma_{ij}^{(\alpha)}) = 1, \quad (20),$$

где $z_1^{(\alpha)}$ и $z_2^{(\alpha)}$ — параметры повреждаемости 1D-элемента. Параметр $z_1^{(\alpha)}$ описывает накопление повреждений вследствие разрыва отдельных моноволокон, а параметр $z_2^{(\alpha)}$ — накопление повреждений из-за растрескивания матрицы в 1D-элементе без разрушения моноволокон; при этом

$$z_1^{(\alpha)} = \frac{|\sigma_{\alpha\alpha}^{(\alpha)'}| + \sigma_{\alpha\alpha}^{(\alpha)'}}{2\sigma_{tl}} + \frac{|\sigma_{\alpha\alpha}^{(\alpha)'}| - \sigma_{\alpha\alpha}^{(\alpha)'}}{2\sigma_{cl}}, \quad \alpha = 1, 2; \quad (21)$$

$$z_2^{(\alpha)} = \frac{1}{12\sigma_s^2} (Y_2^2 + 12k_Y Y_4^2 + 3Y_3^2) + \left(\frac{1}{\sigma_c^2} - \frac{1}{3\sigma_s^2} \right) Y_-^2 + \left(\frac{1}{\sigma_T^2} - \frac{1}{3\sigma_s^2} \right) Y_+^2.$$

Инварианты тензора напряжений $\sigma_{ij}^{(\alpha)}$ относительно группы трансверсальной изотропии [12]:

$$Y_2 = \sigma_{33}^{(\alpha)'} + \sigma_{\beta\beta}^{(\alpha)'}; \quad Y_3^2 = \left(\sigma_{33}^{(\alpha)'} - \sigma_{\beta\beta}^{(\alpha)'} \right)^2 + 4\sigma_{3\beta}^{(\alpha)2'}; \quad Y_4^2 = \sigma_{3\alpha}^{(\alpha)2'} + \sigma_{12}^{(\alpha)2'};$$

$$Y_{\pm} = \frac{|Y_2| \pm Y_2}{2}; \quad k_Y = \left(\frac{B_{m3}}{B_{m1}} \right)^2. \quad (22)$$

В формулах (21) использованы также обозначения: $\sigma_T = \frac{\sigma_{tm}}{B_{m1}}$,

$\sigma_c = \frac{\sigma_{cm}}{B_{m1}}$ — прочность 1D-элемента при поперечном растяже-

нии и поперечном сжатии; $\sigma_s = \frac{\sigma_{sm}}{B_{m1}}$, $\sigma_{sl} = \frac{\sigma_{sm}}{B_{m3}}$ — прочность

1D-элемента при поперечном и продольном сдвиге; $\sigma_{cl} =$

$$= \frac{\sigma_{sm}}{\sqrt{(B_{m2} - B_{m4})^2 y_{ст}^2 + B_{m2} B_{m4}}}, \quad \sigma_{tl} = \bar{\sigma}_f H_0 \frac{\varphi_f^{r_f}}{(1 - \varphi_f)^{s_f}} \left(\frac{E_f}{2G_m} \right)^{s_f} \left(\frac{\sigma_{sm}}{\sigma_f} \right)^{\omega_f} —$$

прочность при продольном сжатии и растяжении $y_{ст} = \frac{\sigma_{sm}}{\sigma_{tm}}$, если

$B_{m2} > B_{m4}$; $y_{ст} = \frac{\sigma_{sm}}{\sigma_{cm}}$, если $B_{m2} < B_{m4}$; $\bar{\sigma}_f$ — средняя прочность мо-

новолокна; H_0 , r_f , s_f , ω_f — статистические характеристики моноволокон в нити, характеризующие вероятностные свойства: масштабный эффект прочности, разброс прочностных характеристик моноволокон в нити [12].

Критерий прочности композита. Для расчета прочности композита в целом необходимо вычислить предельные значения средних напряжений $\bar{\sigma}_{kl}$, при которых происходит первичное микроразрушение в одном из компонентов (в матрице или в нитях) в какой-либо одной точке $\xi_k^* \in \tilde{V}_{\xi\alpha}$ в момент времени t^* , а затем полное разрушение, при котором произойдет нарушение целостности всей ЯП. Для вычисления предельных значений напряжений, как правило, реализуют процесс линейного нагружения (это соответствует условиям проведения экспериментов по определению прочности материалов), при котором средние напряжения изменяются во времени пропорционально: $\bar{\sigma}_{kl}(t) = \tilde{\sigma}_{kl}t$, где $\tilde{\sigma}_{kl}$ — компоненты тензора скоростей изменения напряжений. Подставляя соотношения (11) в (14), а затем получившиеся выражения — в критерии прочности матрицы (19) или нитей (22), получаем условие первичного разрушения композита:

$$\max \left\{ z_1^{(\alpha)} (Q_i^{(\alpha)l}(\xi_r^*) Q_j^{(\alpha)n}(\xi_r^*) B_{lnkm}^{(\alpha)}(\xi_r^*) \bar{\sigma}_{km}(t^*)) \right\}; \quad (23)$$

$$z_2^{(\alpha)} (Q_i^{(\alpha)l}(\xi_r^*) Q_j^{(\alpha)n}(\xi_r^*) B_{lnkm}^{(\alpha)}(\xi_r^*) \bar{\sigma}_{km}(t^*)); z^{(3)} (B_{lnkm}^{(3)}(\xi_r^*) \bar{\sigma}_{km}(t^*)) \} = 1,$$

где ξ_r^* — координаты точки в ЯП, в которой выполняются условия (23); t^* — момент времени, при котором впервые выполняется условие (23); $\bar{\sigma}_{km}(t^*)$ — предельные напряжения, при которых происходит первичное разрушение композита.

Первичное разрушение может происходить в матрице или в нитях (в нитях сначала наблюдается частичное разрушение вследствие разрушения матрицы, окружающей моноволокна). После первичного разрушения отмечается изменение модулей упругости в разрушенных областях матрицы или (и) нитей в соответствии с описанной выше моделью. По мере дальнейшего увеличения средних напряжений $\bar{\sigma}_{km}(t)$ условие разрушения (23) выполняется в большем числе точек ξ_r^* ЯП, т. е. происходит процесс распространения микроразрушения. При тех значениях $\bar{\sigma}_{km}(t^{**})$, при которых выполняется условие

$$\max \{ z_2^{(\alpha)} (Q_i^{(\alpha)l}(\xi_r^{**}) Q_j^{(\alpha)n}(\xi_r^{**}) B_{lnkm}^{(\alpha)}(\xi_r^{**}) \bar{\sigma}_{km}(t^{**})) \} = 1, \quad (24)$$

происходит частичное разрушение нитей в результате разрушения находящейся в них части матрицы. При значениях $\bar{\sigma}_{km}(t^{***})$, при которых выполняется условие

$$\max \{ z_1^{(\alpha)} (Q_i^{(\alpha)l}(\xi_r^{***}) Q_j^{(\alpha)n}(\xi_r^{***}) B_{lnkm}^{(\alpha)}(\xi_r^{***}) \bar{\sigma}_{km}(t^{***})) \} = 1, \quad (25)$$

наблюдается полное разрушение композита вследствие разрыва моноволокон в нитях. Дальнейшее увеличение напряжений

$|\bar{\sigma}_{km}(t)| > |\bar{\sigma}_{km}(t^{***})|$ невозможно, так как при этом происходит микро-разрушение всей ЯП.

Результаты численного моделирования микроуражения тканевых композитов. Численный метод решения локальных задач (1), (2) описан в работах [4—11]. Расчеты проводили для тканевого углепластика с полотняным и простейшим сатиновым типом переплетения. Использовали эпоксидную матрицу композита с характеристиками [12]: $\sigma_{tm} = 0,016$ ГПа; $\sigma_{cm} = 0,025$ ГПа; $\sigma_{sm} = 0,015$ ГПа; $E_m = 3,3$ ГПа; $\nu_m = 0,35$.

Углеродные моноволокна имели следующие характеристики [12]: $\bar{\sigma}_f = 2,2$ ГПа; $\gamma = 1$; $\beta = 3,7$; $H_0 = 3,0$; $\omega_f = 0,33$; $s_f = 0,07$; $r_f = 0,25$; $E_f = 250$ ГПа; $\nu_f = 0,25$.

Некоторые результаты расчета представлены на рис. 3—5. На рис. 3 показаны зоны появления микроуражения в тканевом композите при растяжении в направлении укладки нитей. Эти зоны располагаются в матрице в местах наибольшего искривления нитей — вблизи линий их контакта; они ориентированы ортогонально к направлению растяжения ЯП композита. На рис. 4 дано распределение нормальной компоненты напряжений $\sigma_{11}^{(a)}(\xi_k)$ в ЯП при растяжении композита в направлении $O\xi_1$. Напряжения имеют локальные максимумы в окрестности краев нитей в области матрицы.

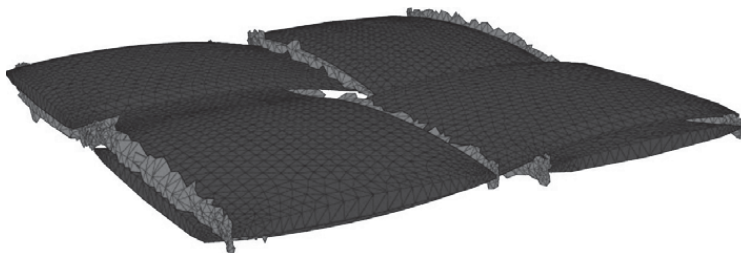


Рис. 3. Первичное микроуражение тканевого композита при растяжении ЯП вдоль нитей основного направления

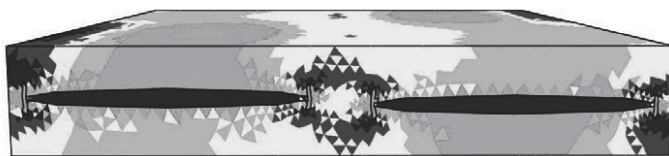


Рис. 4. Поле распределения компоненты тензора напряжений $\sigma_{11}^{(a)}$ в ЯП тканевого композита при одноосном растяжении вдоль нитей основного направления

На рис. 5 показаны стадии распространения микроразрушения в тканевом композите при растяжении. Разными оттенками выделены области разрушения на разных этапах нагружения. Сначала разрушение возникало в нитях из-за их частичного разрушения (растрескивание матрицы без разрушения моноволокон). Затем появлялось разрушение в матрице в месте наибольшего искривления нитей, эта зона была ориентирована перпендикулярно к направлению растяжения. Далее от этой зоны распространялось разрушение матрицы по краям двух нитей, ориентированных по направлению нагрузки. После этого возникало частичное разрушение этих двух нитей, а также распространялось поперечное разрушение матрицы. В результате происходило полное разрушение композита. Следует отметить, что картина микроразрушения тканевого композита существенно зависит от сочетания упругопрочностных характеристик матрицы и моноволокон, а также от геометрии расположения нитей в композите.

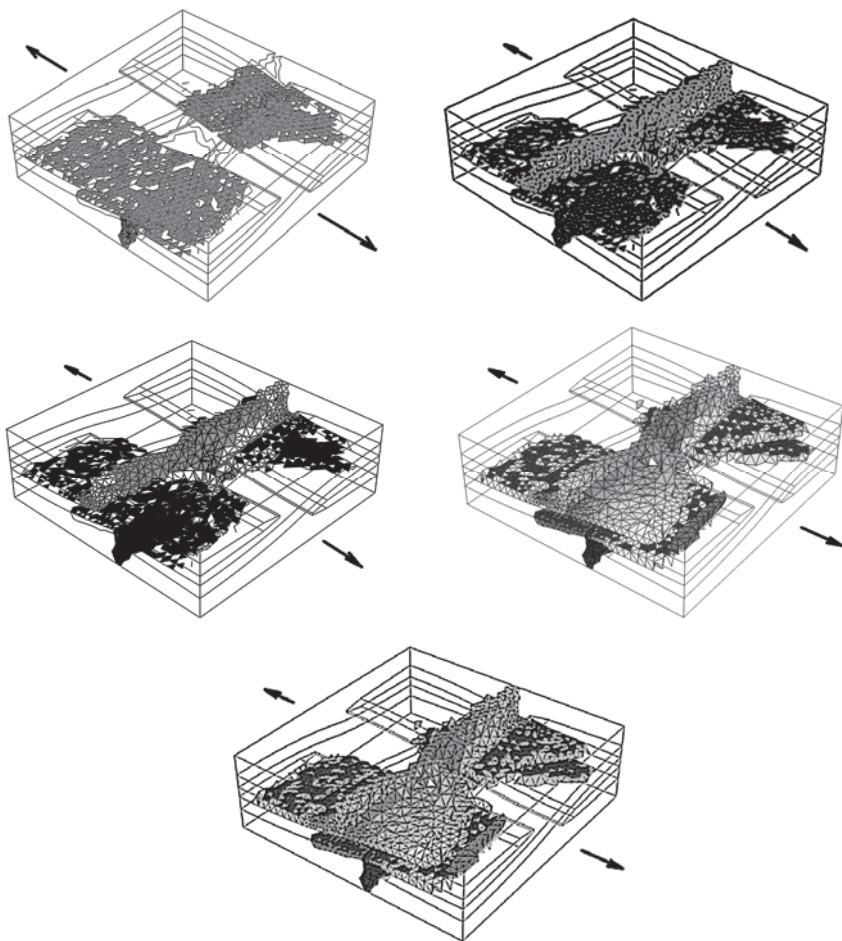


Рис. 5. Стадии распространения микроразрушения в тканевом композите при растяжении

Ввиду того что непосредственное экспериментальное исследование картины процесса микроразрушения тканевых композитов затруднено (происходит в объеме материала и недоступно для обнаружения), численное моделирование микроразрушения является практически единственным инструментарием для изучения особенностей геометрии микроразрушения композитов. В этом смысле разработанный метод компьютерного моделирования процессов микроразрушения композитов со сложными структурами может быть полезным при разработке и внедрении новых композиционных материалов в технике.

Выводы. Разработана математическая модель микроразрушения тканевых композиционных материалов, основанная на методе асимптотического усреднения и конечно-элементном решении локальных задач на ячейке периодичности. Показано, что модель позволяет проводить численные исследования процессов микроразрушения композиционных материалов и может служить в качестве инструментария при проектировании новых материалов с заранее заданными свойствами.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бахвалов Н. С., Панасенко Г. П. Осреднение процессов в периодических средах. – М.: Наука, 1984. – 352 с.
2. Победря Б. Е. Механика композиционных материалов. – М.: Изд-во МГУ, 1984. – 336 с.
3. Санчес–Паленсия Э. Неоднородные среды и теория колебаний. – М.: Мир, 1984. – 471 с.
4. Dimitrienko Y. I., Sokolov A. P. Elastic properties of composite materials // *Mathematical Models and Computer Simulations*. – 2010. – Vol. 2, N 1. – P. 116–130.
5. Димитриенко Ю. И., Соколов А. П. Разработка численного метода расчета эффективных упругих характеристик композиционных материалов // *Вестн. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естеств. науки*. – 2008. – № 2. – С. 56–67.
6. Димитриенко Ю. И., Соколов А. П. Система автоматизированного прогнозирования свойств композиционных материалов // *Информационные технологии*. – 2008. – № 8. – С. 31–38.
7. Димитриенко Ю. И., Соколов А. П. Многомасштабное моделирование упругих композиционных материалов // *Мат. моделирование*. – 2012. – Т. 24, № 5. – С. 3–20.
8. Димитриенко Ю. И., Дубровина А. Ю., Соколов А. П. Конечно-элементное моделирование усталостных характеристик композиционных материалов // *Вестн. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естеств. науки. Спец. вып. Мат. моделирование*. – 2011. – С. 34–50.
9. Димитриенко Ю. И., Соколов А. П. Современный численный анализ механических свойств композиционных материалов // *Изв. РАН. Физическая сер.* – 2011. – Т. 75, № 11. – С. 1551–1556.
10. Димитриенко Ю. И., Морозов А. Н., Соколов А. П., Ничеговский Е. С. Моделирование эффективных пьезоэластроупругих свойств ком-

позиционных материалов // Вестн. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естеств. науки. – 2010. – № 3.– С. 86–97.

11. Димитриенко Ю. И., Ничеговский Е. С. Численное моделирование магнитных свойств композиционных материалов // Вестн. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естеств. науки. – 2010. – № 1.– С. 3–12.
12. Димитриенко Ю. И. Механика композиционных материалов при высоких температурах. – М.: Машиностроение, 1997. – 364 с.

Статья поступила в редакцию 03.07.2012.