УДК 519.234.3

В.Б. Горяинов

НЕПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ ОЦЕНИВАНИЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ АВТОРЕГРЕССИИ

Рассмотрен процесс пространственной авторегрессии — стационарного случайного поля на двумерной декартовой целочисленной решетке, заданного рекуррентным двумерным авторегрессионным уравнением. Предложены знаковые оценки коэффициентов авторегрессионного уравнения. Доказана состоятельность этих оценок.

E-mail: vb-goryainov@mail.ru

Ключевые слова: *авторегрессионное поле, знаковые оценки, состоятельность.*

Во многих областях науки и техники, например геологии, географии, сельском хозяйстве, при анализе и обработке изображений, наблюдения представляют собой случайное поле, заданное на прямоугольной целочисленной решетке. Как показано в ряде работ [1–3], подходящей моделью описания пространственной зависимости таких наблюдений является модель двумерного авторегрессионного поля X_{ij}, заданного уравнением

$$X_{ij} = a_{10}X_{i-1,j} + a_{01}X_{i,j-1} + a_{11}X_{i-1,j-1} + \varepsilon_{ij}, \qquad i,j = 0, \pm1, \pm2, \ldots, \quad (1)$$

где $a = (a_{10}, a_{01}, a_{11})$ — вектор авторегрессионных коэффициентов; ε_{ij} — независимые одинаково распределенные случайные величины с нулевым математическим ожиданием $\mathsf{E}\varepsilon_{ij} = 0$ и конечной дисперсией $\sigma^2 = \mathsf{D}\varepsilon_{ij}$.

Эта модель является естественным обобщением процесса авторегрессии, используемого при описании временных рядов.

Основной задачей изучения уравнения (1) является оценивание его коэффициентов по наблюдениям X_{ij} на некотором подмножестве целочисленной решетки. В большинстве работ по оцениванию вектора a используют различные модификации метода максимального правдоподобия и наименьших квадратов [2, 4], которые, к сожалению, теряют эффективность при негауссовском характере поля ε_{ij}, например, при реставрации архивных кинофотопленок, покрытых царапинами и пятнами. Между тем оценки наименьших квадратов чувствительны к нарушению предположения нормальности ε_{ij} [5]. В линейных регрессионных моделях и авторегрессионных процессах в этом случае обычно применяют оценки, более устойчивые к загрязнению выборки резко выделяющимися наблюдениями, например знаковые оценки [6]. Знаковый метод использует не сами наблюдения X_{ij}, а только их знаки и основан на предположении, что функция распределения $F(x)$ ошибок ε_{ij} должна удовлетворять условию $F(0) = 1/2$. В данной работе строят знаковые оценки для параметра a поля (1) и устанавливают их состоятельность.

Постановка задачи и формулировка основных результатов. Рассмотрим процесс (1), где ε_{ij} — независимые одинаково распределенные случайные величины с неизвестной функцией распределения $F(x)$; $a = (a_{10}, a_{01}, a_{11})$ — неизвестный вектор параметров. Достаточные условия стационарности поля (1) приведены в [1, 2].

Пусть $a^0 = (a^0_{10}, a^0_{01}, a^0_{11})$ — некоторый известный вектор. Рассмотрим задачу проверки гипотезы

$$H^0\colon a = a^0 \tag{2}$$

против односторонних альтернатив

$$H^+_{pq} \text{ и } H^-_{pq}, \quad (p, q) \in \mathcal{I} = \{(1,0), (0,1), (1,1)\},$$

вида

$$H^+_{pq}\colon a_{pq} > a^0_{pq},\ a_{kl} = a^0_{kl} \text{ для любых } (k,l) \neq (p,q), \tag{3}$$

$$H^-_{pq}\colon a_{pq} < a^0_{pq},\ a_{kl} = a^0_{kl} \text{ для любых } (k,l) \neq (p,q), \tag{4}$$

и двусторонних альтернатив

$$H_{pq}\colon a_{pq} \neq a^0_{pq},\ a_{kl} = a^0_{kl} \text{ для любых } (k,l) \neq (p,q). \tag{5}$$

Пусть $X_{ij}, i = 0, \ldots, m, j = 0, \ldots, n$ — наблюдаемая реализация поля (1).

Обозначим

$$\operatorname{sign}(x) = \begin{cases} -1, & \text{если } x < 0; \\ \ \ 1, & \text{если } x \geq 0. \end{cases}$$

Перейдем от наблюдений X_{ij} к их знакам или точнее к величинам

$$S_{ij}(a) = \operatorname{sign}(X_{ij} - a_{10}X_{i-1,j} - a_{01}X_{i,j-1} - a_{11}X_{i-1,j-1}),$$
$$i = 1, \ldots, m; \quad j = 1, \ldots, n.$$

На основе информации только об $S_{ij}(a)$ в работе [5] построены оптимальные критерии проверки гипотез о параметре a. Оптимальность критериев понимается в следующем смысле.

Обозначим через Q критическую область знакового критерия, т. е. такое подмножество матриц s размера $m \times n$ с элементами из -1 и 1, что если матрица $S(a^0)$ принадлежит Q, то гипотеза H^0 отклоняется. Через $P_{mn}(Q, a)$ обозначим функцию мощности знакового критерия, определяемую как вероятность отклонения гипотезы H^0, когда H^0 не верна:

$$P_{mn}(Q, a) = \mathsf{P}\{S(a^0) \in Q \mid \text{ верна альтернатива } a\}.$$

Пусть $P_{mn}(Q, a)$ дифференцируема в точке a^0. Определим локально наиболее мощный (ЛНМ) знаковый критерий для проверки гипотезы H^0 против односторонней альтернативы H^+_{pq}, $(p, q) \in \mathcal{I}$, как критерий, имеющий функцию мощности $P_{mn}(Q, a)$, наиболее круто возрастающую по переменной a_{pq} в правосторонней окрестности точки a^0_{pq}. Это означает, что критическая область Q ЛНМ знакового критерия должна быть выбрана так, чтобы величина $\dfrac{\partial P_{mn}(Q, a)}{\partial a_{pq}}$ при $a = a^0$ была максимальна. Аналогично определим ЛНМ знаковый критерий для проверки гипотезы H^0 против односторонней альтернативы H^-_{pq}, $(p, q) \in \mathcal{I}$, как критерий, имеющий минимальное значение $\dfrac{\partial P_{mn}(Q, a)}{\partial a_{pq}}$ при $a = a^0$.

Зададим множество $\{\delta_{ij}(a)\}$ рекуррентным соотношением

$$\delta_{ij}(a) = a_{10}\delta_{(i-1),j}(a) + a_{01}\delta_{i,(j-1)}(a) + a_{11}\delta_{(i-1),(j-1)}(a), \quad i, j = 1, 2, \ldots, \tag{6}$$

с граничными условиями

$$\delta_{00}(a) = 1, \quad \delta_{k0}(a) = (a_{10})^k, \quad k > 0, \quad \delta_{0l}(a) = (a_{01})^l, \quad l > 0,$$
$$\delta_{ij}(a) = 0, \quad i < 0 \text{ или } j < 0. \tag{7}$$

В работе [5] доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть*

$$1 - a^0_{10}z_1 - a^0_{01}z_2 - a^0_{11}z_1z_2 \neq 0, \quad |z_1| \leq 1, |z_2| \leq 1, \tag{8}$$

а функция распределения $F(x)$ и плотность $f(x)$ случайных величин ε_{ij} удовлетворяют условиям

$$F(0) = 1/2; \tag{9}$$

$$f(0) > 0; \tag{10}$$

$$\mathsf{E}(\varepsilon_{11}) = 0; \tag{11}$$

$$\mathsf{E}[|f(\theta u X_{11}) - f(0)||X_{11}|] \to 0 \textit{ при } u \to 0 \textit{ для любого } \theta \in (0, 1). \tag{12}$$

Тогда для любых $(p, q) \in \mathcal{I}$ при альтернативах H^+_{pq}, H^-_{pq}

$$P_{mn}(s, a) = \frac{1}{2^{mn}}\Big(1 + Kw_{pq}(a_{pq} - a^0_{pq})\Big) + o(|a_{pq} - a^0_{pq}|),$$
$$a_{pq} \to a^0_{pq}, \tag{13}$$

где

$$K = -4f(0)\int\limits_{-\infty}^{0} tf(t)\,dt;$$

$$w_{pq} = \sum_{i=0}^{m-1-p} \sum_{j=0}^{n-1-q} \delta_{ij}(a^0) \sum_{k=i+p+1}^{m} \sum_{l=j+q+1}^{n} s_{kl} s_{k-i-p-p,l-j-q-q}.$$

Отметим, что условиям (11)–(12) на распределение ошибок ε_{ij} удовлетворяют все основные симметричные распределения. Кроме того, условие (12) выполнено, если существуют такие $r \in (0,1]$ и $L > 0$, что

$$\mathsf{E}|\varepsilon_{11}|^{1+r} < \infty; \quad |f(t) - f(0)| \le L|t|^r \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Действительно, в этом случае для некоторой постоянной $\tilde{L} > 0$

$$\mathsf{E}[|f(\theta u X_{11}) - f(0)||X_{11}|] \le \mathsf{E}L|\theta u X_{11}|^r |X_{11}| \le \tilde{L}|u|\mathsf{E}|\varepsilon_{11}|^{1+r} \to 0 \quad \text{при } u \to 0.$$

Отсюда, в частности, следует, что теорема 1 может быть справедлива для поля X_{ij} с бесконечной дисперсией.

Обозначим

$$Z_{ij}(a) = \sum_{k=i+1}^{m} \sum_{l=j+1}^{n} S_{kl}(a) S_{k-i-p,l-j-q}(a),$$
$$i = 0, 1, \ldots, m, \quad j = 0, 1, \ldots, n;$$
$$W_{pq}(a) = \sum_{i=0}^{m-1-p} \sum_{j=0}^{n-1-q} \delta_{ij}(a) Z_{i+p,j+q}(a), \quad (p,q) \in \mathcal{I};$$
$$W(a) = (W_{10}(a), W_{01}(a) W_{11}(a)).$$

Для краткости примем $S_{kl} = S_{kl}(a^0)$, $Z_{ij} = Z_{ij}(a^0)$, $W_{pq} = W_{pq}(a^0)$.

Из теоремы 1 с учетом того, что $K > 0$, вытекают следующие теоремы, определяющие вид ЛНМ критериев.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия* (8)–(12). *Тогда ЛНМ знаковый критерий отклоняет H^0 в пользу H^+_{pq}, если*

$$W_{pq} > C^+_{pq}, \quad (p,q) \in \mathcal{I}, \tag{14}$$

и принимается в противном случае. Постоянная C^+_{pq} определяется уровнем значимости критерия α.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия* (8)–(12). *Тогда ЛНМ знаковый критерий отклоняет H^0 в пользу H^-_{pq}, если*

$$W_{pq} < C^-_{pq}, \quad (p,q) \in \mathcal{I}, \tag{15}$$

и принимается в противном случае. Постоянная C^-_{pq} определяется уровнем значимости критерия α.

Теоремы 2 и 3 позволяют естественным образом определить знаковый критерий для проверки H^0 против двусторонней альтернативы H_{pq}, $(p,q) \in \mathcal{I}$, на уровне значимости α как объединение двух односторонних критериев, проверяющих на уровне значимости $\alpha/2$ альтернативы $H^+_{pq}\colon a_{pq} > a^0_{pq}$ и $H^-_{pq}\colon a_{pq} < a^0_{pq}$, $(p,q) \in \mathcal{I}$. Тогда при выполнении условий (8)–(12) гипотеза H^0 отклоняется в пользу H^-_{pq}, если

$$|W_{pq}| > C_{pq}, \quad (p,q) \in \mathcal{I}, \tag{16}$$

и принимается в противном случае. Постоянная C_{pq} определяется уровнем значимости критерия α.

Из теорем 2 и 3 следует, что небольшие значения $|W_{pq}(a)|$ свидетельствуют в пользу H^0, а большие – в пользу альтернатив. Поэтому в качестве оценки параметра a, следуя идее Ходжеса и Лемана [7], надо выбрать решение $\hat{a}$ системы уравнений

$$W(a) = 0. \tag{17}$$

К сожалению, функции $W_{pq}(a)$ разрывны, и равенства (17) могут выполняться лишь приближенно. Поэтому в качестве оценки естественно взять точку $\hat{a}$, в которой координаты $W_{pq}(a)$ функции $W(a)$ переходят через ноль. Также можно в качестве оценки брать минимум функции

$$G(a) = \frac{1}{\sqrt{mn}}\Big(W^2_{10}(a) + W^2_{01}(a) + W^2_{11}(a)\Big).$$

Функция $G(a)$ кусочно-полиномиальная. Она имеет разрывы в точках, удовлетворяющих соотношениям

$$X_{ij} - a_{10}X_{i-1,j} - a_{01}X_{i,j-1} - a_{11}X_{i-1,j-1} = 0,$$
$$i = 1,\ldots,m, \quad j = 1,\ldots,n. \tag{18}$$

В точках разрыва изменение функции $G(a)$ не превышает по абсолютному значению $2/\sqrt{mn}$.

Минимум функции $G(a)$ всегда существует, поскольку совпадает со значением $G(a)$ в одной из точек пересечения плоскостей (18). Минимум $G(a)$ можно найти любым методом, не требующим дифференцируемости целевой функции, например методом покоординатного спуска.

Состоятельность знаковых оценок. Обозначим

$$E_{ij}(a) = \mathsf{E}[S_{ij}(a)S_{11}(a)], \quad i,j \in \mathbb{N};$$

$$L_{pq}(a) = \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} \delta_{ij}(a)E_{i+p+1,j+q+1}(a), \quad (p,q) \in \mathcal{I};$$

$$L(a) = (L_{10}, L_{01}, L_{11}).$$

Теорема 4. *Пусть выполнены условия* (9)–(11) *и*

$$\mathsf{E}\varepsilon_{11}^2 < \infty. \tag{19}$$

Тогда $L(a)$ *дифференцируема в области* $\mathfrak{B}$, $\det(L'(a^0)) \neq 0$ *и при* $m, n \to \infty$

$$\frac{1}{mn} W_{pq}(a) \to L_{pq}(a)$$

равномерно по $a \in \mathfrak{B}$.

Доказательство. Имеем

$$\left| \frac{1}{mn} W_{pq}(a) - L_{pq}(a) \right| \leq S_1 + S_2,$$

где

$$S_1 = \left| \frac{1}{mn} W_{pq}(a) - \mathsf{E}\left[\frac{1}{mn} W_{pq}(a) \right] \right|,$$

$$S_2 = \left| \mathsf{E}\left[\frac{1}{mn} W_{pq}(a) \right] - L_{pq}(a) \right|.$$

Из стационарности полей X_{ij} и ε_{ij} следует, что

$$\mathsf{E}[S_{kl}(a) S_{k-i-p-p, l-j-q-q}(a)] = \mathsf{E}[S_{i+p+1, j+q+1}(a) S_{11}(a)].$$

Известно [1, 2], что при выполнении условий (8), (19) решение X_{ij} уравнения (1) можно представить в виде

$$X_{ij} = \sum_{k,l=0}^{\infty} \delta_{kl}(a) \varepsilon_{i-k, j-l}, \tag{20}$$

причем существуют постоянные $\alpha \in (0, 1)$ и C такие, что

$$|\delta_{kl}(a)| \leq C\alpha^{k+l}. \tag{21}$$

Поэтому

$$\mathsf{E}\left[\frac{1}{mn} W_{pq}(a) \right] =$$

$$= \frac{1}{mn} \sum_{i=0}^{m-1-p} \sum_{j=0}^{j-1-q} \delta_{ij}(a) \sum_{k=i+p+1}^{m} \sum_{l=j+q+1}^{n} \mathsf{E}[S_{kl}(a) S_{k-i-p-p, l-j-q-q}(a)] =$$

$$= \sum_{i=0}^{m-1-p} \sum_{j=0}^{j-1-q} \delta_{ij}(a) \left(1 - \frac{i}{m}\right) \left(1 - \frac{j}{n}\right) E_{i+p+1, j+q+1}(a)] \to L_{pq}(a).$$

Следовательно,

$$S_2 \to 0,$$

причем в силу условия (21) и ограниченности $S_{ij}(a)$ эта сходимость будет равномерной в $\mathfrak{B}$.

Докажем, что $S_2 \to 0$. Из соотношений (20), (21) вытекает, что существует $\tau \in (0, 1)$ такое, что

$$|\operatorname{cov}(X_{ij}, X_{kl})| \leq C\tau^{|i-k|+|j-l|},$$

где $C > 0$ — некоторая постоянная.

Поэтому поле X_{ij} удовлетворяет условию сильного перемешивания с экспоненциально убывающим коэффициентом сильного перемешивания [8]. А значит, поле

$$\zeta_{kl} = S_{kl}(a)S_{k-i-p-p,l-j-q-q}(a), \quad (k,l) \in \mathbb{Z}^2,$$

также будет удовлетворять условию сильного перемешивания с тем же самым (в данном случае экспоненциально убывающим) коэффициентом сильного перемешивания [9]. Поскольку ζ_{kl} удовлетворяют условию сильного перемешивания и ограничены, то

$$|\operatorname{cov}(\zeta_{ij}, \zeta_{kl})| \leq C_1\tau^{|i-k|+|j-l|},$$

где $C_1 > 0$ — некоторая постоянная [10].

Таким образом,

$$\mathsf{E}S_1^2 \leq \frac{1}{m^2n^2} \sum_{i=0}^{m-1-p} \sum_{j=0}^{j-1-q} \delta_{ij}^2(a) \sum_{k=i+p+1}^{m} \sum_{l=j+q+1}^{n} \mathsf{D}[\zeta_{kl}] +$$

$$+ \frac{1}{m^2n^2} \sum_{i,i_1=0}^{m-1-p} \sum_{j,j_1=0}^{j-1-q} |\delta_{ij}(a)\delta_{i_1j_1}(a)| \sum_{k,k_1=i+p+1}^{m} \sum_{l,l_1=j+q+1}^{n} |\operatorname{cov}(\zeta_{kl}, \zeta_{k_1l_1})| \leq$$

$$\leq \frac{1}{mn} \sum_{i=0}^{m-1-p} \sum_{j=0}^{j-1-q} \delta_{ij}^2(a)2\left(1-\frac{i}{m}\right)\left(1-\frac{j}{n}\right) +$$

$$+ \frac{1}{m^2n^2} \sum_{i,i_1=0}^{m-1-p} \sum_{j,j_1=0}^{j-1-q} |\delta_{ij}(a)\delta_{i_1j_1}(a)| \sum_{k,k_1=i+p+1}^{m} \sum_{l,l_1=j+q+1}^{n} C\tau^{|i-k|+|j-l|} \leq$$

$$\leq \frac{C_2}{mn} + \frac{1}{m^2n^2} \sum_{i,i_1=0}^{m-1-p} \sum_{j,j_1=0}^{j-1-q} |\delta_{ij}(a)\delta_{i_1j_1}(a)| \leq \frac{C_4}{mn} \to 0$$

равномерно по $a \in \mathfrak{B}$.

Докажем теперь дифференцируемость $L(a)$ и найдем производную $L'(a)$, т. е. убедимся, что $L'(a^0) \neq 0$. Поскольку

$$X_{ij} - a_{10}X_{i-1,j} - a_{01}X_{i,j-1} - a_{11}X_{i-1,j-1} = \varepsilon_{ij} - (a-a^0)^{\mathsf{T}}\tilde{X}_{ij},$$

то

$$S_{ij}(a) = 1 - 2I\{\varepsilon_{ij} < (a-a^0)^{\mathsf{T}}\tilde{X}_{ij}\},$$

где $I(A)$ — индикатор произвольного случайного события A.

Поэтому

$$\begin{aligned}
&\mathsf{E}[S_{ij}(a)S_{11}(a)] = \\
&\quad = \mathsf{E}[(1-2I\{\varepsilon_{ij} < (a-a^0)^{\mathsf{T}}\tilde{X}_{ij}\})(1-2I\{\varepsilon_{11} < (a-a^0)^{\mathsf{T}}\tilde{X}_{11}\})] = \\
&= 1-2\mathsf{E}[(1-2I\{\varepsilon_{ij} < (a-a^0)^{\mathsf{T}}\tilde{X}_{ij}\})]-2\mathsf{E}[(1-2I\{\varepsilon_{11} < (a-a^0)^{\mathsf{T}}\tilde{X}_{11}\})]+ \\
&\qquad + 4\mathsf{E}[(1-2I\{\varepsilon_{ij} < (a-a^0)^{\mathsf{T}}\tilde{X}_{ij}\})(1-2I\{\varepsilon_{11} < (a-a^0)^{\mathsf{T}}\tilde{X}_{11}\})].
\end{aligned}$$

Обозначим через $\mathfrak{A}_{ij}$ σ-алгебру, порожденную множеством случайных величин

$$\{\varepsilon_{kl}, (k,l) < (i,j)\}.$$

Поскольку ε_{ij} не зависит от $\mathfrak{A}_{ij}$, а $\{\varepsilon_{kl}, (k,l) < (i,j)\}$ измеримы относительно $\mathfrak{A}_{ij}$, то

$$\begin{aligned}
\mathsf{E}[I\{\varepsilon_{ij} < (a-a^0)^{\mathsf{T}}\tilde{X}_{ij}\}] = \mathsf{E}(\mathsf{E}[I\{\varepsilon_{ij} < (a-a^0)^{\mathsf{T}}\tilde{X}_{ij}\}|\mathfrak{A}_{ij}]) = \\
= \mathsf{E}\left[F\left((a-a^0)^{\mathsf{T}}\tilde{X}_{ij}\right)\right].
\end{aligned}$$

Поэтому

$$\frac{\partial}{\partial a_{\alpha\beta}}\mathsf{E}\left[F\left((a-a^0)^{\mathsf{T}}\tilde{X}_{ij}\right)\right] = \mathsf{E}\left[f\left((a-a^0)^{\mathsf{T}}\tilde{X}_{ij}\right)X_{i-\alpha,j-\beta}\right],$$

и, в частности,

$$\frac{\partial}{\partial a_{\alpha\beta}}\mathsf{E}\left[F\left((a-a^0)^{\mathsf{T}}\tilde{X}_{ij}\right)\right]\Bigg|_{a=a^0} = \mathsf{E}[f(0)X_{i-\alpha,j-\beta}] = 0.$$

Учитывая снова независимость ε_{ij} от $\mathfrak{A}_{ij}$ и измеримость $\{\varepsilon_{kl},(k,l)<(i,j)\}$ относительно $\mathfrak{A}_{ij}$, получаем

$$\begin{aligned}
&\mathsf{E}\left[I\{\varepsilon_{ij} < (a-a^0)^{\mathsf{T}}\tilde{X}_{ij}\}I\{\varepsilon_{11} < (a-a^0)^{\mathsf{T}}\tilde{X}_{11}\}\right] = \\
&\quad = \mathsf{E}\left(I\{\varepsilon_{11} < (a-a^0)^{\mathsf{T}}\tilde{X}_{11}\}\mathsf{E}\left[I\{\varepsilon_{ij} < (a-a^0)^{\mathsf{T}}\tilde{X}_{ij}\}|\mathfrak{A}_{ij}\right]\right) = \\
&\qquad = \mathsf{E}\left[I\{\varepsilon_{11} < (a-a^0)^{\mathsf{T}}\tilde{X}_{11}\}F\left((a-a^0)^{\mathsf{T}}\tilde{X}_{ij}\right)\right].
\end{aligned}$$

Разлагая F по формуле Тейлора и учитывая условие (9), имеем

$$\begin{aligned}
&\mathsf{E}\left[I\{\varepsilon_{ij} < (a-a^0)^{\mathsf{T}}\tilde{X}_{ij}\}I\{\varepsilon_{11} < (a-a^0)^{\mathsf{T}}\tilde{X}_{11}\}\right] = \\
&= \mathsf{E}\left[I\{\varepsilon_{11} < (a-a^0)^{\mathsf{T}}\tilde{X}_{11}\}\left(\frac{1}{2}+f\left(\tau(a-a^0)^{\mathsf{T}}\tilde{X}_{ij}\right)\left((a-a^0)^{\mathsf{T}}\tilde{X}_{ij}\right)\right)\right] = \\
&\qquad = \frac{1}{2}\mathsf{E}\left[F\left((a-a^0)^{\mathsf{T}}\tilde{X}_{11}\right)\right] + \\
&\qquad + \mathsf{E}\left[I\{\varepsilon_{11} < (a-a^0)^{\mathsf{T}}\tilde{X}_{11}\}f\left(\tau(a-a^0)^{\mathsf{T}}\tilde{X}_{ij}\right)\left((a-a^0)^{\mathsf{T}}\tilde{X}_{ij}\right)\right],
\end{aligned}$$

где $\tau \in (0,1)$. Следовательно,

$$\frac{\partial}{\partial a_{\alpha\beta}} \mathsf{E}\left[I\{\varepsilon_{ij} < (a-a^0)^{\mathsf{T}}\tilde{X}_{ij}\} I\{\varepsilon_{11} < (a-a^0)^{\mathsf{T}}\tilde{X}_{11}\}\right] =$$
$$= \frac{1}{2}\mathsf{E}\left[f\left((a-a^0)^{\mathsf{T}}\tilde{X}_{11}\right) X_{i-\alpha,j-\beta}\right] +$$
$$+ \mathsf{E}\left[I\{\varepsilon_{11} < (a-a^0)^{\mathsf{T}}\tilde{X}_{11}\} f\left(\tau(a-a^0)^{\mathsf{T}}\tilde{X}_{ij}\right) X_{i-\alpha,j-\beta}\right].$$

Учитывая представление

$$X_{ij} = \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} \delta_{ij}(a^0)\varepsilon_{i-k,j-l},$$

получаем

$$\frac{\partial}{\partial a_{\alpha\beta}} \mathsf{E}\left[I\{\varepsilon_{ij} < (a-a^0)^{\mathsf{T}}\tilde{X}_{ij}\} I\{\varepsilon_{11} < (a-a^0)^{\mathsf{T}}\tilde{X}_{11}\}\right]\Big|_{a=a^0} =$$
$$= \frac{1}{2} f(0)\mathsf{E}[X_{1-\alpha,1-\beta}] + \mathsf{E}[I\{\varepsilon_{11} < 0\} f(0) X_{i-\alpha,j-\beta}] =$$
$$= f(0)\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} \delta_{ij}(a^0)\mathsf{E}[I\{\varepsilon_{11} < 0\}\varepsilon_{i-\alpha-k,j-\beta-l}] =$$
$$= f(0)\delta_{i-\alpha-1,j-\beta-1}(a^0)\mathsf{E}[I\{\varepsilon_{11} < 0\}\varepsilon_{11}] = f(0)\mathsf{E}(\varepsilon_{11}^-)\delta_{i-\alpha-1,j-\beta-1}(a^0),$$

где

$$\varepsilon_{11}^- = I\{\varepsilon_{11} < 0\}\varepsilon_{11} = \begin{cases} \varepsilon_{11}, & \text{если } \varepsilon_{11} \le 0; \\ 0, & \text{если } \varepsilon_{11} > 0; \end{cases}$$

$$\mathsf{E}(\varepsilon_{11}^-) = \int_{-\infty}^{0} x f(x)\, dx. \qquad (22)$$

Таким образом,

$$\frac{\partial L_{pq}(a^0)}{\partial a_{\alpha\beta}} = 4f(0)\mathsf{E}(\varepsilon_{11}^-)\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\delta_{ij}(a^0)\delta_{i+|p-\alpha|,j+|q-\beta|}(a^0),$$

и, следовательно,

$$L'(a^0) = \frac{4f(0)\mathsf{E}(\varepsilon_{11}^-)}{\sigma^2}R,$$

где R — ковариационная матрица вектора (X_{10}, X_{01}, X_{11}).

Теорема 4 доказана.

Из этой теоремы следует, что существует решение $\hat{a}_{mn}$ системы (17), которое при $m, n \to \infty$ сходится к a^0.

Теорема 5. *Пусть выполнены условия* (9)—(11)*,* (19).

Тогда существует решение $\hat{a}_{mn}$ *системы* (17)*, являющееся состоятельной оценкой параметра* a^0.

Доказательство. Из независимости ε_{ij} следует, что

$$E_{i+p+1,j+q+1}(a^0) = \mathsf{E}[\operatorname{sign}(\varepsilon_{i+p+1,j+q+1}) \operatorname{sign}(\varepsilon_{11})] = 0.$$

Поэтому

$$L_{pq}(a^0) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \delta_{ij}(a) E_{i+p+1,j+q+1}(a^0) = 0.$$

Обозначим через a^M и a^m наибольшее и наименьшее значения функции $L(a)$ в шаре $B_r(a^0)$ радиусом r с центром в a^0. Поскольку $L(a^0) = 0$ и $\det L'(a^0) \neq 0$, то для всех достаточно малых r будут выполняться неравенства

$$L(a^M) > 0; \quad L(a^m) < 0.$$

Из сходимости $\dfrac{1}{\sqrt{mn}} W(a)$ к $L(a)$ следует, что для достаточно больших m и n справедливы неравенства

$$\frac{1}{\sqrt{mn}} W(a^M) > 0; \frac{1}{\sqrt{mn}} W(a^m) < 0.$$

Поскольку скачки функции $\dfrac{1}{\sqrt{mn}} W(a)$ не превышают $\dfrac{C}{\sqrt{mn}}$, где C — некоторая положительная постоянная, то найдется такое $\hat{a}_{mn} \in B_r(a^0)$, что

$$\left| \frac{1}{\sqrt{mn}} W(\hat{a}_{mn}) \right| \leq \frac{C}{\sqrt{mn}}.$$

В силу произвольности r при $m, n \to \infty$ последовательность $\hat{a}_{mn} \to a^0$, при этом

$$\frac{1}{\sqrt{mn}} W(\hat{a}_{mn}) \to 0, \quad m, n \to \infty.$$

Теорема 5 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Basu S., Reinsel G. C. Properties of the Spatial Unilateral First-Order ARMA Model // Advances in Applied Probability. — 1993. — V. 25. — № 3. — P. 631–648.
2. Tjostheim D. Statistical Spatial Series Modelling // Advances in Applied Probability. — 1978. — V. 10. — № 1. — P. 130–154.
3. Whittle P. On stationary processes in the plane // Biometrika. — 1954. — V. 41. — P. 434–449.
4. Davydov Y., Paulauskas V. On estimation of parameters for spatial autoregressive model //Statistical Inference for Stochastic Processes. — 2008. — V. 11. — № 3. — P. 237–247.
5. Горяинов В. Б., Горяинова Е. Р. Непараметрическая идентификация пространственной модели авторегрессии в условиях априорной стохастической неопределенности // Автоматика и Телемеханика. — 2010. — № 2. — С. 31–41.

6. Болдин М. В., Симонова Г. И., Тюрин Ю. Н. Знаковый статистический анализ линейных моделей. — М.: Наука, Физматлит, 1997. — С. 288.
7. Hodges J. L. Jr., Lehmann E. L. Estimates of location based on rank tests // Ann. Math. Stat. — 1963. — V. 34. — № 2. — P. 598–611.
8. Bulinski A., Shashkin A. Limit theorems for associated random fields and related systems. L.: World Scientific, 2007. — 447 p.
9. White H., Domowitz I. Nonlinear regression with dependent observations // Econometrica. — 1984. — V. 52. — P. 143–162.
10. Ибрагимов И. А., Линник Ю. В. Независимые и стационарно связанные величины. — М.: ФМЛ, 1965. — 524 с.

Статья поступила в редакцию 24.10.2012