УДК 517.98

А.В. Мастихин

О СВОБОДНЫХ И ПРОЕКТИВНЫХ МОДУЛЯХ ФРЕШЕ

Рассмотрено условие совпадения гомологических свойств проективности и свободности топологических модулей Фреше над алгеброй Фреше. Получена связь между гомологической размерностью максимального замкнутого идеала и размерностью его фактор-пространства по существенному подмодулю.

E-mail: mastihin@yandex.ru

Ключевые слова: *гомологическая размерность, максимальный замкнутый идеал, свободные модули Фреше.*

Согласно работе [1], конечно-порожденные проективные модули над алгеброй непрерывных функций на многообразии могут быть отождествлены с векторными расслоениями на нем. Те из модулей, которые являются, кроме того, свободными, отождествляются с тривиальными векторными расслоениями. Если над многообразием нет нетривиальных расслоений, то все проективные конечно-порожденные модули Фреше над этой алгеброй свободны, как доказано в работе [2]. Там же построен пример несвободного, но проективного конечно-порожденного модуля для многообразия с нетривиальным расслоением.

Для банаховых алгебр замкнутые максимальные идеалы, задаваемые точками границы Шилова, проективны, но не свободны [3]. Поэтому в теории банаховых алгебр невозможно условие свободности всех проективных модулей. Цель настоящей работы — обобщая некоторые результаты банаховой теории, выяснить особенности указанного гомологического условия.

Пусть A — *алгебра Фреше*, т.е. полное метризуемое пространство, снабженное структурой алгебры, причем алгебраические операции в нем непрерывны. Будем рассматривать полупростые коммутативные алгебры с единицей [4, 5]. Определим *модуль Фреше* над алгеброй A как полное метризуемое локально выпуклое пространство с совместно непрерывным внешним умножением на элементы алгебры A (ниже рассматриваются только модули Фреше).

Примером модуля Фреше над алгеброй A является локально выпуклое пространство, реализуемое как проективное тензорное произведение $A\hat{\otimes}E$ для некоторого метризуемого пространства E. Такие модули называются *свободными*.

Для всякого модуля P над A определена каноническая проекция $\pi\colon A\hat{\otimes}P \to P$, переводящая элементарный тензор $a\otimes x \in A\hat{\otimes}P$ в произведение $ax \in P$, где $a \in A$, $x \in P$. Модуль P называется *проективным*, если к канонической проекции существует правый обратный морфизм ρ, т. е. $\pi \circ \rho = 1_P$, и сквозное отображение тождественно в следующей диаграмме:

$$P \xrightarrow{\ \rho\ } A\hat{\otimes}P \xrightarrow{\ \pi\ } P.$$

Всякий свободный модуль проективен.

Гомологической размерностью модуля M называется число, обозначаемое $\mathrm{dh}\, M$ и равное длине самой короткой проективной резольвенты этого модуля [4].

Коммутативная алгебра Фреше A как частный случай алгебры Аренса — Майкла является обратным пределом системы сопутствующих банаховых алгебр, каждая из которых, по определению, есть пополнение по фактор-преднорме результата факторизации алгебры по ядру преднормы [5].

Алгебра Аренса — Майкла обладает *спектром*, т. е. множеством непрерывных нетривиальных характеров, ядра которых отождествляются с замкнутыми максимальными идеалами. На спектре Ω вводится топология Гельфанда, индуцируемая слабой топологией сопряженного пространства.

Для коммутативной полупростой алгебры Фреше A определено *преобразование Гельфанда* Γ, непрерывно вкладывающее алгебру A в равномерную алгебру Фреше непрерывных на спектре Ω функций $C(\Omega)$:

$$\Gamma\colon A \longrightarrow C(\Omega)\colon a \mapsto f_a.$$

Это позволяет рассматривать элементы a алгебры как функции f_a на спектре:

$$f_a(M) = a + M \in \mathbb{C}.$$

Здесь $M \in \Omega$ — замкнутый максимальный идеал в алгебре A, имеющий единичную коразмерность. Функции $\mathbb{C}(\Omega)$ разделяют точки спектра.

Обозначим через M^2 замыкание линейной оболочки множества $\{ab, a, b \in M\}$. Для категории банаховых модулей над банаховой алгеброй, являющейся частным случаем рассматриваемой категории, Л. И. Пугач в работе [6] показал, что если ее максимальный идеал M имеет гомологическую размерность $\mathrm{dh}\, M = n - 1$, то размерность фактор-пространства $\dim(M/M^2) \leqslant n$. Если же имеет место равенство $\dim(M/M^2) = n$, то в спектре банаховой алгебры существует окрестность, являющаяся n-мерным аналитическим диском, т. е. спектр банаховой алгебры в этом случае локально устроен так же, как спектр алгебры голоморфных функций. Докажем теорему о том, что именно этот случай реализуется при совпадении свойств свободности и проективности модулей Фреше.

Лемма 1. *Пусть A — коммутативная полупростая алгебра Фреше, а M — ее замкнутый максимальный идеал, такой, что* $\operatorname{dh} M = n-1$. *Тогда* $\dim(M/M^2) \le n$.

Доказательство. Условие, наложенное на гомологическую размерность для проективной резольвенты, имеет вид

$$0 \longleftarrow M \xleftarrow{\ \pi\ } \ldots \xleftarrow{d_{n-3}} A \mathbin{\hat{\otimes}} M_{(n-1)} \xleftarrow{d_{n-2}} \ldots$$

Здесь $A \mathbin{\hat{\otimes}} M_{(n-1)} = A \mathbin{\hat{\otimes}} M \mathbin{\hat{\otimes}} \cdots \mathbin{\hat{\otimes}} M$ означает проективность модуля $\operatorname{Ker} d_{n-3}$.

Возьмем n линейно независимых элементов $h_1, \ldots, h_n$ идеала M и соответствующие им функционалы:

$$\tau_1, \ldots, \tau_n, \quad \tau_i(e) = \tau_i(M^2) = 0, \quad \tau_i(h_j) = \delta_{ij}.$$

В сопряженном к тензорному произведению $A_{(n)} = A \mathbin{\hat{\otimes}} \cdots \mathbin{\hat{\otimes}} A$ пространстве рассмотрим функционал $F = \tau_1 \mathbin{\hat{\otimes}} \cdots \mathbin{\hat{\otimes}} \tau_n$. Тогда при ограничении F на ядро морфизма d_{n-3} в резольвенте модуля M имеем $F(M \operatorname{Ker} d_{n-3}) = 0$, что легко проверить, используя явный вид элементов $\operatorname{Ker} d_{n-3}$. Следовательно, ограничение F — морфизм, который не тривиален на элементе ядра $T(h_1, \ldots, h_n)$, определяемом как

$$\sum_{\sigma} (-1)^{\sigma} h_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes h_{\sigma(n)}.$$

Суммирование здесь ведется по всем перестановкам σ чисел $1, \ldots, n$, и

$$F(T(h_1, \ldots, h_n)) = 1.$$

Условие $\operatorname{dh} M = n-1$ влечет проективность модуля $\operatorname{Ker} d_{n-3}$ и разрешимость следующей задачи подъема:

$$\begin{array}{ccc} & & \operatorname{Ker} d_{n-3} \\ & & {\scriptstyle F}\big\downarrow \\ A & \xrightarrow{\ \chi\ } & \mathbb{C}, \end{array}$$

где χ — характер, заданный точкой M.

Следовательно, существует морфизм θ, замыкающий диаграмму до коммутативной, т. е. $\chi \circ \theta = F$. Отсюда $\theta(T(h_1, \ldots, h_n)) = 1 - m_0$ для $m_0 \in M$. Для любого $m \in M$ из тождества (галочка сверху означает отсутствие переменной)

$$mT(h_1, \ldots, h_n) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} h_k T(m, h_1, \ldots, \overset{\vee}{h_k}, \ldots, h_n)$$

получаем равенство

$$m(e - m_0) = \sum_{k=1}^{n} h_k f_k(m),$$

где $f_k(m) = (-1)^{k-1}\theta(T(m, h_1, \ldots, h_k^{\vee}, \ldots, h_n))$, из которого следует утверждение леммы. Заметим, что последнее равенство означает конечно-порожденность идеала M.

Теорема. *Пусть A — коммутативная полупростая алгебра Фреше, M — ее замкнутый максимальный идеал гомологической размерности $n-1$. Если все проективные модули Фреше над A свободны, то* $\dim(M/M^2) = n$.

Доказательство. По лемме 1 имеет место нестрогое неравенство. Требуется показать, что справедливо равенство. Рассмотрим нормализованную проективную резольвенту модуля M:

$$\begin{tikzcd} 0 & M \arrow[l] & \ldots \arrow[l, "\pi"'] & A \hat{\otimes} M_{(n-1)} \arrow[l, "d_{n-3}"'] & A \hat{\otimes} M_{(n)} \arrow[l, "d_{n-2}"'] \arrow[d, "d_{n-2}"] & \ldots, \arrow[l] \\ & & & \operatorname{Ker} d_{n-3} \arrow[u] \arrow[r, equal] & \operatorname{Im} d_{n-2} & \end{tikzcd}$$

где $M_{(n)} = M \hat{\otimes} \cdots \hat{\otimes} M$.

По условию модуль $\operatorname{Ker} d_{n-3}$ проективен и свободен. При $n = 2$ получаем проективность и свободность модуля $\operatorname{Ker} \pi$:

$$\begin{tikzcd} 0 & M \arrow[l] & A \hat{\otimes} M \arrow[l, "\pi"'] & A \hat{\otimes} M \hat{\otimes} M \arrow[l, "d_0"'] \arrow[d, "d_0"] & \ldots \arrow[l] \\ & & \operatorname{Ker} \pi \arrow[u] \arrow[r, equal] & \operatorname{Im} d_0 & \end{tikzcd}$$

Теперь рассмотрим алгебру A как модуль над собой. Для модуля A нормализованная резольвента расщепима вследствие его проективности:

$$\begin{tikzcd} 0 & A \arrow[l] & \ldots \arrow[l, "\pi^A"'] & A \hat{\otimes} M_{(n-2)} \hat{\otimes} A \arrow[l, "d_{n-3}^A"'] & A \hat{\otimes} M_{(n-1)} \hat{\otimes} A, \arrow[l, "d_{n-2}^A"'] \arrow[d, "d_{n-2}^A"] \\ & & & \operatorname{Ker} d_{n-3}^A \arrow[u] \arrow[r, equal] & \operatorname{Im} d_{n-2}^A \end{tikzcd}$$

и модуль $\operatorname{Ker} d_{n-3}^A$ тоже свободен. Рассмотрим вместе нормализованные проективные резольвенты модулей M и A. Морфизм d_{n-2} является ограничением морфизма d_{n-2}^A на модуль $A \hat{\otimes} M_{n-1}$, поэтому существует естественное вложение модулей α:

$$\operatorname{Ker} d_{n-3} \longrightarrow \operatorname{Ker} d_{n-3}^A,$$

которое индуцирует отображение фактор-пространств $\hat{\alpha}$:

$$\frac{\operatorname{Ker} d_{n-3}^A}{M \operatorname{Ker} d_{n-3}^A} \xleftarrow{\ \hat{\alpha}\ } \frac{\operatorname{Ker} d_{n-3}}{M \operatorname{Ker} d_{n-3}}.$$

Обозначая через T и T^A факторизации, получаем

$$T^A \circ \alpha = \hat{\alpha} \circ T.$$

При этом $\hat{\alpha}$ не всегда имеет тривиальное ядро. При $n = 2$ ядра операторов α и $\hat{\alpha}$ имеют простой вид:

$$\alpha\colon\ \operatorname{Ker}\pi \longrightarrow \operatorname{Ker}\pi^A \text{ и } \hat{\alpha}\colon\ \frac{\operatorname{Ker}\pi}{M\operatorname{Ker}\pi} \longrightarrow \frac{\operatorname{Ker}\pi^A}{M\operatorname{Ker}\pi^A}.$$

Модуль $\operatorname{Ker}\pi$ порождается элементами вида $a \otimes b - e \otimes ab$, где $a, b \in M$, тогда как в $\operatorname{Ker}\pi^A \subset A \mathbin{\hat{\otimes}} A$ добавляется возможность представления в виде $b \otimes e - e \otimes b$. Если $\dim(M/M^2) = 2$, то $\operatorname{Ker}\hat{\alpha} \neq 0$. Препятствием для тривиальности ядра $\hat{\alpha}$ в этом случае является наличие двух элементов в базисе M/M^2. Обозначим их прообразы в M через z_1 и z_2. Получаем элемент $z_1 \otimes z_2 - z_2 \otimes z_1$ в $\operatorname{Ker}\pi$, не лежащий в $M\operatorname{Ker}\pi$, т. е. дающий в фактор-пространстве нетривиальный образ. Однако элемент $z_1 \otimes z_2 - z_2 \otimes z_1$, записываемый в $\operatorname{Ker}\pi^A \subset A \mathbin{\hat{\otimes}} A$ как

$$z_1 \otimes z_2 - z_1 z_2 \otimes e - (z_2 \otimes z_1 - z_1 z_2 \otimes e) =$$
$$= z_1(e \otimes z_2 - z_2 \otimes e) - (z_2 \otimes z_1 - z_1 z_2 \otimes e) \in M\operatorname{Ker}\pi^A,$$

имеет тривиальный образ в $\operatorname{Ker}\pi^A/(M\operatorname{Ker}\pi^A)$. Ядро $\hat{\alpha}$ не тривиально.

Далее схема доказательства теоремы следующая. Если $\operatorname{dh} M = n - 1$, то определенный выше морфизм $\hat{\alpha}$ не является вложением. Отсюда выводится эквивалентность утверждению $\dim(M/M^2) = n$.

***Утверждение* 1.** *Если при выполнении условий теоремы $\hat{\alpha}$ — вложение, то* $\operatorname{dh} M < n - 1$.

Доказательство. Покажем, что если $\operatorname{Ker}\hat{\alpha} = 0$, то гомологическая размерность M строго меньше $n-1$. Для этого выясним, что базисные пространства свободных модулей $\operatorname{Ker} d^A$ и $\operatorname{Ker} d$ (будем обозначать их $E^A \subset \operatorname{Ker}\pi^A$, $E \subset \operatorname{Ker}\pi$ и они изоморфны $\operatorname{Ker} d^A/(M\operatorname{Ker} d^A)$ и $\operatorname{Ker} d/(M\operatorname{Ker} d)$ соответственно) могут быть выбраны так, чтобы при морфизме α базисное пространство E вкладывалось бы в E^A.

Заметим, что при условии тривиальности ядра $\hat{\alpha}$ пространство E не пересекается с $M\operatorname{Ker} d^A$, иначе следующая диаграмма не была бы коммутативна:

$$\begin{tikzcd}
A \mathbin{\hat{\otimes}} M_{(n-2)} \mathbin{\hat{\otimes}} A & \operatorname{Ker} d^A \arrow[l] \arrow[d, "T^A"'] & \operatorname{Ker} d \arrow[l, "\alpha"'] \arrow[d, "T"] \\
& \dfrac{\operatorname{Ker} d^A}{M\operatorname{Ker} d^A} & \dfrac{\operatorname{Ker} d}{M\operatorname{Ker} d}. \arrow[l, "\hat{\alpha}"]
\end{tikzcd}$$

Таким образом,

$$T^A(E^A) \supset \hat{\alpha}(T(E)).$$

Модуль $A \mathbin{\hat{\otimes}} M_{(n-2)} \mathbin{\hat{\otimes}} M$ выделяется в $A \mathbin{\hat{\otimes}} M_{(n-2)} \mathbin{\hat{\otimes}} A$ прямым слагаемым, так как естественное вложение расщепляется левым обратным морфизмом Ξ, определяемым как $1_{A \hat{\otimes} M_{(n-2)}} \mathbin{\hat{\otimes}} \xi$, где $\xi \colon e \mapsto 0$. Оператор Ξ переводит дополнительное до $\operatorname{Ker} d^A$ подпространство $\mathbb{C} \mathbin{\hat{\otimes}} M_{(n-2)} \mathbin{\hat{\otimes}} A$ на подпространство $\mathbb{C} \mathbin{\hat{\otimes}} M_{(n-2)} \mathbin{\hat{\otimes}} M$, дополнительное до $\operatorname{Ker} d$. Композиция морфизмов $\Xi \circ \alpha$ тождественна на $\operatorname{Ker} d$. Из конечномерности M/M^2 и рассмотрения явного вида элементов в $\operatorname{Ker} d^A/(M \operatorname{Ker} d^A)$ следует, что существует отображение фактор-пространств:

$$\hat{\Xi} \colon \frac{\operatorname{Ker} d^A}{M \operatorname{Ker} d^A} \longrightarrow \frac{\operatorname{Ker} d}{M \operatorname{Ker} d},$$

при этом на образе α имеем $T \circ \Xi = \hat{\Xi} \circ T^A$. Тогда $\hat{\Xi}$ будет левым обратным к вложению $\hat{\alpha}$. Как следует из равенств

$$\hat{\Xi} \circ (\hat{\alpha} \circ T) = (\hat{\Xi} \circ T^A) \circ \alpha = T \circ (\Xi \circ \alpha) = T.$$

Это означает, что базисное подпространство E вкладывается в E^A и выделяется в нем прямым слагаемым. Следовательно, существует морфизм модулей $\beta \colon \operatorname{Ker} d^A \longrightarrow \operatorname{Ker} d$, для которого $\beta \circ \alpha = 1$.

Но тогда мы получаем расщепимость верхней тройки в диаграмме, нижняя тройка которой расщепляется морфизмом:

$$\varkappa \colon A \mathbin{\hat{\otimes}} M_{(n-2)} \mathbin{\hat{\otimes}} A \longrightarrow \operatorname{Ker} d^A:$$

$$\begin{tikzcd}
0 & \operatorname{Im} d_{n-3} \arrow[l] & A \mathbin{\hat{\otimes}} M_{(n-2)} \mathbin{\hat{\otimes}} M \arrow[l] \arrow[d, "1 \otimes i"] & \operatorname{Ker} d_{n-3} \arrow[l, "i"'] & 0. \arrow[l] \\
0 & \operatorname{Im} d^A_{n-3} \arrow[l] & A \mathbin{\hat{\otimes}} M_{(n-2)} \mathbin{\hat{\otimes}} A \arrow[l] \arrow[r, "\varkappa"'] & \operatorname{Ker} d^A_{n-3} \arrow[u, "\beta"'] &
\end{tikzcd}$$

Действительно, морфизм $\delta = \beta \circ \varkappa \circ (1 \otimes i)$ является левым обратным для i:

$$\delta \circ \alpha = \beta \circ \varkappa \circ (1 \otimes i) \circ i = \beta \circ (\varkappa \circ \alpha^A) \circ \alpha = \beta \circ \alpha = 1.$$

Следовательно, модуль $\operatorname{Im} d_{n-3}$, совпадающий с $\operatorname{Ker} d_{n-2}$, проективен, что противоречит условию $\operatorname{dh} M = n - 1$. Утверждение 1 доказано.

При $n = 2$ из коммутативной диаграммы

$$\begin{array}{ccccc}
M \operatorname{Ker}\pi & \longrightarrow & M \hat{\otimes} M & \longrightarrow & M^2 \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\operatorname{Ker}\pi & \longrightarrow & A \hat{\otimes} M & \longrightarrow & M \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\dfrac{\operatorname{Ker}\pi}{M \operatorname{Ker}\pi} & \longrightarrow & \dfrac{A}{M} \otimes M & \longrightarrow & \dfrac{M}{M^2}
\end{array}$$

может быть получен явный вид базисных пространств:

$$\frac{\operatorname{Ker}\pi}{M \operatorname{Ker}\pi} \simeq M^2,$$

а изоморфизм устанавливается отображением

$$\frac{\operatorname{Ker}\pi}{M \operatorname{Ker}\pi} \longrightarrow M^2 \colon a \otimes b - e \otimes ab + M \operatorname{Ker}\pi \mapsto ab.$$

Аналогично получаем

$$\frac{\operatorname{Ker}\pi^A}{M \operatorname{Ker}\pi^A} \simeq M.$$

Следовательно, для стабильного идеала M вопрос о тривиальности ядра $\hat{\alpha}$ имеет положительный ответ, влекущий проективность M.

Определим элементы пространства $M_{(n)}$ [6]:

$$T(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{\sigma} (-1)^{\sigma} x_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes x_{\sigma(n)}; \tag{1}$$

$$T'(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{\sigma'} (-1)^{\sigma} x_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes x_{\sigma(n)}, \tag{2}$$

где в первом случае суммирование ведется по всем перестановкам, а во втором — по тем из них, для которых x_1 расположено левее, чем x_2. Ясно, что

$$T(x_1, x_2, \ldots, x_n) = T'(x_1, x_2, \ldots, x_n) + T'(x_2, x_1, \ldots, x_n)$$

и $T(x_1, \ldots, x_n)$ принадлежит $\operatorname{Ker} d_{n-3}$. Известно также [6], что $T(x_1, \ldots, x_n)$ тривиален тогда и только тогда, когда семейство $x_1, \ldots$ $\ldots, x_n$ линейно зависимо. Например, для $n = 2$

$$T(a, b) = a \otimes b - b \otimes a \ \text{ и } \ T'(a, b) = a \otimes b.$$

Заметим, что $T(a, b)$ всегда лежит в $M \operatorname{Ker}\pi^A$:

$$T(a, b) = a(e \otimes b - b \otimes e) - b(e \otimes a - a \otimes e).$$

В общем случае, разбивая сумму в $T(x_1, \ldots, x_n)$ на пары, слагаемые в которых отличаются одной инверсией:

$$x_{\sigma(1)} \otimes x_{\sigma(2)} \otimes \cdots \otimes x_{\sigma(n)} - x_{\sigma(2)} \otimes x_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes x_{\sigma(n)},$$

добавляя и вычитая $x_{\sigma(1)} x_{\sigma(2)} \otimes e \otimes \cdots \otimes x_{\sigma(n)}$, получаем элемент $M \operatorname{Ker} d^A$.

Утверждение 2. *Следующие условия эквивалентны:*

1) оператор $\hat{\alpha}$ не является вложением;

2) в пространстве $\operatorname{Ker} d / M \operatorname{Ker} d$ есть нетривиальный элемент вида $T(h_1, \ldots, h_n) + M \operatorname{Ker} d$;

3) в максимальном идеале M найдутся n элементов $h_1, \ldots, h_n$, образы которых при факторизации составляют базис в M/M^2, т. е. $\dim(M/M^2) = n$.

Доказательство. Импликация 2) $\Rightarrow$ 1) очевидна. Рассмотрим 3) $\Rightarrow$ 2). Пусть элементы $h_1, \ldots, h_n$ из M — прообраз базиса $\hat{h_1}, \ldots, \hat{h_n}$ в M/M^2. Покажем, что $T(h_1, \ldots, h_n)$ не принадлежит $M \operatorname{Ker} d$.

Если предположить, что $T(h_1, \ldots, h_n)$ является пределом линейной комбинации элементов вида $m(w - e \otimes d(w))$, где $m \in M$ и $w - e \otimes d(w) \in \operatorname{Ker} d_{(n-1)}$, то рассмотренный в лемме 1 функционал $\phi_1 \otimes \phi_2 \otimes \cdots \otimes \phi_n$, такой, что $\phi_i(a_j) = \delta_{ij}$ и $\phi_i \in (M^2)^{\perp}$, будет тривиален на $T(h_1, \ldots, h_n)$ и одновременно нетривиален на нем, что является противоречием.

Для доказательства 2) $\Rightarrow$ 3) потребуется лемма.

Лемма 2. Верно равенство $T(a_1 a_2, b, \ldots, c) = d\big(T'(a_1, a_2, b, \ldots, c)\big)$.

Доказательство. При $n = 2$, по определению,

$$T'(a_1, a_2, b) = a_1 \otimes a_2 \otimes b + b \otimes a_1 \otimes a_2 - a_1 \otimes b \otimes a_2.$$

Вычислив оператор d от T', после сокращения получим

$$d\big(T'(a_1, a_2, b)\big) = a_1 a_2 \otimes b - a_1 \otimes a_2 b + b a_1 \otimes a_2 - b \otimes a_1 a_2 - \\ - a_1 b \otimes a_2 + a_1 \otimes b a_2 = a_1 a_2 \otimes b - b \otimes a_1 a_2 = T(a_1 a_2, b).$$

Поскольку

$$T(a_1, a_2, b, \ldots, c) = T'(a_1, a_2, b, \ldots, c) + T'(a_2, a_1, b, \ldots, c),$$

то при вычислении оператора d в обеих частях равенства сокращаются все элементарные тензоры в обоих слагаемых:

$$0 = d\big(T(a_1, a_2, b, \ldots, c)\big) = d\big(T'(a_1, a_2, b, \ldots, c)\big) + d\big(T'(a_2, a_1, b, \ldots, c)\big),$$

причем перекрестно сокращаются лишь те из них, в которых встречается произведение $a_1 a_2$. Следовательно, $d\big(T'(a_1, a_2, b, \ldots, c)\big)$ представляет собой линейную комбинацию тензорных произведений элементов $a_1 a_2, b, \ldots, c$, взятых со всеми возможными перестановками и знаками, соответствующими их четности, что и есть, по определению, $T(a_1a_2, b, \ldots, c)$. Лемма 2 доказана.

Следствие. *Если среди аргументов* $T(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ *хотя бы один принадлежит* M^2, *то тогда сам элемент* $T(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ *лежит в* $M \operatorname{Ker} d$.

Задача доказательства следствия сводится к рассмотрению случая $a_i = a_{i1}a_{i2}$, где $a_{i1}, a_{i2} \in M$. Далее циклической перестановкой, меняющей только знак T, поставим a_i на первое место и применим лемму 2. Следствие доказано.

Применим лемму 2 к доказательству 2) $\Rightarrow$ 3). Возьмем нетривиальный не принадлежащий $M \operatorname{Ker} d$ элемент $T(a_1, \ldots, a_n)$, тогда система $a_1, \ldots, a_n$ линейно независима. Если при факторизации M по M^2 образ этой системы $\{\hat{a}_1, \ldots, \hat{a}_n\}$, где $\hat{a} = a + M^2$, окажется системой линейно зависимой, то в M имеем представление одного из элементов системы (без ограничения общности можно считать, что это a_1) в виде $a_1 = \sum\limits_{i=2}^{n} \lambda_i a_i + m$, где $m \in M^2$. Тогда, как следует из леммы, $T(a_1, \ldots, a_n) = T\left(\sum\limits_{i=2}^{n} \lambda_i a_i, a_2, \ldots, a_n\right) + T(m, a_2, \ldots, a_n) = T(m, a_2, \ldots, a_n) \in M \operatorname{Ker} d$.

Рассмотрим теперь утверждение 1) $\Rightarrow$ 2). Пусть $\hat{k} \in \operatorname{Ker} \hat{\alpha}$. Известно, что размерность фактор-пространства $M/M^2 \leq n$. Следовательно, можно считать, что $k = \sum\limits_{\sigma} \lambda_\sigma h_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes h_{\sigma(n)}$ и является линейной комбинацией произведений элементов базиса из условия 3, взятых по всем подстановкам. Поскольку $k \in \operatorname{Ker} d$, то

$$d(k) = h_1h_2 \cdots \otimes h_n - h_1 \otimes h_2h_3 \cdots \otimes h_n + \cdots + (-1)^\sigma h_1 \otimes \cdots \otimes h_{n-1}h_n = 0$$

и любые два слагаемых в сумме, определяющей k, которые отличаются лишь инверсией множителей, коллинеарны и имеют разные по знаку коэффициенты λ. Следовательно, с точностью до числового множителя k совпадает с $T(h_1, \ldots, h_n)$. Утверждение 2 и теорема доказаны.

В работе [7] было дано утверждение о совпадении с алгеброй голоморфных функций на одномерном многообразии той равномерной алгебры Фреше, все замкнутые максимальные идеалы которой свободны. Доказанная выше теорема позволяет обобщить этот результат: если слабая гомологическая размерность алгебры Фреше A конечна и равна n, а все проективные модули Фреше над ней свободны, то ее спектр Ω является комплексным многообразием Штейна размерности n и алгебра A с точностью до топологического изоморфизма совпадает с алгеброй $\mathcal{O}(\Omega)$ голоморфных функций на многообразии Ω.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Атья М. Лекции по К-теории. — М.: Мир, 1967. — 260 с.
2. Pirkovskii A. Yu. On certain homological properties of Stein algebras // J. of Math. Sci. — 1999. — V. 95. — No. 6. — P. 2690–2702.
3. Пугач Л. И. Проективные и плоские идеалы функциональных алгебр, их связь с аналитической структурой // Математические заметки. — 1982. — Т. 32. — Вып. 2. — С. 223–229.
4. Хелемский А. Я. Гомология в банаховых и топологических алгебрах. — М.: Изд-во МГУ, 1986. — 287 с.
5. Хелемский А. Я. Банаховы и полинормированные алгебры. — М.: Наука, 1989. — 463 с.
6. Пугач Л. И. Гомологическая размерность идеалов функциональных алгебр и аналитическая структура // Функциональный анализ и его приложения. — 1982. — Т. 16. — Вып. 3. — С. 82, 83.
7. Мастихин А. В. О свободных идеалах в метризуемых алгебрах // Тезисы докладов научно-технической конференции, посвященной 170-летию МГТУ им. Н. Э. Баумана. — М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана. — 2000. Ч. 2. — С. 3.

Статья поступила в редакцию 24.10.2012