УДК 621.3

Э.Р. Смольяков

ИНТЕГРАЛЫ ДВИЖЕНИЯ В ЭЛЕКТРОМАГНИТНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Определена оптимальная с позиции расхода энергии траектория управляемого движения электрически заряженных масс в электромагнитном пространстве, что позволяет расширить имеющиеся представления о возможных оптимальных перемещениях в гравитационных и электромагнитных полях и закладывает математические основы для реализации в будущем сверхдальних и сверхбыстрых полетов в космосе.

E-mail: ser-math@rambler.ru

Ключевые слова: *динамика, электромагнитные пространства.*

В работе [1] строго математически доказано, что для пространства, двойственного к пространству Минковского $X = (it, x_1, x_2, x_3)$, где i — мнимая единица, оптимальные траектории движения электрически заряженных масс представляют собой ломаные линии из ортогональных отрезков прямых. С позиций возможности реализации сверхдальних полетов этот вопрос оказывается интересным и в отношении четырехмерного пространства (t, x_1, x_2, x_3).

Постановка задачи и основные результаты. Попытаемся в достаточно общей постановке математически оценить высказанную А.И. Вейником в 1976 г. возможность существования оптимальных траекторий [2]. Для этого решим в общем виде задачу оптимизации в электромагнитной среде с распределенными массами и электрическими зарядами в условиях допущения скоростей $v(t)$, не превышающих скорости света в вакууме, следующего функционала («интеграла действия»):

$$J = \int_{t_0}^{t_1} dt \int_V \left[\rho_m c^2 \sqrt{1 - v^2/c^2} + \rho\varphi - \frac{\rho}{c}(\mathbf{A}_r\ \mathbf{v}) - \frac{1}{8\pi}(\mathbf{E}^2 - \mathbf{H}^2) \right] dx, \quad (1)$$

где t_0, t_1 — моменты начала и окончания движения электрически заряженной массы соответственно; V — объем в координатном пространстве (x_1, x_2, x_3); ρ_m, ρ — распределенные масса и электрический заряд в объеме V соответственно; c — скорость света в вакууме; v — модуль вектора скорости в координатном пространстве (x_1, x_2, x_3); φ — скалярный потенциал как функция фазовых координат (x_1, x_2, x_3) и времени t; $\mathbf{A} = (A_1, A_2, A_3)$ — векторный потенциал электромагнитного поля (того же класса, что и скалярный), создаваемый в любой точке (x_1, x_2, x_3) распределенными в объеме V зарядами и электромагнитным полем, порождаемым не обязательно этими зарядами. Постоянные коэффициенты здесь являются следствием выбора гауссовой системы единиц [3].

Напряженность электрического и магнитного полей запишем соответственно в виде [4]

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla\varphi; \quad \mathbf{H} = \operatorname{rot} \mathbf{A}.$$

Сформулируем вариационную задачу в пространстве X как задачу оптимального управления, в которой управляющими переменными являются вектор скорости $\mathbf{v}$ и частные производные от скалярного и векторного потенциалов электромагнитного поля, используя для этого связи, ни в какой мере не ограничивающие вариационную задачу с оптимизируемым функционалом (1):

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v}(t), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^0, \quad v(t) = |\mathbf{v}(t)| \le c; \tag{2}$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \sum_{k=1}^{3} w_k v_k + w_0, \quad \varphi(t_0) = \varphi^0; \tag{3}$$

$$\frac{dA_i}{dt} = \sum_{k=1}^{3} u_{ik} v_k + u_{i0}, \quad A_i(t_0) = A_i^0, \quad i = 1, 2, 3. \tag{4}$$

Здесь переменные

$$w_0 = \frac{\partial\varphi}{\partial t}, \; w_k = \frac{\partial\varphi}{\partial x_k}, \; u_{i0} = \frac{\partial A_i}{\partial t}, \; u_{ik} = \frac{\partial A_i}{\partial x_k}, \quad i, k = 1, 2, 3,$$

являются управляющими, однозначно определяющими скалярный и векторный потенциалы, а компоненты четырехмерного потенциала $(\varphi, \mathbf{A}_\mathbf{r})$, как и компоненты вектора состояния $\mathbf{r}$, — фазовыми переменными.

На частные производные от электромагнитного потенциала наложим следующие ограничения, естественные для случая, когда электрическими и магнитными полями можно управлять посредством изменения частных производных от них:

$$\begin{gathered} u_{i0}^0 \le u_{i0} = \frac{\partial A_i}{\partial t} \le u_{i0}^1; \quad u_{ik}^0 \le u_{ik} = \frac{\partial A_i}{\partial x_k} \le u_{ik}^1; \\ w_k^0 \le w_k = \frac{\partial\varphi}{\partial x_k} \le w_k^1, \quad i, k = 1, 2, 3. \end{gathered} \tag{5}$$

Найдем решение вариационной задачи (1)—(5), определяющей управляемое движение электрически заряженных масс в электромагнитных полях, и покажем, что это решение указывает на существование интегралов движения, имеющих место, когда некоторые из ограничений (5) строго выполняются (т. е. когда технические возможности достаточно велики и позволяют применять такие управляющие воздействия, которые необходимы для реализации найденных интегралов) и определяют совершенно непривычные траектории движения, энергетически наиболее выгодные в пространстве (t, x_1, x_2, x_3). Решение получим, воспользовавшись теоремой, выражающей наиболее общие из известных на сегодня необходимые условия оптимальности [5, с. 232—233].

Примем следующие допущения. Пусть $\mathbf{r}(t)$ — абсолютно непрерывная трехмерная вектор-функция фазовых координат (x_1, x_2, x_3), удовлетворяющая уравнению (2); $(\varphi, \mathbf{A_r})$ — четырехмерная абсолютно непрерывная вектор-функция фазовых координат (φ, A_1, A_2, A_3), удовлетворяющая уравнениям (3); $\mathbf{v}(t)$ — почти всюду на (t_0, t_1) измеримая по Лебегу трехмерная вектор-функция управления; $\mathbf{u}_i = (u_{i0}, u_{i1}, u_{i2}, u_{i3})$, $\mathbf{w} = (w_0, w_1, w_2, w_3)$ — измеримые по Лебегу управляющие четырехмерные вектор-функции управления, а подынтегральная функция $f_0(\mathbf{r}, \varphi, \mathbf{A_r}, \mathbf{v}, \mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, \mathbf{u_3}, \mathbf{w}, t)$ функционала (1) непрерывна, непрерывно дифференцируема и ее модуль мажорируется на (t_0, t_1) функцией $s(t)(|\mathbf{y}| + 1)$, где $s(t)$ — некоторая неотрицательная интегрируемая функция: $\mathbf{y} = (\mathbf{r}, \varphi, \mathbf{A_r})$.

Теорема. При удовлетворении принятых допущений оптимальное управляемое движение распределенных заряженных масс подчиняется дифференциальному уравнению

$$\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{E}\,\rho + [\mathbf{v}\times\mathbf{H}]\frac{\rho}{c} - (\varphi - (\mathbf{A_r}\mathbf{v})/c\,)\nabla\rho -$$

$$-\frac{d\rho_m}{dt}\frac{\mathbf{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - c^2\sqrt{1-(v/c)^2}\cdot\nabla\rho_m - \frac{\mathbf{A_r}}{c}\left[\frac{\partial\rho}{\partial t} + (\mathbf{v}\,\nabla\rho)\right] +$$

$$+\left(-\frac{d\mathbf{w}}{dt}\int_t^{t_1}\rho\, d\tau - \mathbf{w}\rho + \sum_{i=1}^{3}\frac{\rho}{c}\,\mathbf{u}_i v_i + \sum_{i=1}^{3}\frac{d\mathbf{u}_i}{dt}\int_t^{t_1}\frac{\rho}{c}\,v_i\, d\tau\right), \qquad (6)$$

причем в случае недостижения ограничений (5) в отношении управляющих переменных u_{i0}, w_i, $i = 1, 2, 3,$ задача (1)—(5) допускает следующие интегралы движения:

$$\int_t^{t_1}\rho\,\mathbf{v}\, d\tau = -\mathbf{v}\int_t^{t_1}\rho\, d\tau; \qquad (7)$$

$$v_3 \int_t^{t_1} \rho v_2 \, d\tau + v_2 \int_t^{t_1} \rho v_3 \, d\tau = 0; \tag{8}$$

$$v_2 \int_t^{t_1} \rho v_1 \, d\tau + v_1 \int_t^{t_1 \rho} \rho v_2 \, d\tau = 0; \tag{9}$$

$$v_3 \int_t^{t_1} \rho \, v_1 \, d\tau + v_1 \int_t^{t_1} \rho \, v_3 \, d\tau = 0. \tag{10}$$

Их совместное решение приводит к интегралам

$$v_1 v_2 \int_t^{t_1} \rho \, d\tau = 0; \quad v_2 v_3 \int_t^{t_1} \rho \, d\tau = 0; \quad v_1 v_3 \int_t^{t_1} \rho \, d\tau = 0, \tag{11}$$

из которых следует, что в каждый момент t только одна из компонент v_i может не равняться нулю, а следовательно, любая экстремальная траектория представляет собой ломаную линию из ортогональных отрезков прямых, параллельных выбранной системе координат.

Доказательство. Гамильтониан H_J в задаче (1)—(5), в которой поля $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ выражаются через управляющие переменные (4), имеет вид

$$H_J = \int_V \left[\rho_m c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} + \rho\varphi - (\mathbf{A_r v}) \frac{\rho}{c} - \frac{\mathbf{E}^2 - \mathbf{H}^2}{8\pi} \right] dx +$$

$$+ \boldsymbol{\lambda} \, \mathbf{v} + \boldsymbol{\mu}_0 (\mathbf{w} \, \mathbf{v} + w_0) + \sum_{i=1}^{3} \mu_i \left[(\mathbf{u_i} \, \mathbf{v}) + u_{i0} \right],$$

где

$$\mathbf{E}^2 = \left(\frac{1}{c} u_{10} + w_1 \right)^2 + \left(\frac{1}{c} u_{20} + w_2 \right)^2 + \left(\frac{1}{c} u_{30} + w_3 \right)^2;$$

$$\mathbf{H}^2 = (u_{32}^2 - 2u_{32}u_{23} + u_{23}^2) + (u_{13}^2 - 2u_{13}u_{31} + u_{31}^2) + (u_{21}^2 - 2u_{21}u_{12} + u_{12}^2).$$

Из необходимых условий оптимальности [5] получаем следующие уравнения:

$$\dot{\boldsymbol{\lambda}} = -\frac{\partial H_J}{\partial \mathbf{x}} = -\int_V \left\{ c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \cdot \nabla \rho_m + \rho \nabla \varphi + \varphi \nabla \rho - (\mathbf{A_r} \, \mathbf{v}) \frac{\nabla \rho}{c} - \right.$$

$$\left. - \left\{ (\mathbf{v} \nabla) \, \mathbf{A_r} + [\mathbf{v} \times \operatorname{rot} \mathbf{A_r}] \right\} \frac{\rho}{c} \right\} dx; \tag{12}$$

$$\frac{\partial H_J}{\partial \mathbf{v}} = \int_V \left[-\frac{\mathbf{v}\rho_m}{\sqrt{1-(v/c)^2}} - \frac{\rho}{c}\mathbf{A_r} \right] dx + \boldsymbol{\lambda} + \mu_0 \mathbf{w} + \sum_{i=1}^{3} \mu_i \mathbf{u}_i = 0; \quad (13)$$

$$\dot{\mu}_0 = -\frac{\partial \widehat{H}_J}{\partial \varphi} = \int_V \rho dx, \quad \mu_0(t_1) = 0; \quad (14)$$

$$\dot{\mu} = -\frac{\partial H_J}{\partial \mathbf{A_r}} = \int_V \frac{\rho}{c} \mathbf{v}\, dx, \quad \boldsymbol{\mu}(t_1) = 0. \quad (15)$$

Интегрируя уравнения (14) и (15), находим

$$\mu_0(t) = \int_t^{t_1} d\tau \int_V \rho\, dx; \quad \boldsymbol{\mu}(t) = -\int_t^{t_1} d\tau \int_V \frac{\rho}{c} \mathbf{v}\, dx. \quad (16)$$

Дифференцируя уравнение (13) по времени с учетом (14) и (16) и исключая из него с помощью первого уравнения вектор $\dot{\boldsymbol{\lambda}}$, приходим к интегродифференциальному уравнению движения в случае управляемых электромагнитных полей:

$$\int_V \dot{\mathbf{p}}\, dx = \int_V \left\{ \mathbf{E}\rho + [\mathbf{v}\times\mathbf{H}]\frac{\rho}{c} - [\varphi - (\mathbf{A_r v})/c]\nabla\rho \right\} dx -$$

$$-\int_V \left[\frac{d\rho_m}{dt} \frac{\mathbf{v}}{\sqrt{1-(v/c)^2}} - c^2\sqrt{1-(v/c)^2} \cdot \nabla\rho_m \right] dx - \int_V \left\{ \frac{A_r}{c} \left[\frac{\partial\rho}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla\rho) \right] \right\} dx +$$

$$+\int_V \left[-\frac{d\mathbf{w}}{dt} \int_t^{t_1} \rho d\tau - \mathbf{w}\rho + \sum_{i=1}^{3} \frac{\rho}{c} \mathbf{u}_i \mu_i + \sum_{i=1}^{3} \frac{d\mathbf{u}_i}{dt} \int_t^{t_1} \frac{\rho}{c} \mu_i d\tau \right] dx,$$

из которого следует дифференциальное уравнение (6) почти всюду в объеме V.

Если ограничения (5) на управляющие переменные u_{k0}, w_k, $k = 1, 2, 3,$ не достигаются, необходимые условия экстремума гамильтониана H_j (реализующиеся в его седловой точке) сводятся к уравнениям

$$\frac{\partial H_J}{\partial u_{k0}} = \mu_k - \frac{1}{4\pi} \int_V \left(\frac{1}{c} u_{k0} + w_k \right) dx = 0;$$

$$\frac{\partial H_J}{\partial w_k} = \mu_0 \mu_k - \frac{1}{4\pi} \int_V \left(\frac{1}{c} u_{k0} + w_k \right) dx = 0, \quad k = 1, 2, 3,$$

которые в векторной форме имеют вид

$$4\pi c\boldsymbol{\mu} = -\int\limits_V \mathbf{E}\,dx,\;\; 4\pi\mathbf{v}\mu_0 = -\int\limits_V \mathbf{E}\,dx.$$

Отсюда получаем интеграл движения $c\boldsymbol{\mu} = \mu_0\mathbf{v}$, который с учетом уравнений (16) можно записать так:

$$-\int\limits_t^{t_1} d\tau \int\limits_V \rho\,\mathbf{v}\,dx = \mathbf{v}\int\limits_t^{t_1} d\tau \int\limits_V \rho\,dx$$

или (почти всюду в объеме V) в виде (7).

Другой векторный интеграл можно получить, если при оптимизации гамильтониана H_J не достигаются ограничения (5) на управляющие переменные u_{ik}, i,k = 1,2,3. Для этого случая необходимые условия оптимальности (реализующиеся в седловой точке $\dfrac{\partial H_J}{\partial u_{ik}} = 0$) принимают следующий вид:

$$\int\limits_V (u_{23} - u_{32})dx = -4\pi\mu_2 v_3 = 4\pi\mu_3 v_2;$$

$$\int\limits_V (u_{12} - u_{21})dx = -4\pi\mu_1 v_2 = 4\pi\mu_2 v_1;$$

$$\int\limits_V (u_{13} - u_{31})dx = -4\pi\mu_1 v_3 = 4\pi\mu_3 v_1.$$

Отсюда, согласно (16), следует выполнение равенств (9) и (10) почти всюду в объеме V. Выражения (11) получаются из (9) и (10) в результате использования соотношений (7) и (8).

Таким образом, при оптимальном управлении движением электрически заряженных масс, если допустимы достаточно большие значения частных производных от φ и $\mathbf{A}_\mathbf{r}$, интегралы вида (7)—(10) реализуются в пространстве (x_1, x_2, x_3), а уравнения (2)—(4), (6)—(11), (16) описывают, вероятно, некоторую «электромагнитную трубу», ось которой, согласно уравнениям (11), формируется из отрезков прямых, расположенных под углом 90° друг к другу. Этот результат является математическим доказательством гипотезы А.И. Вейника.

Отметим, что в работе [6] для упрощенного случая неуправляемого движения был получен аналог уравнения (6) методом, сходным с рассмотренным, и с помощью разработанной автором экстремальной теории размерностей [6—11].

Работа выполнена при поддержке Программы фундаментальных исследований ОНИТС РАН «Интеллектуальные информацион-

ные технологии, системный анализ и автоматизация», проект «Теория конфликтных равновесий и экстремальная теория размерностей».

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Смольяков Э.Р. Интегралы движения в двойственном пространстве // ДАН. – 2007. – Т. 414. – № 4. – С. 459–463.
2. Смольяков Э.Р. Динамика и энергетика переходов между двойственными пространствами // ДАН. – 2006. – Т. 406. – № 6. – С. 734–737.
3. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория поля. – М.:Физматлит, 2003. – 536 с.
4. Вейник А.И. Термодинамическая пара. – М.: Высш. шк., 1973. – 460 с.
5. Смольяков Э.Р. Теория конфликтных равновесий. – М.: Едиториал УРСС, 2005. – 304 с.
6. Смольяков Э.Р. Основы экстремальной теории размерностей и фундаментальные новые результаты // Труды ИСА РАН. – 2011. – Т. 61. – Вып. 4. – С. 110–120.
7. Смольяков Э.Р. Особые экстремали в анализе размерностей // ДАН. – 2008. – Т. 421. – № 5. – С. 602–606.
8. Смольяков Э.Р. Методы поиска дифференциальных уравнений произвольных динамических процессов // Дифференциальные уравнения. – 2009. – Т. 45. – № 12. – С. 1704–1715.
9. Смольяков Э.Р. Использование особых экстремалей для получения новых уравнений движения и неизвестных констант // Кибернетика и системный анализ. – 2009. – № 4. – С. 115–124.
10. Смольяков Э.Р. Методы вывода дифференциальных уравнений на основе экстремальной теории размерностей // Дифференциальные уравнения. – 2010. – Т. 46. – № 11. – С. 1700–1709.
11. Смольяков Э.Р. Поиск неизвестных законов движения на основе экстремальной теории размерностей // Кибернетика и системный анализ. – 2011. – № 5. – С. 83–93.

Статья поступила в редакцию 28.09.2012