УДК 621.3

Э.Р. Смольяков, Л.Д. Покровский,
М.Н. Шевченко

НОВЫЕ ПРИНЦИПЫ ВЫВОДА ИЗВЕСТНЫХ И НЕИЗВЕСТНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ

На основе экстремальной теории размерностей получено неизвестное до сих пор векторное дифференциальное уравнение движения электрического заряда в центральном электростатическом поле, а также некоторые новые уравнения изменения тока и напряжения в электрической цепи.

E-mail: ser-math@rambler.ru

Ключевые слова: *дифференциальные уравнения электродинамики.*

Разработанная в 2008—2011 гг. новая экстремальная теория размерностей оказалась весьма полезной с точки зрения всевозможных ее приложений [1—9]. Это обнаружение общей формулы, определяющей все известные и неизвестные фундаментальные физические постоянные; дифференциальные уравнения, описывающие движение, при котором время останавливается, а инерциальные перегрузки компенсируются; дифференциальное уравнение, описывающее движение в гравитационном поле (и одновременно определяющее неизвестный до сих пор физический закон) и т. д.

Основные положения экстремальной теории размерностей. Пусть выбрана некоторая система с основными единицами $B_1, ..., B_n$ (где, например, $B_1 = L$ — единица длины, см; $B_2 = M$ — единица массы, г, и $B_3 = T$ — единица времени, с, в гауссовой системе единиц СГС) и заданы k известных $A_1, ..., A_k$ (где, например, $A_1 = e$ — заряд электрона; $A_2 = c$ — скорость света в вакууме и $A_3 = G$ — гравитационная постоянная) и $m-k$ произвольно выбранных размерных физических параметров $A_{k+1}, ..., A_m$, имеющих размерности

$$[A_i] = [B_1]^{\alpha_{i1}}, ..., [B_n]^{\alpha_{in}}, \; i = 1, ..., m.$$

Необходимо выразить через параметры A_i произвольный параметр X, имеющий размерность

$$[X] = [B_1]^{\beta_1}, ..., [B_n]^{\beta_n}.$$

Представим эти параметры в виде

$$R = X - CA_1^{\alpha_1} \cdots A_m^{\alpha_m}, \qquad (1)$$

где C — произвольная безразмерная постоянная.

Равенство (1) в аргументах размерностей принимает вид

$$[X] = [B_1]^{\beta_1} \cdots [B_n]^{\beta_n} = ([B_1]^{\alpha_{11}} \cdots [B_n]^{\alpha_{1n}})^{\alpha_1} \cdots ([B_1]^{\alpha_{m1}} \cdots [B_n]^{\alpha_{mn}})^{\alpha_m}.$$

Уравнивание размерностей в обеих частях этого равенства приводит к линейной системе из n уравнений с m неизвестными α_i:

$$\beta_j = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij}\alpha_i, \ \ j = 1,...,n. \qquad (2)$$

Если эта система несовместна, то, следовательно, параметры A_i выбраны неудачно и их следует заменить, а если совместна, то в зависимости от ранга n_0 матрицы $\{\alpha_{ij}\}$ она позволяет выразить n_0 параметров α_i $(n_0 \leq n)$ через остальные $(m - n_0)$, т. е. $\alpha_1(\alpha_{n_0+1},...,\alpha_m)$, ..., $\alpha_{n_0}(\alpha_{n_0+1},...,\alpha_m)$.

Будем считать, что найдено общее представление решения, если получена некоторая функциональная зависимость $X(C, A_1,..., A_m)$.

Утверждение 1. В случае удовлетворения приведенных выше допущений поставленная задача представления параметра X через параметры A_i, $i = 1,...,m$, позволяет найти $m - n_0$ экстремальных формул, связывающих между собой параметры A_i, с помощью особых экстремалей из условий $\partial \ln X / \partial \alpha_j = 0, j = n_0 + 1,...,m$, а также n_0 экстремальных формул, выражающих n_0 основных единиц через параметры $A_i, i = 1,...,m$, из условий $\partial \ln R / \partial \alpha_j = 0$, в которые вместо X по очереди подставляют параметры $B_j, 1, 2, ..., n_0$.

Утверждение 2. Пусть при произвольно выбранном наборе m параметров и переменных A_i, $i = 1, ..., m$, в рамках любой выбранной системы основных единиц размерностей найдены все $N (N < m)$ возможных особых экстремалей $R_i = 0$, $i = 1,..., N$, и пусть с учетом этих экстремалей получено общее представление решения X. Тогда, если оно при некотором $C \neq 0$ совместимо одновременно со всеми экстремалями, существует общая огибающая параметрического семейства (1) и это решение считается вполне определенным (особенно если удается найти также и значение безразмерного параметра C). Если же общее решение X оказывается не совместимым одновременно со всеми экстремалями, то это означает, что оно или состоит из суммы аддитивных членов, каждый из которых может быть найден из условия совместимости этого решения с разными экстремалями (или даже с их группами), причем в этом случае безразмерная константа перед каждым из этих членов не обязательно должна быть одной и той же; или может определять множество независимых решений совершенно разных задач, порождаемых различными группами найденных экстремалей.

Утверждение 3. На основе одного и того же разложения (1) и найденных на его основе экстремалей можно находить решения одновременно многих задач, совершенно не связанных между собой.

Пусть разложение (1) составлено с целью определить решение некоторой задачи и общий вид разыскиваемого решения найден. Для поиска решений других задач, не включающих неиспользованных в разложении (1) параметров, можно воспользоваться уже найденными экстремалями и общим видом решения исходной задачи. Действительно, любую из экстремалей, содержащую величину (параметр, функцию), которую мы рассматриваем как желаемое решение новой задачи, следует разрешить относительно этой величины и принять полученную формулу (с некоторой новой константой C) за общий вид разыскиваемого решения. Экстремалями для этой новой задачи будут служить остальные экстремали исходной задачи и формула (без константы C), определяющая общий вид решения первоначальной задачи.

Следствие 1. Если некоторый параметр выражается через экстремальные базовые параметры некоторой формулой, то он также является экстремальным базовым, причем существует множество других, принципиально различных формул его представления через экстремальные базовые параметры. Все эти формулы определяют одно и то же численное значение для этого параметра, что принципиально отличает его от неэкстремального параметра.

Следствие 2. Если какая-либо формула содержит более одного неэкстремального параметра (как, например, в формуле Планка $h = (1/\alpha)\hat{h}$, где только постоянная $\hat{h} = e^2/c$ удовлетворяет утверждению 1 и определяется как экстремальная фундаментальная физическая постоянная, в то время как постоянная Планка h и постоянная тонкой структуры α экстремальными не являются), то подобную формулу следует считать неэкстремальной. Неэкстремальные параметры выражаются через другие параметры, как правило, всего единственной формулой. В этом их существенное отличие от экстремальных (т. е. истинно фундаментальных) констант, к которым относятся, например, e, c, G. А любой конкретный экстремальный параметр может быть представлен через другие экстремальные параметры бесконечным множеством формул [1, 2], причем все эти формулы определяют одно и то же численное значение для этого параметра. Следовательно, все экстремальные параметры обладают своего рода абсолютной универсальностью, однако могут быть выражены всего через три указанные выше константы [1, 2].

Определение. Размерная физическая константа X принадлежит классу экстремальных фундаментальных физических констант (и всегда может быть найдена на основе экстремальной теории размерностей), если любое ее представление через другие константы из этого класса приводит к одному и тому же численному значению этой константы.

Отметим, что ни одна из предложенных М. Планком констант не является истинно фундаментальной в смысле этого определения. Поочередное открытие в XVIII—XX вв. трех известных нам сегодня размерных физических констант e, c и G способствовало радикальному прогрессу науки. В этом отличие истинно фундаментальных констант от остальных, опора на которые может позволить получить радикально новые направления в физике. Что же касается постоянной Планка h (и тесно связанной с нею постоянной тонкой структуры), то успехи физики в XX в., по существу, обязаны константе $\hat{h} = e^2/c$.

Чрезвычайная простота использования изложенных выше теоретических результатов демонстрируется на рассмотренных ниже примерах.

Новые результаты в электродинамике и электротехнике. Для лучшего понимания основных положений предлагаемой теории рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. Установим связь между динамикой в гравитационных полях и электродинамикой, представляя движение $r(t)$ в виде зависимости времени движения t от произведения следующих величин:

$$t = CG^k Q^n r^p \dot{r}^q \ddot{r}^s, \tag{3}$$

где $r(t)$ — модуль радиус-вектора $r(t)$ некоторого электрического заряда e в центральном поле большого электрического заряда Q другого знака; C — неизвестная безразмерная величина, необязательно вещественная.

Запишем уравнение (3) в основных размерностях гауссовой системы единиц:

$$[\mathrm{T}] = \left[\frac{\mathrm{L}^3}{\mathrm{MT}^2}\right]^k \left[\frac{\mathrm{L}^{3/2}\mathrm{M}^{1/2}}{\mathrm{T}}\right]^n [\mathrm{L}]^p \left[\frac{\mathrm{L}}{\mathrm{T}}\right]^q \left[\frac{\mathrm{L}}{\mathrm{T}^2}\right]^s. \tag{4}$$

Приравнивая размерности с обеих сторон этого равенства, получаем систему из трех линейных алгебраических уравнений с пятью неизвестными степенями, решая которую относительно любых трех степеней, например $k, q, s,$ находим

$$k = n/2; \quad q = 1 - 4n - 2p; \quad s = n + p - 1. \tag{5}$$

Подставляя (5) в уравнение (3), получаем разложение

$$t = CG^{n/2} Q^n r^p \dot{r}^{(1-4n-2p)} \ddot{r}^{(n+p-1)}. \tag{6}$$

Логарифмируя равенство (6) и приравнивая нулю частные производные от t по n и p, находим два следующих экстремальных уравнения:

$$Q\sqrt{G} \cdot \ddot{r} = \dot{r}^4; \tag{7}$$

$$\ddot{r}\, r = \dot{r}^2. \tag{8}$$

Совместно эти уравнения определяют все возможные решения (орбиты) в простейшей задаче движения электрического заряда одной полярности в мощном поле большого электрического заряда другой полярности. Это некоторый аналог задачи о двух телах небесной механики, где известны классическое скалярное уравнение движения в центральном поле массы M_0:

$$r^2 \ddot{r} = GM_0, \tag{9}$$

и его решения — эллиптические, параболические и гиперболические орбиты [10].

Аналогом уравнения (9) в рассматриваемой задаче движения в электростатическом поле является следующее уравнение, получающееся в результате подстановки $\dot{r}$ из уравнения (8) в (7):

$$r^2 \ddot{r} = Q\sqrt{G}\,. \tag{10}$$

Поскольку уравнения (9) и (10) различаются только константами, то все орбиты рассматриваемой задачи подобны орбитам задачи небесной механики (см. выражения (9) и (10)). Что же касается неизвестного уравнения (7), то оно оказывается полным аналогом уравнения, найденного для случая движения в гравитационном поле [3—7]:

$$GM_0 \ddot{r} = \dot{r}^4. \tag{11}$$

Оно утверждает действие в гравитационных полях помимо законов Кеплера и Ньютона следующего закона: инерциальное ускорение тела в центральном гравитационном поле пропорционально четвертой степени от его скорости и обратно пропорционально массе центра гравитации, указывающего на возможность существования орбит, одна часть которых реализуется в пространстве X, а другая — в двойственном к нему пространстве X^* [3—7]. Поскольку уравнения (10) и (11) получены с помощью экстремальной теории размерностей одновременно, то оснований сомневаться в справедливости уравнения (11) не больше, чем в существовании уравнения (9). Аналогичное утверждение справедливо и в отношении уравнений (7) и (10).

Подставляя экстремали (7) и (8) в разложение (6), получаем два общих представления решения рассматриваемой задачи через экстремальные постоянные и переменные:

$$t = C\frac{\dot{r}}{\ddot{r}} = C\sqrt{\frac{r^3}{Q\sqrt{G}}}. \qquad (12)$$

Это уравнение выражает третий закон Кеплера в электростатическом поле. Заметим, что если $GM_0 = Q\sqrt{G}$, то в гравитационном поле тела M_0 и в электрическом поле заряда Q реализуются тождественные семейства орбит, включая весьма богатое множество орбит (см. уравнения (7) и (11)) с выходом в двойственное пространство Минковского $X^* = (t, ix_1, ix_2, ix_3)$, где i — мнимая единица. В общем случае, если материальные тела в гравитационных полях обладают достаточно большими электрическими зарядами, то их движение может заметно возмущаться ускорением согласно законам (7) и (10).

На основе скалярного уравнения (10) нетрудно найти векторное уравнение движения в центральном электростатическом поле. В самом деле, умножая это уравнение на единичный вектор $\mathbf{r}/r$, учитывая, что в рассматриваемой динамической системе отсутствуют ортогональные радиус-вектору $\mathbf{r}$ силы и используя операторное тождество

$$\frac{d^2}{dt^2}\mathbf{r} = \frac{d^2}{dt^2}(r\,\mathbf{r}/r) = \ddot{r}\,\mathbf{r}/r + r\frac{d^2}{dt^2}(\mathbf{r}/r)$$

(здесь оператором является вторая производная $\frac{d^2}{dt^2}$, первый член в правой части определяет ускорение вдоль радиуса, а второй — ортогональное ему и равное нулю), получаем

$$r^2\frac{d^2}{dt^2}\mathbf{r} = Q\sqrt{G}\cdot\mathbf{r}/r.$$

Аналогично находим векторный аналог скалярного уравнения (7):

$$Q\sqrt{G}\cdot r\frac{d^2}{dt^2}\mathbf{r} = \dot{r}^4\mathbf{r}.$$

Таким образом, экстремальная теория размерностей позволила, не опираясь ни на какие физические законы, эксперименты или интуицию, легко найти уравнения движения и их решения, а также физические законы, которым подчиняются движения тел в центральном электростатическом поле. Для этого потребовалось лишь выяснить, от каких параметров может зависеть изучаемое явление или процесс. Чем больше параметров в исходном разложении (1), тем более точные уравнения изучаемого процесса могут быть получены. (Однако при этом могут появиться экстремали, не имеющие прямого отношения к изучаемой задаче.)

Пример 2. Найдем общее дифференциальное уравнение и дифференциальные уравнения, описывающие изменение тока $I(t)$ в отдельных цепях схемы, в которой к общему источнику напряжения $U(t)$ параллельно подключены активное сопротивление R, катушка индуктивности L_0 и конденсатор C_0. Воспользуемся следующим минимально возможным разложением:

$$I = C\dot{I}^k U^l R^m C_0^n L_0^p. \tag{13}$$

В единицах размерностей гауссовой системы это уравнение принимает вид

$$\left[\frac{\mathrm{L}^{3/2}\mathrm{M}^{1/2}}{\mathrm{T}^2}\right] = \left[\frac{\mathrm{L}^{3/2}\mathrm{M}^{1/2}}{\mathrm{T}^3}\right]^k \left[\frac{\mathrm{L}^{1/2}\mathrm{M}^{1/2}}{\mathrm{T}}\right]^l \left[\frac{\mathrm{L}}{\mathrm{T}}\right]^m [\mathrm{L}]^n[\mathrm{L}]^p. \tag{14}$$

Из сравнения размерностей в равенстве (14) получаем систему из трех алгебраических уравнений с пятью неизвестными степенями, решая которую относительно любых трех степеней, например k, l, p, находим

$$k = \frac{1}{2}(1+m); \quad l = \frac{1}{2}(1-m); \quad p = \frac{1}{2}(1+m) - n. \tag{15}$$

Подставляя (15) в уравнение (13), получаем разложение

$$I(t) = C\dot{I}^{(1+m)/2}U^{(1-m)/2}R^m C_0^n L_0^{(1+m)/2-n}. \tag{16}$$

Логарифмируя равенство (16) и приравнивая нулю частные производные по m и n, находим два экстремальных уравнения:

$$\sqrt{U} = R\sqrt{\dot{I}L_0}; \tag{17}$$

$$C_0 = L_0. \tag{18}$$

Подставляя экстремали (17), (18) в разложение (16), получаем общее представление решения рассматриваемой задачи через экстремальные постоянные и переменные величины:

$$I = C\sqrt{\dot{I}L_0} \cdot \sqrt{U}. \tag{19}$$

Уравнения (17)—(19) содержат в неявной форме полную информацию относительно токов I_1, I_2, I_3, протекающих соответственно через цепи R, L_0, C_0, и суммарного тока I. Чтобы найти токи, текущие по трем параллельным ветвям рассматриваемой схемы, подставим сначала (17) в общее решение (19):

$$I = C\sqrt{\dot{I}L_0} \cdot \sqrt{U} = C\frac{\sqrt{U}}{R}\sqrt{U} = C\frac{U}{R}. \tag{20}$$

Учитывая нормировку закона Ома ($U = IR$) в электротехнике [11], находим $C = 1$. Из общего представления (20) для токов получаем для тока I_1, протекающего через активное сопротивление R, уравнение

$$I_1 = U(t)/R. \tag{21}$$

Принимаем во внимание, что общее решение (19) определяет не только ток I_1, но и токи I_2, I_3 через индуктивность и емкость. Ток I_2 определяется непосредственно уравнением (19) при $C = C_1 = \pm 1$, т. е.

$$I_2 = C_1\sqrt{\dot{I}_2 L_0 U(t)}. \tag{22}$$

Ток I_3 получаем подстановкой равенства (18) в общее решение (19) при $C = C_2 = \pm 1$:

$$I_3 = C_2\sqrt{\dot{I}_3 C_0 U(t)}. \tag{23}$$

Таким образом, суммарный ток $I(t)$, проходящий через источник напряжения $U(t)$, слагается из трех аддитивных компонент:

$$I = I_1 + I_2 + I_3 = \frac{U(t)}{R} + C_1\sqrt{\dot{I}_2 L_0 U(t)} + C_3\sqrt{\dot{I}_3 C_0 U(t)}. \tag{24}$$

Насколько нам известно, уравнения (22)—(24) в полученном виде не приводились в учебниках по электротехнике (и, возможно, не были получены).

Отметим, что разложение (13) приводит еще к одному решению — к линейным уравнениям для I_2 и I_3, получающимся при подстановке $\sqrt{U(t)}$ из (17) в (19):

$$I_2 = \dot{I}_2 L_0 R, I_3 = \dot{I}_3 C_0 R. \tag{25}$$

Однако указать, в каких случаях реализуются линейные, а в каких нелинейные уравнения, опираясь на экстремальную теорию размерностей, в настоящее время не представляется возможным.

В решении (24) при любом заданном законе изменения подаваемого в схему напряжения $U(t)$ токи I_2 и I_3 в цепях индуктивности и емкости подчиняются нелинейным дифференциальным уравнениям (22) и (23), которые непосредственно интегрируются в случае постоянства индуктивности L_0 и емкости C_0.

Дальнейшее обобщение рассмотренной параллельной электрической цепи можно получить, если в правую часть разложения (13) добавить вторую производную $\ddot{I}$.

Работа выполнена при поддержке Программы фундаментальных исследований ОНИТС РАН «Интеллектуальные информационные технологии, системный анализ и автоматизация», проект «Теория конфликтных равновесий и экстремальная теория размерностей».

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Смольяков Э.Р. Особые экстремали в анализе размерностей // ДАН. – 2008. – Т. 421. – № 5. – С. 602–606.
2. Смольяков Э.Р. Использование особых экстремалей для получения новых уравнений движения и неизвестных констант // Кибернетика и системный анализ. – 2009. – № 4. – С. 115–124.
3. Смольяков Э.Р. Методы поиска дифференциальных уравнений произвольных динамических процессов // Дифференциальные уравнения. – 2009. – Т. 45. – № 12. – С. 1704–1715.
4. Смольяков Э.Р. Экстремальная теория размерностей и вывод дифференциальных уравнений движения // ДАН. – 2009. – Т. 429. – № 6. С. 750–753.
5. Смольяков Э.Р. Особые экстремали в аналитической механике // ДАН. – 2010. – Т. 435. – № 5. – С. 601–605.
6. Смольяков Э.Р. Методики вывода дифференциальных уравнений на основе экстремальной теории размерностей // Дифференциальные уравнения. – 2010. – Т. 46. – № 12. – С. 1700–1709.
7. Смольяков Э.Р. Поиск неизвестных законов движения на основе экстремальной теории размерностей // Кибернетика и системный анализ. – 2011. – № 5. – С. 83–93.

8. С м о л ь я к о в Э.Р. Принцип экстремальности в теории размерностей и новые фундаментальные физические постоянные // «Динамика неоднородных систем». Труды Института системного анализа РАН. – 2008. – Т. 33. – Вып. 12. – С. 78–95.
9. С м о л ь я к о в Э.Р. Основы экстремальной теории размерностей и фундаментальные новые результаты // Труды института системного анализа РАН. – 2011. – Т. 61. – Вып. 4. – С. 113–123.
10. Д у б о ш и н Г.Н. Небесная механика. – М.: Наука, 1968. – 800 с.
11. Б е с с о н о в Л.А. Теоретические основы электротехники. Электрические цепи. – М.: Высш. шк., 1978. – 528 с.

Статья поступила в редакцию 28.09.2012