УДК 368:519

В.И. Тимонин, Л.М. Будовская

ОЦЕНКА ВЕРОЯТНОСТИ НЕХВАТКИ СРЕДСТВ У ФОНДА КОМПЕНСАЦИОННЫХ ВЫПЛАТ ПО АГРЕГИРОВАННЫМ ДАННЫМ ЗА ФИКСИРОВАННЫЙ ПРОМЕЖУТОК ВРЕМЕНИ

Построена статистическая модель, позволяющая оценивать вероятности нехватки средств у фондов компенсационных выплат при банкротстве страховых организаций — членов страховых объединений.

E-mail: timoninmgtu52@mail.ru

Ключевые слова: *фонд компенсационных выплат, вероятность нехватки средств, ставка отчислений в фонд.*

Пусть имеется несколько объединений страховых компаний, каждое из которых решило по одному из видов страхования (например, наиболее рисковому) сформировать Фонд компенсационных выплат (ФКВ), предназначенный для предотвращения разорения входящих в объединение компаний. Средства ФКВ формируются за счет ежегодных отчислений от премий компаний по данному виду страхования по определенной ставке δ (например, пятипроцентной $\delta = 0,05$). Будем считать, что компании могут быть как многопрофильными — страхование нескольких видов деятельности, так и однопрофильными — страхование преимущественно одного рискового вида деятельности (в качестве примера в работе рассматривается страхование сельскохозяйственных рисков). Для оценки вероятности нехватки средств у ФКВ для возмещения убытков компаний в зависимости от ставки отчисления (в дальнейшем для краткости будем называть ее вероятностью разорения ФКВ) построена статистическая модель, позволяющая оценить искомые вероятности в случае, когда имеются лишь агрегированные данные по коммерческой деятельности компаний за определенный промежуток времени. Под агрегированными данными будем понимать общую страховую сумму, суммарную премию и суммарные выплаты каждой компании за указанный период. Такие данные имеются на сайте Федеральной службы Страхнадзора (ФССН) Российской Федерации. Будем считать, что имеются два объединения страховых компаний, которые могут образовать как два независимых ФКВ, так и один объединенный ФКВ.

Пусть ν_i — количество компаний, входящих в *i*-е объединение, $i = \overline{1,2}$, а Π_{ij} — общая премия *j*-й компании, входящей в *i*-е объединение страховщиков, $j=\overline{1,\nu_i}$. Часть общей премии Π_{ij}, полученной при страховании сельхозтоваропроизводителей, обозначим $\Pi_{ij}^{\text{агро}}$. Будем считать, что $\Pi_{ij}^{\text{агро}}$ известна, т. е. не является случайной величиной. Отсюда следует, что СС_{ij} ($\text{СС}_{ij}^{\text{агро}}$) — общая страховая сумма (страховая сумма по агросектору) *j*-й компании, входящей в *i*-е объединение страховщиков, также не является случайной и известна. В отличие от $\Pi_{ij}^{\text{агро}}$ и $\text{СС}_{ij}^{\text{агро}}$ параметры ξ_{ij} и $\text{СВ}_{ij}^{\text{агро}}$ (количество страховых случаев и размер страховых выплат по агросектору соответственно) зависят от множества случайных факторов и поэтому сами случайны.

Предлагаемый метод оценки вероятности разорения ФКВ основывается на следующих предположениях:

– количество страховых случаев ξ_{ij} по агросектору для каждой компании является пуассоновской случайной величиной, т. е. $\xi_{ij} \sim \Pi(\lambda_i)$;

– страховые суммы $\text{СС}_{ij}^{\text{агро}}$ незначительно отличаются между собой;

– распределение приведенных страховых выплат $\text{СВ}_{ij}^{0} = \text{СВ}_{ij}^{\text{агро}}/\text{СС}_{ij}^{\text{агро}}$ для компаний одного объединения одинаково.

Рассмотрим случайную величину u_{ij} — выплаты из страхового фонда для *j*-й компании, входящей в *i*-е объединение страховщиков, $j=\overline{1,\nu_i}$, $i=\overline{1,2}$. Ее можно представить в виде

$$u_{ij}=\max(0,\ \text{СВ}_{ij}^{\text{агро}}-k_i\,\Pi_{ij}^{\text{агро}})=\text{СС}_{ij}^{\text{агро}}\max(0,\ \text{СВ}_{ij}^{0}=k_i\,\Pi_{ij}^{0}),$$

где $\Pi_{ij}^{0}=\Pi_{ij}^{\text{агро}}/\text{СС}_{ij}^{\text{агро}}$ — приведенные заработанные компаниями премии по агросектору.

Коэффициент k_i определяет резерв капитала, необходимого для покрытия страховых выплат. Он зависит от уставного капитала компании, накопленных резервов за предыдущие годы деятельности и других факторов. Из условий формирования ФКВ следует, что в большинстве случаев справедливо неравенство $k_i>1-\delta$. Вместе с тем, если в *i*-м году произошло большое количество страховых случаев (например, стихийных бедствий), то для i -го и (i+1)-го годов это условие может нарушиться.

Суммарные выплаты из страхового фонда для компаний, входящих в i-е объединение страховщиков, в этом случае можно записать в виде

$$U_i = \sum_{j=1}^{\nu_i} u_{ij}, \ \ i=\overline{1,2}.$$

Аналогично суммарные выплаты из объединенного страхового фонда для всех компаний $U = U_1 + U_2$.

Условие разорения фондов имеет вид

$$R_i = \left\{ \sum_{j=1}^{\nu_i} u_{ij} > Q_i \sum_{j=1}^{\nu_i} \Pi_{ij} \right\}.$$

Коэффициент Q_i здесь зависит от размера ФКВ, т. е. накопленных в нем средств за предшествующее время его функционирования. Для этого коэффициента справедливы те же замечания, что и для k_i. Обычно $Q_i \geq \delta$, однако в случае стихийных бедствий это условие может нарушиться.

Для определения вероятности разорения фонда необходимо знать распределение случайной величины U_i. При выполнении предположений, приведенных выше, по центральной предельной теореме [1, 2] распределение U_i можно приближенно считать нормальным, независимо от распределения слагаемых u_{ij}. По этой причине для нахождения вероятности разорения вычислим математическое ожидание и дисперсию u_{ij}.

Утверждение. Пусть случайная величина ξ имеет плотность распределения $f(x)$. Положим $\eta_i = \max(0, \xi - \theta_i)$, где θ_i — константа. Тогда математическое ожидание (среднее) M и дисперсия D случайных величин определяются следующими выражениями.

А. Если $f(x) = \dfrac{1}{\theta} \exp\left(-\dfrac{x}{\theta}\right)$, $x \geq 0$, то

$$M\eta_i = \int_{\theta_i}^{\infty} (x-\theta_i)\frac{1}{\theta}\exp\left(-\frac{x}{\theta}\right)dx = \frac{1}{\theta}\int_0^{\infty} y\exp\left(-\frac{y+\theta_i}{\theta}\right)dy = \theta\exp\left(-\frac{\theta_i}{\theta}\right); \quad (1)$$

$$D\eta_i = \int_{\theta_i}^{\infty} (x-\theta_i)^2 \frac{1}{\theta}\exp\left(-\frac{x}{\theta}\right)dx - (M\delta_i)^2 =$$

$$= \exp\left(-\frac{\theta_i}{\theta}\right)\theta^2\int_0^\infty\left(\frac{y}{\theta}\right)^2\exp\left(-\frac{y}{\theta}\right)d\left(\frac{y}{\theta}\right)-(M\,\delta_i)^2 =$$

$$= \theta^2\exp\left(-\frac{\theta_i}{\theta}\right)\Gamma(3)-(M\,\delta_i)^2 = \theta^2\exp\left(-\frac{2\theta_i}{\theta}\right)\left[2\exp\left(-\frac{\theta_i}{\theta}\right)-1\right], \quad (2)$$

где $\Gamma(x)=\int_0^\infty t^{x-1}\,e^{-t}\,dt$ — гамма функция.

Б. Если $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma}\exp\left(-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right)$, то

$$M\,\eta_i=(a-\theta_i)\left[1-\Phi\left(\frac{\theta_i-a}{\sigma}\right)\right]+\sigma^2\,\varphi\left(\frac{\theta_i-a}{\sigma}\right); \quad (3)$$

$$D\,\eta_i=\left[(a-\theta_i)^2+\sigma^2\right]\left[1-\Phi\left(\frac{\theta_i-a}{\sigma}\right)\right]+\sigma\,\varphi\left(\frac{\theta_i-a}{\sigma}\right)(a-\theta_i)-$$

$$-(a-\theta_i)^2\left[1-\Phi\left(\frac{\theta_i-a}{\sigma}\right)\right]^2-\sigma^2\varphi^2\left(\frac{\theta_i-a}{\sigma}\right)-$$

$$-2(a-\theta_i)\,\sigma\left[1-\Phi\left(\frac{\theta_i-a}{\sigma}\right)\right]\varphi\left(\frac{\theta_i-a}{\sigma}\right), \quad (4)$$

где $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}\exp\left(-\frac{u^2}{2}\right)du$ — функция распределения стандартной нормальной случайной величины; $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$ — плотность стандартного нормального распределения.

Утверждение легко доказывается прямым интегрированием плотности по соответствующей области значений η_i.

Учитывая выражения (1), (2), получаем, что среднее и дисперсия выплат ФКВ компаниям из i-го объединения страховщиков в случае экспоненциального закона распределения выплат будут соответственно

$$MU_i=\mu_i\sum_{j=1}^{\nu_i}\mathrm{CC}_{ij}^{\text{агро}}\exp\left(-k_i\,\frac{\Pi_{ij}^0}{\mu_i}\right);$$

$$DU_i=\mu_i^2\sum_{j=1}^{\nu_i}(\mathrm{CC}_{ij}^{\text{агро}})^2\exp\left(-2k_i\,\frac{\Pi_{ij}^0}{\mu_i}\right)\left[2\exp\left(k_i\,\frac{\Pi_{ij}^0}{\mu_i}\right)-1\right].$$

Для нормального закона распределения выплат выражения для MU_i и DU_i получаются аналогичным образом в соответствии с формулами (3), (4). Например,

$$MU_i = \sum_{i=1}^{\nu_i} (\mu_i - k_i \, \Pi_{ij}^0) \, \text{CC}_{ij}^{\text{агро}} \times$$

$$\times \left[1 - \Phi\left(\frac{k_i \, \Pi_{ij}^0 - \mu_i}{\sigma_i}\right)\right] + \sigma_i^2 \sum_{j=1}^{\nu_i} \varphi\left(\frac{k_i \, \Pi_{ij}^0 - \mu_i}{\sigma_i}\right) \text{CC}_{ij}^{\text{агро}}.$$

В случае объединения фондов выражения для MU и DU полностью аналогичны соответствующим выражениям для MU_i и DU_i.

Параметры μ_i (оценка среднего приведенных выплат для i-го объединения) и σ_i (оценка дисперсии приведенных выплат для i-го объединения) выражают формулами

$$\mu_i = M(\text{CB}_i^0) = \frac{1}{\nu_i} \sum_{j=1}^{\nu_i} \text{CB}_{ij}^0;$$

$$\sigma_i^2 = D(\text{CB}_i^0) = \frac{1}{\nu_i - 1} \sum_{j=1}^{\nu_i} \left(\text{CB}_{ij}^0 - \mu_i\right)^2.$$

Из нормальности суммарных выплат следует, что вероятность разорения

$$P(R_i) = 1 - \Phi\left(\frac{Q_i \sum_{j=1}^{\nu_i} \Pi_{ij} - MU_i}{\sqrt{DU_i}}\right).$$

Аналогично для объединенного страхового фонда имеет место следующая формула:

$$P(R) = 1 - \Phi\left(\frac{Q_{12} \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{\nu_i} \Pi_{ij} - MU}{\sqrt{DU}}\right),$$

где R означает разорение и записывается в виде

$$R = \left\{ \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{\nu_i} u_{ij} > Q_{12} \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{\nu_i} \Pi_{ij} \right\}.$$

При объединении двух фондов возникает необходимость в обосновании того, что это приведет к уменьшению вероятности разорения фонда. Покажем, что это справедливо, если объединяют два фонда, образованные двумя эквивалентными (в смысле вероятностных характеристик) объединениями страховых компаний.

Для отдельных фондов имеем

$$P(R_1)=P(R_2)=1-\Phi\left(\frac{Q_1\sum_{j=1}^{\nu_1}\Pi_{1j}-MU_1}{\sqrt{DU_1}}\right).$$

Для объединенного фонда приближенно будут выполняться соотношения

$$Q_1\sum_{j=1}^{\nu_1}\Pi_{1j}\approx Q_2\sum_{j=1}^{\nu_2}\Pi_{2j};\quad MU_1=MU_2;\quad DU_1=DU_2.$$

Тогда вероятность разорения объединенного фонда

$$P(R)=1-\Phi\left(2\frac{Q_1\sum_{j=1}^{\nu_1}\Pi_{1j}-MU_1}{\sqrt{2DU_1}}\right)=1-\Phi\left(\sqrt{2}\frac{Q_1\sum_{j=1}^{\nu_1}\Pi_{1j}-MU_1}{\sqrt{DU_1}}\right).$$

Поскольку аргумент функции Лапласа больше нуля (что является необходимым условием формирования фондов), то, следовательно, всегда выполняется неравенство

$$\Phi\left(\sqrt{2}\frac{Q_1\sum_{j=1}^{\nu_1}\Pi_{1j}-MU_1}{\sqrt{DU_1}}\right)>\Phi\left(\frac{Q_1\sum_{\mathrm{j}=1}^{\nu_1}\Pi_{1j}-MU_1}{\sqrt{DU_1}}\right),$$

а значит, всегда $P(R)<P(R_1)$.

Из приведенного примера, конечно, не следует, что аналогичное свойство выполняется и для двух фондов с различными вероятностными характеристиками.

Перейдем теперь к определению коэффициентов k_i и Q_i. Фактически они представляют собой коэффициенты запаса по резерву имеющихся средств компаний (k_i) и резерву имеющихся средств ФКВ (Q_i) и поэтому должны учитывать как уставные капиталы компании УК_{ij}, так и приращение капитала компаний и ФКВ с течением времени. Ввиду того, что при расчетах используют только агрегированные данные, значения коэффициентов находили из следующих соображений.

Рассмотрим сначала определение коэффициентов Q_i.

Для первого года функционирования капитал ФКВ определяется только отчислениями компаний от полученных премий, т. е. $Q_{i1}=\delta$. Для второго года капитал ФКВ

$$\delta\sum\Pi_{ij1}^{\text{агро}}+\delta\sum\Pi_{ij2}^{\text{агро}}-U_{i1}^{\text{агро}}=\sum\Pi_{ij2}^{\text{агро}}\left(\delta+\delta\frac{\sum\Pi_{ij1}^{\text{агро}}}{\sum\Pi_{ij2}^{\text{агро}}}-\frac{U_{i1}^{\text{агро}}}{\sum\Pi_{ij2}^{\text{агро}}}\right),$$

где выражение в скобках представляет собой Q_{i2}.

Аналогично для третьего года имеем

$$\delta\sum\Pi_{ij1}^{\text{агро}}+\delta\sum\Pi_{ij2}^{\text{агро}}+\delta\sum\Pi_{ij3}^{\text{агро}}-U_{i2}^{\text{агро}}-U_{i1}^{\text{агро}}=$$

$$=\sum\Pi_{ij3}^{\text{агро}}\left(\delta+\delta\frac{\sum\Pi_{ij1}^{\text{агро}}+\sum\Pi_{ij2}^{\text{агро}}}{\sum\Pi_{ij3}^{\text{агро}}}-\frac{U_{i1}^{\text{агро}}+U_{i2}^{\text{агро}}}{\sum\Pi_{ij3}^{\text{агро}}}\right).$$

Следует отметить, что в основном при оценках как коэффициентов Q_i, так и k_i, используют их средние значения по компаниям разных объединений. В некоторых случаях, при большом разбросе данных параметров для различных годов наблюдений, можно брать несколько возможных их значений для получения в определенном смысле гарантированных оценок коэффициентов.

Вычисление коэффициентов k_i представляет собой более сложную задачу. Для ее решения необходимо кроме размеров полученных премий также знать долю α_{ij} $(0\le\alpha_{ij}\le 1)$ уставного капитала компании, которую можно направлять для покрытия страховых выплат. В статье принято, что $\alpha_{ij}=\max\left(0,05;\ \Pi_{ij}^{\text{агро}}\big/\Pi_{ij}\right)$, т. е. уставной капитал пропорционально распределяется по размерам видов страхования (с нижней границей в 5 %).

Для каждого года деятельности значение коэффициентов k_i различно, так как меняются как капиталы компаний, так и общие выплаты. По этой причине k_i для разных лет определяли следующим образом.

Для первого года деятельности резервы покрытия страховых выплат для *j*-й компании

$$r_{ij1}=(1-\delta)\ \Pi_{ij1}^{\text{агро}}+\alpha_{ij}\ \text{УК}_{ij}=\Pi_{ij1}\left(1-\delta+\frac{\alpha_{ij}\ \text{УК}_{ij}}{\Pi_{ij1}^{\text{агро}}}\right).$$

Отсюда коэффициент k_i для *j*-й компании для первого года

$$k_{ij1} = 1 - \delta + \frac{\alpha_{ij}\,\text{УК}_{ij}}{\Pi_{ij1}^{\text{агро}}}.$$

Рассуждая так же, как и при выводе коэффициентов Q_i, нетрудно получить коэффициенты для второго и третьего годов соответственно:

$$k_{ij2} = 1 - \delta + (1-\delta)\frac{\Pi_{ij1}^{\text{агро}}}{\Pi_{ij2}^{\text{агро}}} + \frac{\alpha_{ij}\,\text{УК}_{ij} - \text{СВ}_{ij1}^{\text{агро}}}{\Pi_{ij2}^{\text{агро}}};$$

$$k_{ij3} = 1 - \delta + (1-\delta)\frac{\Pi_{ij1}^{\text{агро}} + \Pi_{ij2}^{\text{агро}}}{\Pi_{ij3}^{\text{агро}}} + \frac{\alpha_{ij}\,\text{УК}_{ij} - \text{СВ}_{ij1}^{\text{агро}} - \text{СВ}_{ij2}^{\text{агро}}}{\Pi_{ij3}^{\text{агро}}}.$$

Для апробации полученных выводов были подвергнуты анализу данные за три года деятельности (2009—2011 гг.) ряда компаний, входящих в два объединения — ассоциацию «Агропромстрах» (АПС) и некоммерческую компанию «Национальный союз агростраховщиков» (НСА). Было выявлено, что ввиду сильно отличающихся «качеств» анализируемых лет (2010 г. — засуха, 2009 и 2011 гг. — средние условия) разброс ежегодных значений используемых величин (СВ_{ij}, Π_{ij} и др.) очень велик. Следствием этого стала сильная неустойчивость результатов расчетов вероятностей разорения. Для нейтрализации указанного фактора неустойчивости было предложено рассматривать суммарные премии, выплаты, страховые суммы за **один период** наблюдений, равный трем годам. В этом случае при обработке имеющихся данных справедливы те же формулы, что и для первого года деятельности компаний, а в итоге расчетов определяется вероятность разорения фондов за трехлетний период. В силу более длительного периода деятельности фондов значения вероятностей их разорения будут больше, чем за период в один год.

Ниже приведены результаты расчетов вероятностей разорения ФКВ, рассчитанные как по данным каждого объединения (АПС, НСА), так и по объединенным данным двух фондов (ставка отчислений при расчетах равнялась 5 %):

Фонд АПС	0,1465
Фонд НСА	0,0136
Объединенный фонд	0,089

Обращает на себя внимание значительная вероятность разорения ФКВ, образованного компаниями из объединения АПС. Более тщательный анализ показал, что это объясняется тем, что интересы компаний этого объединения сосредоточены почти исключительно в области агрострахования и, как следствие, средние размеры их уставных капиталов в семь раз меньше уставных капиталов компаний объединения НСА. В этом случае у компаний из НСА имеется больше резервных средств для покрытия своих убытков при наступлении большого количества страховых случаев (как, например, при засухе 2010 г.).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Актуарная математика / Н. Бауэрс, Х. Гербер, Д. Джонс и др. – М.: Янус-К, 2001. – 655 с.
2. Мак Т. Математика рискового страхования. – М.: Олимп – Бизнес, 2005. – 432 с.

Статья поступила в редакцию 28.09.2012