УДК 519.718

Л.Г. Ветров, А.Л. Сунчалина

О КОРРЕЛЯЦИИ МЕЖДУ НАРАБОТКАМИ ИЗДЕЛИЙ, ФУНКЦИОНИРУЮЩИХ В ЦИКЛИЧЕСКИХ РЕЖИМАХ

Найдена верхняя граница коэффициента корреляции для двумерных дискретных моделей, допускающих билинейное разложение по системам ортогональных многочленов. Численными методами показана достижимость верхней границы для ряда конкретных распределений.

E-mail: lvetrov@mail.ru

Ключевые слова: *дискретные распределения, коэффициент корреляции, ортогональные многочлены, регрессия.*

Наработка изделия, функционирующего в циклическом режиме, описывается дискретной целочисленной случайной величиной — числом циклов до отказа изделия. Одним из важнейших вопросов теории форсированных испытаний является вопрос о взаимной зависимости наработок одного и того же изделия в различных режимах функционирования. Естественно предположить, что вид распределения при переходе в новый режим функционирования не меняется, а меняются только параметры распределения. Основной характеристикой, описывающей взаимосвязь наработок изделия в двух режимах, является коэффициент корреляции. Для непрерывных распределений (нормальное, экспоненциальное и др.) при любых значениях параметров коэффициент корреляции может достигать единицы (линейная зависимость между наработками), но для гамма-распределения или для распределения Вейбулла с разными параметрами формы его значение строго меньше единицы. Для случайных величин, принимающих целочисленные значения, коэффициент корреляции всегда меньше единицы, за исключением совпадающих распределений. В связи с этим возникает вопрос о верхней границе для коэффициента корреляции между наработками изделия в различных циклических режимах.

Билинейные разложения и корреляция. Пусть наработки изделия в двух режимах описываются парой дискретных случайных величин (ξ_1, ξ_2), принимающих целые неотрицательные значения с заданными вероятностями

$$\psi_i(k) = P(\xi_i = k), \quad i = 1,2, \quad k = 0,1,2,... \tag{1}$$

Рассмотрим последовательность многочленов $\{g_{i,n}(x), n = 0,1,...\}$, получающуюся из последовательности $\{x^n, \; n = 0,1,...\}$ процессом ортогонализации Гильберта — Шмидта с весовой функцией $\psi_i(k)$, $i=1,2$. Это означает, что $g_{i,n}(x)$ — многочлен степени n, для которого имеют место следующие соотношения:

$$\sum_{k=0}^{\infty} g_{i,n}(k)\, g_{i,m}(k)\, \psi_i(k) = \delta_{n,m} = \begin{cases} 1 & \text{при } n=m; \\ 0 & \text{при } n \neq m; \end{cases} \tag{2}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} k^n\, g_{i,m}(k)\, \psi_i(k) = 0, \quad n = 0,1,\ldots,m-1. \tag{3}$$

В случае, когда маргинальные распределения являются пуассоновскими, ортогональные многочлены носят название многочленов Пуассона — Шарлье [1]. При биномиальном распределении система содержит многочлены степени не выше n и называется системой Кравчука, а при отрицательном биномиальном распределении у системы названия пока нет, но в ряде работ получены формулы для вычисления коэффициентов ортогональных многочленов через параметры распределения [2—5].

Будем считать, что совместная плотность $\psi(k,l) = P(\xi_1 = k, \xi_2 = l)$ допускает билинейное разложение по системе ортогональных многочленов, если

$$\psi(k,l) = \psi_1(k)\psi_2(l)\left[1 + \sum_{r=1}^{\infty} \mu_r\, g_{1,r}(k)\, g_{2,r}(l)\right], \tag{4}$$

где μ_r — некоторая последовательность коэффициентов.

Из равенства (2) непосредственно следует, что

$$\sum_{k=0}^{\infty} \psi(k,l) = \psi_2(l); \qquad \sum_{l=0}^{\infty} \psi(k,l) = \psi_1(k).$$

Таким образом, для того чтобы функция $\psi(k,l)$, заданная соотношением (4), представляла двумерную плотность с маргинальными плотностями $\psi_i(k)$, необходимо и достаточно, чтобы она принимала неотрицательные значения, т. е.

$$\psi(k,l) \geq 0, \quad k,l = 0,1,\ldots \tag{5}$$

Для ряда распределений (нормальное, гамма-, пуассоновское) доказано [1, 6, 7], что для выполнения условия (5) необходимо и достаточно, чтобы последовательность μ_r была решением проблемы моментов, т. е. $\mu_r = \int_a^b t^r d\mu(t)$ для некоторого отрезка $[a,b]$ и некоторой неотрицательной меры $d\mu(t)$ на этом отрезке. Для практических применений представляет особый интерес случай, когда распределение $d\mu(t)$ сосредоточено в одной точке: $d\mu(t)=\delta(\rho)$. В этом случае $\mu_r=\rho^r$ и соотношение (4) задает параметрическое семейство плотностей, причем параметр ρ — коэффициент корреляции между случайными величинами ξ_1 и ξ_2, т. е. параметрическая модель полностью задается параметрами маргинальных распределений и коэффициентом корреляции.

Остановимся более подробно на свойствах двумерных распределений, допускающих билинейное разложение (4) с $\mu_r=\rho^r$. Пусть

$$g_{i,0}(x)\equiv 1,\quad g_{i,1}(x)=a_i x+b_i,\quad g_{i,2}(x)=c_i x^2+d_i x+e_i,$$

где a_i, b_i, c_i, d_i, e_i — коэффициенты ортогональных многочленов первой и второй степени.

Тогда

$$x=\frac{1}{a_i}g_{i,1}(x)-\frac{b_i}{a_i}g_{i,0}(x);$$

$$x^2=\frac{1}{c_i}g_{i,2}(x)-\frac{d_i}{a_i c_i}g_{i,1}(x)+\frac{b_i d_i-a_i e_i}{a_i c_i}g_{i,0}(x).$$

Для условного математического ожидания $\mathrm{M}\left(\xi_2 \middle| \xi_1=x\right)$ получаем

$$\mathrm{M}(\xi_2|\xi_1=x)=\sum_{k=0}^{\infty}k\frac{\psi(x,k)}{\psi_1(x)}=$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\left\{\left[\frac{1}{a_2}g_{2,1}(k)-\frac{b_2}{a_2}g_{2,0}(k)\right]\psi_2(k)\sum_{r=0}^{\infty}\rho^k g_{1,r}(x)g_{2,r}(k)\right\}.$$

Далее, меняя порядок суммирования и используя соотношение (2), получаем

$$\mathrm{M}(\xi_2|\xi_1=x)=\rho\frac{g_{1,1}(x)}{a_2}-\frac{b_2}{a_2}g_{1,0}(x)=\rho\frac{a_1}{a_2}x+\rho\frac{b_1}{a_2}-\frac{b_2}{a_2}. \qquad (6)$$

Таким образом, регрессия одной координаты на вторую является линейной. В качестве следствия из соотношения (6) получаем необходимое условие для выполнения условия (5).

Утверждение 1. Для того чтобы функция $\psi(k,l)$, заданная соотношением (4) с $\mu_r=\rho^r$, представляла двумерную плотность распределения, необходимо выполнение условия

$$0 \le \rho \le \min\left\{\frac{b_1}{b_2}, \frac{b_2}{b_1}\right\}. \tag{7}$$

Для доказательства этого утверждения достаточно потребовать выполнение неравенств $\mathrm{M}\left(\xi_2 \middle| \xi_1 = x\right) \ge 0$ и $\mathrm{M}\left(\xi_1 \middle| \xi_2 = x\right) \ge 0$ при $x = 0$ и при $x \to \infty$. Несложные вычисления позволяют получить значения границ для коэффициента корреляции у основных дискретных моделей с неограниченной областью значений. При этом для таких моделей коэффициент корреляции не может принимать отрицательные значения. Для биномиальной модели двойные неравенства $0 \le \mathrm{M}\left(\xi_2 \middle| \xi_1 = x\right) \le n$ и $0 \le \mathrm{M}\left(\xi_1 \middle| \xi_2 = x\right) \le n$ позволяют определить выражения как для верхней, так и для нижней границы коэффициента корреляции. Результаты для основных моделей дискретных распределений представлены в табл. 1.

Таблица 1

Границы для коэффициента корреляции

Распределение	$\psi_i(k)$	$g_{i,1}(x) = a_i x + b_i$	Границы для ρ
Пуассоновское	$\dfrac{\lambda_i^k e^{-\lambda_i}}{k!}$, $k = 0,1,\ldots$	$\dfrac{x}{\sqrt{\lambda_i}} - \sqrt{\lambda_i}$	$\left[0, \min\left(\sqrt{\dfrac{\lambda_1}{\lambda_2}}, \sqrt{\dfrac{\lambda_2}{\lambda_1}}\right)\right]$
Геометрическое	$p_i q_i^k$, $k = 0,1,\ldots$	$\dfrac{p_i}{\sqrt{q_i}} x - \sqrt{q_i}$	$\left[0, \min\left(\sqrt{\dfrac{q_2}{q_1}}, \sqrt{\dfrac{q_1}{q_2}}\right)\right]$
Отрицательное биномиальное	$(-1)^k \dbinom{-r}{k} q_i^k p_i^r$, $k = 0,1,\ldots$	$\dfrac{p_i}{\sqrt{r q_i}} x - \sqrt{r q_i}$	$\left[0, \min\left(\sqrt{\dfrac{q_2}{q_1}}, \sqrt{\dfrac{q_1}{q_2}}\right)\right]$
Биномиальное	$\dbinom{n}{k} p_i^k q_i^{n-k}$, $k = 0,1,\ldots,n$	$\dfrac{x}{\sqrt{n p_i q_i}} - \sqrt{\dfrac{n p_i}{q_i}}$	$\left[\max\left(\delta_1, \delta_1^{-1}\right), \min\left(\delta_2, \delta_2^{-1}\right)\right]$, где $\delta_1 = -\sqrt{\dfrac{p_1 p_2}{q_1 q_2}}$; $\delta_2 = \sqrt{\dfrac{p_1 q_2}{p_2 q_1}}$

Для биномиального распределения при фиксированном значении q_1 и различных значениях q_2 численными методами были рассчитаны максимальное и минимальное значения параметра ρ, при которых выполняется соотношение

$$\psi(k,l)=\psi_1(k)\psi_2(l)\left[1+\sum_{r=1}^{n}\rho^r g_{1,r}(k)g_{2,r}(l)\right]>0,\quad k,l=0,1,...,n. \quad (8)$$

На рис. 1 представлены зависимости максимального и минимального достижимых значений параметра ρ и границ, задаваемых соотношениями

$$\rho=\min\left(\sqrt{\frac{p_1q_2}{p_2q_1}},\sqrt{\frac{p_2q_1}{p_2q_2}}\right)+0,01;\quad \rho=\max\left(-\sqrt{\frac{p_1p_2}{q_1q_2}},-\sqrt{\frac{q_1q_2}{p_2p_2}}\right)+0,01,$$

от параметра q_2. Константа 0,01 добавлена для того, чтобы кривые были различимы визуально, в противном случае графики сливаются в один.

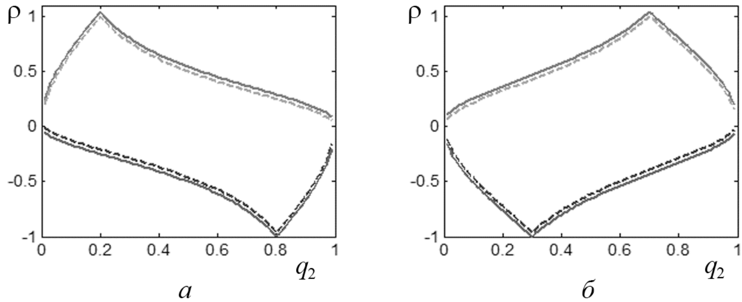
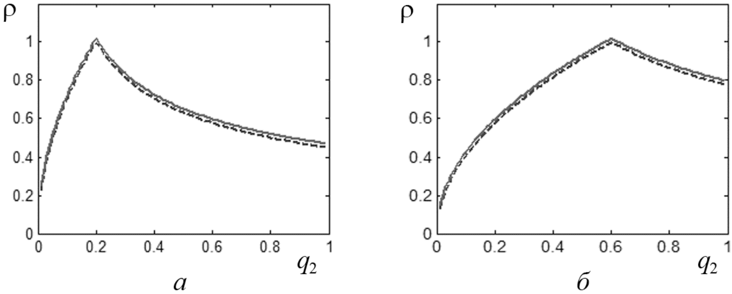


Рис. 1. Зависимость $\rho(q_2)$ для биномиального распределения с параметрами n = 8, q_1 = 0,2 (*а*) и n = 12, q_1 = 0,7 (*б*)

Для геометрического распределения проверить неравенство $\psi(k,l)>0$ при всех неотрицательных k и l численными методами невозможно, поэтому рассчитывали максимальное значение параметра ρ, при котором функция $\psi(k,l)$ принимает неотрицательные значения в области

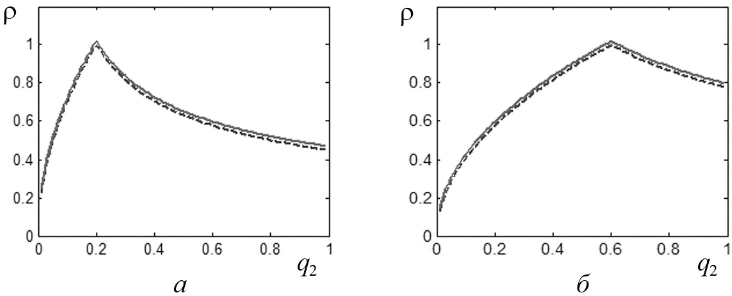
$$D_m=\left\{(k,l)\colon 0\le k\le m,\ 0\le l\le m,\ P(\xi_1\le m,\ \xi_2\le m)=\sum_{k=0}^{m}\sum_{l=0}^{m}\psi(k,l)\ge 0,995\right\}.$$

На рис. 2 приведены графики зависимости от q_2 для максимального достижимого коэффициента корреляции ρ и границы, задаваемые необходимым условием $\rho=\min\left(\sqrt{q_2/q_1},\sqrt{q_1/q_2}\right)$ для двух различных значений q_1. Аналогичные результаты численных расчетов для отрицательного биномиального распределения представлены на рис. 3.



а *б*

Рис. 2. Зависимость $\rho(q_2)$ для геометрического распределения с параметрами $q_1 = 0{,}2$ (*а*) и 0,6 (*б*)



а *б*

Рис. 3. Зависимость $\rho(q_2)$ для отрицательного биномиального распределения с параметрами $r = 2$, $q_1 = 0{,}8$ (*а*) и $r = 4$, $q_1 = 0{,}99$ (*б*)

Результаты численных расчетов показывают, что верхняя граница для коэффициента корреляции ρ, приведенная в *утверждении 1*, является достижимой, т. е. условие (7) не только необходимо, но и достаточно для того, чтобы функция, задаваемая соотношением (8), была плотностью двумерного распределения.

Регрессия и условная дисперсия. Все модели дискретных двумерных распределений, допускающих билинейное разложение по системе ортогональных многочленов, обладают общим свойством: *регрессия одной координаты на вторую является линейной, а условная дисперсия представляет собой многочлен не выше второй степени.*

Утверждение 2. Если совместная плотность случайных величин ξ_1 и ξ_2 задается соотношением (4) с $\mu_r = \rho^r$, то для условных характеристик $\mathrm{M}(\xi_2 | \xi_1 = x)$ и $D(\xi_2 | \xi_1 = x)$ имеет место следующее представление:

$$\mathrm{M}(\xi_2 | \xi_1 = x) = \rho \frac{a_1}{a_2} x + \rho \frac{b_1}{a_2} - \frac{b_2}{a_2};$$

$$D(\xi_2|\xi_1=x)=\rho^2x^2\left(\frac{c_1}{c_2}-\frac{a_1^2}{a_2^2}\right)+\rho x\left[\frac{\rho d_1}{c_2}-\frac{a_1 d_2}{a_2c_2}-2\frac{a_1(\rho b_1-b_2)}{a_2^2}\right]+$$

$$+\frac{\rho^2 e_1}{c_2}+\frac{d_2(b_2-\rho b_1)}{a_2c_2}-\left(\frac{b_2-\rho b_1}{a_2}\right)^2-\frac{e_2}{c_2}.$$

Известно, что для двумерного нормального распределения условная дисперсия является константой. Для других распределений достаточно выписать первые два ортогональных многочлена и подставить их коэффициенты в формулы, полученные для условных характеристик.

В табл. 2 приведены формулы, задающие регрессию $\mathrm{M}(\xi_2|\xi_1=x)$ для дискретных моделей, рассматриваемых в данной работе. Выражения для условной дисперсии $D(\xi_2|\xi_1=x)$ достаточно громоздкие, поэтому здесь не приводятся. Однако следует отметить одно важное свойство: для всех рассматриваемых распределений имеет место равенство $c_1a_2^2=c_2a_1^2$, т. е. *условная дисперсия является многочленом не выше первой степени.*

Таблица 2

Соотношения, описывающие регрессию для различных распределений

Распределение	$g_{i,2}(x)=c_ix^2+d_ix+e_i$	$M(\xi_2\|\xi_1=x)$
Пуассоновское	$\frac{1}{\lambda_i\sqrt{2}}x^2-\frac{2\lambda_i-1}{\lambda_i\sqrt{2}}x+\frac{\lambda_i}{\sqrt{2}}$	$\rho\sqrt{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}x+\sqrt{\lambda_2}\left(\sqrt{\lambda_1}-\rho\sqrt{\lambda_2}\right)$
Геометрическое	$\frac{p_i^2}{2q_i}x^2-\frac{p_i(3q_i+1)}{2q_i}x+q_i$	$\frac{p_1\sqrt{q_2}}{p_2\sqrt{q_1}}\rho x+\frac{\sqrt{q_2}\left(\sqrt{q_2}-\rho\sqrt{q_1}\right)}{p_2}$
Отрицательное биномиальное	$\frac{1}{q_i\sqrt{2r(r+1)}}\{p_i^2x^2+$ $+p_i[1+(2r+1)q_i]x+$ $+q_i^2r(r+1)\}$	$\frac{p_1\sqrt{q_2}}{p_2\sqrt{q_1}}\rho x+\frac{\sqrt{q_2}\left(\sqrt{q_2}-\rho\sqrt{q_1}\right)r}{p_2}$
Биномиальное	$\frac{1}{p_iq_i\sqrt{2n(n-1)}}\{x^2+$ $+[2p_i(1-n)-1]x+$ $+n(n-1)p_i\}$	$\rho\sqrt{\frac{p_2q_2}{p_1q_1}}x+n\sqrt{p_2q_2}\left(\sqrt{\frac{p_2}{q_2}}-\rho\sqrt{\frac{p_1}{q_1}}\right)$

Указанное свойство не выполняется, например, для отрицательного биномиального распределения, если маргинальные распределения имеют различающиеся значения параметра r.

В заключение стоит отметить, что максимальное значение коэффициента корреляции в модели, допускающей билинейное разложение по системе ортогональных многочленов (4), не дает абсолютное максимальное значение коэффициента корреляции при заданных маргинальных распределениях.

Для примера рассмотрим модель биномиального распределения с $n = 2$, $p_1 = 0{,}25$, $p_2 = 0{,}75$. Тогда максимальное значение коэффициента корреляции в рамках модели, допускающей билинейное разложение по ортогональным многочленам, равно $\rho = 1/3$. Закон распределения при $\rho = 1/3$ определяется набором вероятностей:

$$\psi(0,0) = 0{,}0625;\ \psi(0,1) = 0{,}25;\ \psi(0,2) = 0{,}25;$$
$$\psi(1,0) = 0;\ \psi(1,1) = 0{,}125;\ \psi(1,2) = 0{,}25;$$
$$\psi(2,0) = 0;\ \psi(2,1) = 0;\ \psi(2,2) = 0{,}0625.$$

Однако решение задачи поиска максимального значения коэффициента корреляции при заданных одномерных распределениях (задача линейного программирования) дает другое распределение:

$$\psi(0,0) = 0{,}0625;\ \psi(0,1) = 0{,}375;\ \psi(0,2) = 0{,}125;$$
$$\psi(1,0) = 0;\ \psi(1,1) = 0;\ \psi(1,2) = 0{,}375;$$
$$\psi(2,0) = 0;\ \psi(2,1) = 0;\ \psi(2,2) = 0{,}0625,$$

для которого $\rho = 2/3$. Следует отметить, что для этого распределения модель регрессии будет нелинейной. Остается открытым вопрос: не будет ли граница для коэффициента корреляции вида (7) являться максимальной для любого распределения с линейной регрессией одной координаты относительно другой.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Meixner J. Erzeugende Funktionen der Charlierschen Polinome. – 1938. – Math. – Z. 44. – P. 531–535.
2. Хохлов В.И. Многочлены, ортогональные относительно геометрического распределения // Обозрение прикладной и промышленной математики. – 2003. – Т. 10. – Вып. 2. – С. 520.
3. Хохлов В.И. Многочлены, ортогональные относительно отрицательного биномиального распределения // Обозрение прикладной и промышленной математики. – 2003. – Т. 11. – Вып. 3. – С. 487–492.

4. Asai N., Kubo I., Kuo H. Multiplicative renormalization and generating functions I // Taiwanese Journal of Mathematics. – 2003. – No 1. – P. 89–102.
5. Asai N., Kubo I., Kuo H. Multiplicative renormalization and generating functions II // Taiwanese Journal of Mathematics. – 2004. – No 4. – P. 593–628.
6. Сарманов О.В., Братоева З.Н. Вероятностные свойства билинейных разложений по полиномам Эрмита // Теория вероятностей и ее применения. – 1967. – № 12. – С. 520–531.
7. Griffiths R.C. The canonical correlation coefficients of bivariate gamma distribution // The Annals of Mathematical Statistics. – 1969. – V. 40. – P. 1401–1408.

Статья поступила в редакцию 28.09.2012