

Н.И. Сидняев

ЧИСЛЕННАЯ МЕТОДИКА РАСЧЕТА ОБТЕКАНИЯ КОМЕТНЫХ ТЕЛ В УСЛОВИЯХ РАЗРУШЕНИЯ ПОВЕРХНОСТИ

Изложены аспекты взаимодействия влетающих с гиперзвуковой скоростью кометных тел с атмосферой планеты. Предложен численный алгоритм и приведены результаты исследований обтекания сферических метеорных тел в условиях разрушения. Определены важнейшие газодинамические параметры в ударном слое.

E-mail: Sidn_ni@mail.ru

Ключевые слова: Гиперзвук, атмосфера, ударная волна, прогонка, метеориты, ударный слой, разносная схема, граничные условия.

Изучением метеорных явлений занимаются исследователи весьма широкого круга специальностей: астрономы; специалисты по гиперзвуковой аэродинамике, тепло- и массообмену, молекулярной физике, радиофизике, спектроскопии, плазме, геологии и др. Понимание процессов взаимодействия крупных космических тел с атмосферами планет тесно связано с теорией образования кратеров на планете и важно для правильной интерпретации различных наблюдений в атмосфере.

Известно, что $2/3$ массы кометного ядра приходится на долю водяного и «сухого» льда (снега), состоящего из оксида и диоксида углерода, а также еще более летучих веществ, и $1/3$ — на нелетучие соединения. Таким образом, ядра комет представляют собой очень «грязный» лед или снег. Однако остается неясно, в каком виде нелетучие вещества примешаны к льдам. Испарение летучих веществ становится заметным, когда кометное ядро приближается к Солнцу на расстояние $4...5$ а. е. и поверхность ядра нагревается до температур, при которых начинается испарение наиболее летучих веществ. Выделяющиеся газы, увлекая за собой каменные и ледяные пылинки, образуют вокруг ядра туманную оболочку — атмосферу кометы, часто называемую ее головой. Ледяные пылинки быстро испаряются, а каменные, напротив, могут расти. В ближайших окрестностях ядра из паров в результате конденсации молекул нелетучих веществ, по-видимому, могут образовываться и новые, очень мелкие каменные частицы. Голова кометы имеет своеобразную невидимую корону — огромную водородную оболочку (из атомарного водорода). Расширяясь в космический вакуум, атмосфера кометы, не удерживаемая уже слабыми силами тяготения ядра, непрерывно рассеивается в межпланетном пространстве и существует лишь вблизи Солнца до тех пор, пока газы, а вместе с ними и пыль выделяются из ядра (рис. 1).

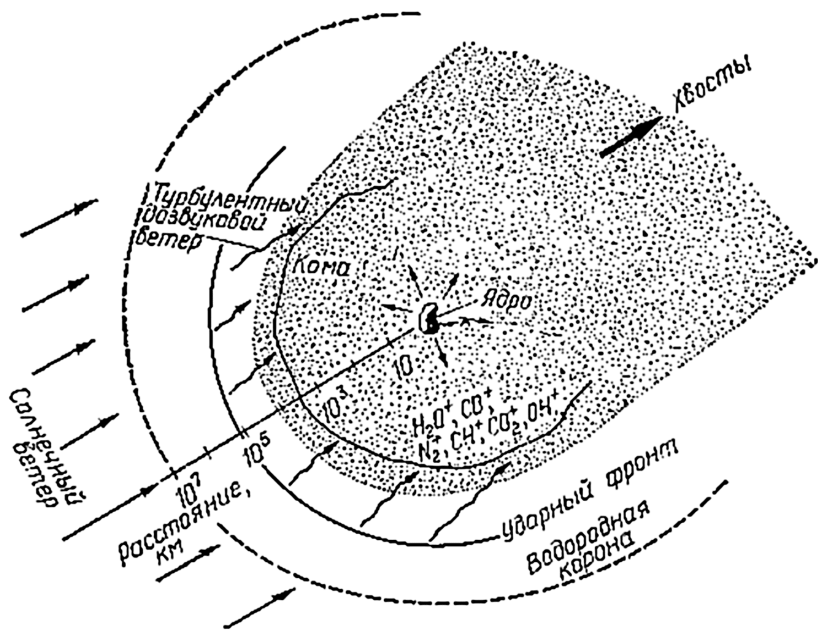


Рис. 1. Модель головы кометы

Теоретическое рассмотрение процесса обтекания комет солнечным ветром привело к заключению, что в голове кометы на обращенной к Солнцу стороне на расстоянии около 100 тыс. км от ядра должна находиться поверхность, отделяющая плазму кометы от плазмы солнечного ветра. На расстоянии около 1 млн км от ядра находится ударная волна, отделяющая область сверхзвукового течения солнечного ветра (40 км/с) от прилегающей к голове кометы области дозвукового турбулентного течения (50 км/с). Молекулы, входящие в состав ядра, несомненно, весьма разнообразны. На основании космогонических соображений и исследований свечения комет можно предположить, что среди них могут быть как простые молекулы типа H_2O , CO , N_2 , C_2 , CH и CN , так и сложные типа HCN и CH_3CN . Многие из них практически не дают излучения в видимой области спектра. Часть молекул удаляется от ядра кометы и теряется в межпланетном пространстве, так и не проявив себя, другая часть, будучи уже в атмосфере, распадается под действием солнечного света (фотодиссоциация) на обломки, излучение которых приходится на видимый участок спектра. Поэтому по интенсивности спектральных линий не так просто судить о действительном соотношении разных молекул в ядре и в атмосфере кометы.

Наблюдения в ультрафиолетовом и инфракрасном участках спектра, а также в радиодиапазоне облегчают решение этой задачи и позволяют обнаруживать все новые молекулы и атомы. Если на больших

гелиоцентрических расстояниях активность кометы связана с сублимацией наиболее летучих льдов, то уже на расстояниях менее 2...2,5 а. е. она определяется в основном сублимацией водяного льда. На расстоянии 1 а. е. скорость сублимации водяного компонента достигает 1 018 молекул в секунду на один квадратный сантиметр, и у комет с перигелиями у земной орбиты за одно прохождение теряется наружный слой толщиной несколько метров, а у весьма редких комет, пролетающих через солнечную корону (их называют «царапающими» Солнце), — слой толщиной несколько сот метров. В связи с этим кометы, движущиеся по короткопериодическим орбитам, сравнительно быстро растрачивают свое ядро. С уменьшением же ядра связано (по крайней мере частично) постепенное уменьшение активности таких комет.

У комет, приближающихся к Солнцу на расстояния $\leq 0,7$ а. е., в видимой части спектра появляются линии Na, который начинает испаряться при более высоких температурах и иногда образует тонкий самостоятельный хвост. В редких случаях, у «царапающих» Солнце комет, происходит сублимация каменистых пылинок и наблюдаются линии, принадлежащие нейтральным атомам нелетучих веществ (Na, K, Ca, V, Mn, Fe, Co, Ni, Cu). Излучение ионов обнаруживается лишь на некотором расстоянии от ядра. Например, излучение ионов C^+ , CN^+ , N_2^+ появляется только на расстоянии около 1 000 км от ядра (на такое расстояние успевают удалиться от ядра испаряющиеся молекулы, прежде чем произойдет их ионизация). В хвостах же, как и следует ожидать, наблюдаются ионизованные молекулы CO^+ , CH^+ , CO_2^+ , OH^+ и H_2O^+ .

Насколько неэффективно излучение пыли, можно понять на следующем примере. Пытались определить общую массу вещества, свещающегося в голове кометы Галлея. Поскольку относительное содержание пыли не было известно, вычисления проводили при двух предположениях: излучение создает газ и излучение создает пыль. Это дало две крайние оценки массы. В первом случае свечение могло быть обеспечено ничтожным количеством вещества общей массой всего 100 т, для испарения которого было достаточно ~ 100 м³ льдов, во втором — требовалось около 1 млн т пыли.

Разные кометы выглядят по-разному, и особенно они отличаются интенсивностями излучения одних и тех же атомов и молекул, а также размерами частиц газа и пыли. Это указывает на значительные различия в составе кометных ядер. По всей видимости, ядра состоят из льдистых глыб разного состава, т. е. имеют макробрекчиевую структуру, и изменение состава испаряющихся льдов приводит к изменению интенсивности испарения, появлению так называемых излияний, струй, вспышек и пульсаций блеска. Яркая звездоподобная

конденсация, часто наблюдаемая в центральной части головы кометы и обычно принимаемая за ядро, в действительности является более плотной центральной частью кометной атмосферы, прилегающей к истинному ядру, и тогда остальную часть атмосферы называют комой. Если происходит деление ядра на несколько частей, то в момент деления обнажаются новые участки поверхности и блеск кометы резко возрастает. Под действием реактивных сил, сообщаемых истекающими парами обломкам, они медленно расходятся и, окруженные каждый своей атмосферой, через некоторое время становятся отдельными светящимися сгустками внутри пока еще общей комы.

В таблице приведены характерные скорости для планет и диапазоны скоростей входа космических тел в атмосферы планет.

Орбитальная $V_{орб}$, первая V_I и вторая V_{II} космические скорости, а также диапазон $V_{II}—V_{max}$ скоростей входа комет в атмосферы планет, км/с

Планета	$V_{орб}$	V_I	V_{II}	$V_{II}—V_{max}$	h^* , км
Венера	35,00	7,25	10,25	10,25—84,5	6,2
Земля	6,2	7,91	11,19	11,19—72,8	6,7
Марс	24,22	3,57	5,09	5,19—58,2	28
Юпитер	13,07	42,2	60,2	60,2—68	18
Сатурн	9,65	25,1	36,2	36,2—42,8	6,7

* Глубина взаимодействия метеороида с атмосферой планеты.

Баллистика метеороида существенно зависит от свойств (в первую очередь от плотности) атмосферы планеты, поскольку его торможение можно рассматривать как растянутый во времени удар тела об атмосферу. Изменение температуры атмосферы Земли по высоте обычно не превосходит 50...60 К (до ~ 100 км), что близко к температурным колебаниям у земной поверхности. Поэтому в первом приближении, вполне достаточном для многих целей метеорной астрономии, можно принять атмосферу Земли (как и других планет) изотермической.

Постановка задачи. Рассмотрим идеализированную задачу баллистики о входе с большой скоростью абсолютно твердого (недеформируемого) адиабатического (теплоизолированного) тела, которое не чувствительно к последствиям перегрузки (торможению) и не подвержено аэродинамическому нагреву, плавлению, испарению, термонапряжениям, термомеханической эрозии и т.п., т. е. сохраняет в процессе движения сквозь атмосферу свою массу и температуру далекого космоса, равную равновесной температуре черного тела

$T_0 = 280$ К на расстоянии 1 а.е. (150 млн км) от Солнца. Такое тело будем называть *идеальным метеороидом* (ИМ). Рассмотрение динамики ИМ важно, по крайней мере, с трех точек зрения. Во-первых, баллистика ИМ поддается полному и простому математическому анализу в аналитическом виде. Во-вторых, многие качественные и отчасти количественные выводы теории ИМ остаются верными и при реальном взаимодействии очень мелких ($R_m < 2 \dots 20$ см) и очень крупных ($R_m > 10^3$ см) метеороидов с атмосферой планеты до начала их механического разрушения под действием массовых сил инерции и аэродинамических поверхностных сил. В-третьих, определяемые параметры взаимодействия (максимальное торможение, максимальная потеря кинетической энергии и др.) ИМ будут опорными параметрами для облегчения интерпретации взаимодействия реального метеороида с атмосферой.

При движении тупого тела со сверхзвуковой скоростью перед ним возникает ударная волна и течение между нею и телом будет смешанным (рис. 2), т. е. состоящим из дозвуковой и сверхзвуковой областей, разделенных звуковой поверхностью [1].

Это обстоятельство является основным при решении стационарной задачи обтекания, которая математически формулируется как краевая задача для системы нелинейных уравнений газовой динамики

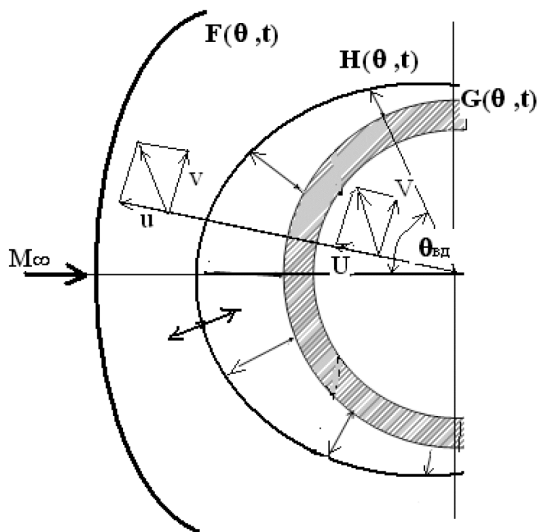


Рис. 2. Схема гиперзвукового обтекания физической модели кометы с интенсивным поверхностным массообменом:

F — ударная волна; H — разделяющая линия тока; G — поверхность сферической кометы; (θ, r) — сферическая система координат; U, V, u, v — составляющие вектора скорости W и w соответственно до и после контактной поверхности; $\theta_{вд}$ — угол вектора выноса массы

ки смешанного типа [2—6]. Для численного решения задачи обтекания тупого тела весьма эффективен метод установления, основанный на получении решения стационарной задачи как предельного решения нестационарных уравнений. Задача нестационарного обтекания математически более проста, поскольку уравнения нестационарного течения всегда сохраняют гиперболический тип и необходимость в разделении течения на дозвуковую и сверхзвуковую области отпадает. В этом заключается одно из основных преимуществ метода установления. Точных аналитических решений задачи смешанного обтекания тупого тела не существует ни в двумерном, ни в трехмерном случае [6]. Поэтому единственным путем получения значений газодинамических функций во всем поле течения с заданной точностью является применение численных методов и использование быстродействующих вычислительных машин. Существующий уровень развития конечно-разностных методов решения уравнений в частных производных при условии использования современных вычислительных средств и специальных программ обработки результатов расчетов обеспечивает возможность детального изучения структуры смешанных течений.

Математическая формулировка задачи. Массообменные эффекты при обтекании объекта (рис. 2) носят весьма сложный характер и зависят не только от интенсивности его разрушения, но и от распределения по поверхности тела. Для теоретического исследования обтекания используют различные методы решения систем уравнений газовой динамики как с учетом вязкости газа, так и в рамках теории идеальной жидкости [5, 6]. Предложенный в работе вычислительный алгоритм состоит из двух этапов: построение разностной схемы для математической модели, т. е. аппроксимация исходной системы дифференциальных уравнений системой разностных (алгебраических) уравнений, и определение эффективного метода решения этих разностных уравнений. Построение разностной схемы можно рассматривать как замену непрерывной среды, описываемой дифференциальными уравнениями, некоторым дискретным ее аналогом, эволюция которого происходит по законам, выражаемым разностными уравнениями [2—4].

Гиперзвуковое обтекание кометы характеризуется наличием поперечного потока, разрушаемого с боковой поверхности и направленного по нормали при больших числах Рейнольдса и отсутствии объемных сил. Пусть набегающий поток однороден и характеризуется скоростью u_∞ , плотностью ρ_∞ , давлением p_∞ , температурой T_∞ , энтальпией h_∞ , вязкостью μ_∞ ; теплоемкости c_p и c_v при постоянном давлении и объеме, а также их отношение $\gamma = c_p / c_v$ будем считать в дан-

ном потоке постоянным. Тогда система уравнений газовой динамики для этого потока будет иметь вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{1}{x} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} - \frac{v^2}{x} &= 0; \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{1}{x} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \frac{1}{x} \frac{\partial \rho}{\partial y} - \frac{uv}{x} &= 0; \\ \frac{\partial p}{\partial t} + u \frac{\partial p}{\partial x} + v \frac{1}{x} \frac{\partial p}{\partial y} + \gamma p \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{x} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{2u}{x} + \frac{v \operatorname{ctg} y}{x} \right) &= 0; \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + v \frac{1}{x} \frac{\partial \rho}{\partial y} + \rho \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{x} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{2u}{x} + \frac{v \operatorname{ctg} y}{x} \right) &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

или в матричном виде

$$\frac{\partial X}{\partial t} + U \frac{\partial X}{\partial x} + W \frac{\partial X}{\partial y} + \Gamma = 0, \quad (2)$$

где $X = \begin{bmatrix} u \\ v \\ p \\ \rho \end{bmatrix}$; $U = \begin{bmatrix} u & 0 & \rho^{-1} & 0 \\ 0 & u & 0 & 0 \\ \gamma p & 0 & u & 0 \\ \rho & 0 & 0 & u \end{bmatrix}$; $W = \frac{1}{H_2} \begin{bmatrix} v & 0 & 0 & 0 \\ 0 & v & \rho^{-1} & 0 \\ 0 & \gamma p & v & 0 \\ 0 & \rho & 0 & v \end{bmatrix}$;

$$\Gamma = \frac{1}{x} \begin{bmatrix} -v^2 \\ uv \\ \gamma p(2u + v \operatorname{ctg} y) \\ \rho(2u + v \operatorname{ctg} y) \end{bmatrix}; \quad H_1 = 1, \quad H_2 = x \text{ — коэффициенты Ламе.}$$

Преобразовав координаты (для стационарного и нестационарного случаев):

$$\xi = \frac{x - G(y, t)}{F(y, t) - G(y, t)}; \quad \frac{d\xi}{dt} = \xi_t = - \frac{\frac{\partial G}{\partial t} + \xi \left(\frac{\partial F}{\partial t} - \frac{\partial G}{\partial t} \right)}{F(y, t) - G(y, t)}; \quad (3)$$

$$\frac{d\xi}{dx} = \xi_x = \frac{1}{F(y, t) - G(y, t)}; \quad \frac{d\xi}{dy} = \xi_y = - \frac{\frac{\partial G}{\partial t} + \xi \left(\frac{\partial F}{\partial t} - \frac{\partial G}{\partial t} \right)}{F(y, t) - G(y, t)}, \quad (4)$$

получим

$$\frac{\partial X}{\partial t} + A \frac{\partial X}{\partial \xi} + B \frac{\partial X}{\partial y} + \Gamma = 0. \quad (5)$$

Здесь $A = E\xi_t + D\xi_x + C\xi_y$; $B = W$;

$$A = \begin{bmatrix} \xi_t + \xi_x u + H^{-1} \xi_y v & 0 & \xi_y \rho^{-1} & 0 \\ 0 & \xi_t + \xi_x u + H^{-1} \xi_y v & H^{-1} \xi_y \rho^{-1} & 0 \\ \xi_x \gamma p & H^{-1} \xi_y \gamma p & \xi_t + \xi_x u + H^{-1} \xi_y v & 0 \\ \xi_x \rho & H^{-1} \xi_y \rho & 0 & \xi_t + \xi_x u + H^{-1} \xi_y v \end{bmatrix};$$

$$B = \frac{1}{H_2} \begin{bmatrix} v & 0 & 0 & 0 \\ 0 & v & \rho^{-1} & 0 \\ 0 & \gamma p & v & 0 \\ 0 & 0 & 0 & v \end{bmatrix}; F, D, C — матрицы преобразований.$$

Разностная схема. Применяя последовательно формулы (3)—(5) для аппроксимации производных разностными отношениями, запишем уравнение (2) в следующей равносильной форме:

$$\begin{aligned} & (S + I) \left\{ X_{m,l}^{n+(q+1)} - \left[I + \frac{\sigma \chi_2}{4} (T - 2I + T^{-1}) \right] T_{m,l}^n \right\} + \\ & + 2\chi_1 A_{m+\frac{1}{2},l}^{n+\left(\frac{q}{2}\right)} (S - I) (\alpha X_{m,l}^{n+(q+1)} + \beta X_{m,l}^n) + \\ & + \frac{\chi_2}{2} B_{m+\frac{1}{2},l}^{n+\left(\frac{q}{2}\right)} (S + I) (T - T^{-1}) (\alpha X_{m,l}^{n+(q+1)} + \beta X_{m,l}^n) + 2\tau \Gamma_{m+\frac{1}{2},l}^{n+\left(\frac{q}{2}\right)} = 0; \quad (6) \\ & \left(E + 2\alpha \chi_1 A_{m+\frac{1}{2},l}^{n+\left(\frac{q}{2}\right)} \right) X_{m+1,l}^{n+(q+1)} + \left(E - 2\alpha \chi_1 A_{m+\frac{1}{2},l}^{n+\left(\frac{q}{2}\right)} \right) X_{m,l}^{n+(q+1)} = \\ & = \left(E - 2\beta \chi_1 A_{m+\frac{1}{2},l}^{n+\left(\frac{q}{2}\right)} \right) X_{m+1,l}^n + \left(E + 2\beta \chi_1 A_{m+\frac{1}{2},l}^{n+\left(\frac{q}{2}\right)} \right) X_{m,l}^n + \\ & + \left(\frac{\sigma \chi_2}{4} E - \frac{\beta \chi_2}{2} B_{m+\frac{1}{2},l}^{n+\left(\frac{q}{2}\right)} \right) (X_{m+1,l+1}^n + X_{m,l+1}^n) + \\ & + \left(\frac{\sigma \chi_2}{4} E + \frac{\beta \chi_2}{2} B_{m+\frac{1}{2},l}^{n+\left(\frac{q}{2}\right)} \right) (X_{m+1,l-1}^n + X_{m,l-1}^n) - \frac{\sigma \chi_2}{2} (X_{m+1,l}^n + X_{m,l}^n) + \\ & + \frac{\alpha \chi_2}{2} B_{m+\frac{1}{2},l}^{n+\left(\frac{q}{2}\right)} \left[- (X_{m+1,l+1}^{n+(q)} + X_{m,l+1}^{n+(q)}) + (X_{m+1,l-1}^{n+(q)} + X_{m,l-1}^{n+(q)}) \right] - 2\tau \Gamma_{m+\frac{1}{2},l}^{n+\left(\frac{q}{2}\right)}. \quad (7) \end{aligned}$$

Пусть

$$Sf_{m,l}^n = f_{m+1,l}^n; \quad T_{m,l}^n = T_{m,l+1}^n;$$

$$\Delta t = \tau; \quad \Delta \xi = h_1 = \frac{1}{\mu}; \quad \Delta y = h_2 = \frac{Y}{L};$$

$$t^n = n\tau; \quad \xi_m = mh_1; \quad y_1 = lL_2; \quad f(\xi_m, y_1, t^n) = f_{m,l}^n;$$

$$\alpha > 0; \quad \beta > 0; \quad \sigma > 0.$$

При $y = Lh_1$ (крайний луч) алгоритм разностной схемы имеет вид

$$(S + I)(X_{m,L}^{n+(q+1)} - X_{m,L}^n) + 2\chi_1 A_{m+\frac{1}{2},L}^{n+\frac{(q)}{2}} (S - I)(\alpha X_{m,L}^{n+(q+1)} - \beta X_{m,L}^n) + \chi_2 B_{m+\frac{1}{2},L}^{n+\frac{(q)}{2}} (S + I)(I - T^{-1})(\bar{\alpha} X_{m,L}^{n+(q+1)} + \bar{\beta} X_{m,L}^n) + 2\tau \Gamma_{m+\frac{1}{2}}^{n+\frac{(q)}{2}} = 0; \quad (8)$$

$$\begin{aligned} & \left(E + 2\alpha\chi_1 A_{m+\frac{1}{2},L}^{n+\frac{(q)}{2}} \right) X_{m+1,L}^{n+(q+1)} + \left(E - 2\alpha\chi_1 A_{m+\frac{1}{2},L}^{n+\frac{(q)}{2}} \right) X_{m,L}^{n+(q+1)} = \\ & = \left(E + 2\beta\chi_1 A_{m+\frac{1}{2},L}^{n+\frac{(q)}{2}} \right) X_{m+1,L}^{n+(q+1)} + \left(E - 2\beta\chi_1 A_{m+\frac{1}{2},L}^{n+\frac{(q)}{2}} \right) X_{m,L}^{n+(q+1)} - \bar{\beta}\chi_2 B_{m+\frac{1}{2},L}^{n+\frac{(q)}{2}} \times \\ & \times (X_{m+1,L}^n + X_{m,L}^n) + \bar{\beta}\chi_2 B_{m+\frac{1}{2},L}^{n+\frac{(q)}{2}} (X_{m+1,L-1}^n + X_{m,L-1}^n) + \alpha\chi_2 B_{m+\frac{1}{2},L}^{n+\frac{(q)}{2}} \times \\ & \times \left[- (X_{m+1,L}^{n+(q)} + X_{m,L}^{n+(q)}) + (X_{m+1,L-1}^{n+(q)} + X_{m,L-1}^{n+(q)}) \right] - 2\tau \Gamma_{m+\frac{1}{2}}^{n+\frac{(q)}{2}}. \quad (9) \end{aligned}$$

Граничные условия на поверхности кометы определяются уравнением

$$\mu_1 u + \mu_2 v + \mu_3 p = g,$$

где

$$\mu_1 = \frac{G}{\sqrt{G^2 + G_y^2}}; \quad \mu_2 = \frac{G_y}{\sqrt{G^2 + G_y^2}}; \quad \mu_3 = 0; \quad g = \frac{GG_t}{\sqrt{G^2 + G_y^2}}.$$

Алгоритм прямой прогонки следующий:

$$(1 + \bar{A})u_1 + \bar{B}p_1 + (1 - \bar{A})u - \bar{B}p = f_1; \quad (10)$$

$$(1 + \bar{A})v_1 + \bar{C}p_1 + (1 - \bar{A})v - \bar{C}p = f_2; \quad (11)$$

$$\bar{D}u_1 + \bar{E}v_1 + (1 + \bar{A})p_1 - \bar{D}u - \bar{E}v + (1 + \bar{A})p = f_3. \quad (12)$$

Здесь

$$\begin{aligned} u_1 = f_{m+1}^{n+q}; \quad u = f_m^{n+q}; \quad A = a_{11} = \xi_t + \xi_x u + H^{-1} \xi_y v = a; \quad \bar{A} = 2\alpha x_1 B; \\ B = a_{13} = \xi_x \beta^{-1}; \quad C = a_{23} = H^{-1} \xi_y \beta^{-1}; \quad D = a_{31} = \xi_x \gamma p; \quad b = H^{-1} v; \\ E = a_{32} = H^{-1} \xi_y \gamma p; \quad b_{23} = H^{-1} \rho^{-1}; \quad F = a_{41} = \xi_x \rho; \quad b_{32} = H^{-1} \gamma p; \\ G = a_{42} = H^{-1} \xi_y \rho; \quad b_{42} = H^{-1} \beta. \end{aligned}$$

Правые части уравнений (10)—(12) определяются соотношениями

$$\begin{aligned} f_1 = \left(1 - \frac{\sigma \chi_2}{2}\right) (\Sigma u)_l^n - 2\beta \chi_1 \left[a (\Delta u)_l^n + a_{13} (\Delta p)_l^n \right] + b \left\{ \frac{\beta \chi_2}{2} \left[(\Sigma u)_{l-1}^n - (\Sigma u)_{l+1}^n \right] + \right. \\ \left. + \frac{\alpha \chi_2}{2} \left[(\Sigma u)_{l-1}^{n+(q)} - (\Sigma u)_{l+1}^{n+(q)} \right] \right\} + \frac{\sigma \chi_2}{4} \left[(\Sigma u)_{l-1}^n - (\Sigma u)_{l+1}^n \right] - 2\tau \gamma_1; \\ f_2 = \left(1 - \frac{\sigma \chi_2}{2}\right) (\Sigma v)_l^n - 2\beta \chi_1 \left[a (\Delta v)_l^n + a_{23} (\Delta p)_l^n \right] + \\ + b \left\{ \frac{\beta \chi_2}{2} \left[(\Sigma v)_{l-1}^n - (\Sigma v)_{l+1}^n \right] + \frac{\alpha \chi_2}{2} \left[(\Sigma v)_{l-1}^{n+(q)} - (\Sigma v)_{l+1}^{n+(q)} \right] \right\} + \\ + b_{23} \left\{ \frac{\beta \chi_2}{2} \left[(\Sigma p)_{l-1}^n - (\Sigma p)_{l+1}^n \right] + \frac{\alpha \chi_2}{2} \left[(\Sigma p)_{l-1}^{n+(q)} - (\Sigma p)_{l+1}^{n+(q)} \right] \right\} + \\ + \frac{\sigma \chi_2}{4} \left[(\Sigma v)_{l-1}^n - (\Sigma v)_{l+1}^n \right] - 2\tau \gamma_2; \\ f_3 = \left(1 - \frac{\sigma \chi_2}{2}\right) (\Sigma p)_l^n - 2\beta \chi_1 \left[a_{31} (\Delta u)_l^n + a_{32} (\Delta v)_l^n + a (\Delta p)_l^n \right] + \\ + b_{32} \left\{ \frac{\beta \chi_2}{2} \left[(\Sigma v)_{l-1}^n - (\Sigma v)_{l+1}^n \right] + \frac{\alpha \chi_2}{2} \left[(\Sigma v)_{l-1}^{n+(q)} - (\Sigma v)_{l+1}^{n+(q)} \right] \right\} + \\ + b \left\{ \frac{\beta \chi_2}{2} \left[(\Sigma p)_{l-1}^n - (\Sigma p)_{l+1}^n \right] + \frac{\alpha \chi_2}{2} \left[(\Sigma p)_{l-1}^{n+(q)} - (\Sigma p)_{l+1}^{n+(q)} \right] \right\} + \\ + \frac{\sigma \chi_2}{4} \left[(\Sigma p)_{l-1}^n - (\Sigma p)_{l+1}^n \right] - 2\tau \gamma_3, \end{aligned}$$

где $(\Sigma u) = u_{n+1} + u_n$; $(\Delta u) = u_{m+1} - u_m$.

На крайнем луче соответственно имеем

$$\begin{aligned}
 f_1 &= (\Sigma u)_L^n - 2\beta\chi_1 \left[a(\Delta u)_L^n + a_{13}(\Delta p)_L^n \right] + \\
 &+ b \left\{ \tilde{\beta}\chi_2 \left[(\Sigma u)_{L-1}^n - (\Sigma u)_L^n \right] + \tilde{\alpha}\chi_2 \left[(\Sigma u)_{L-1}^{n+(q)} - (\Sigma u)_L^{n+(q)} \right] \right\} - 2\tau\gamma_1; \\
 f_2 &= (\Sigma v)_L^n - 2\beta\chi_1 \left[a(\Delta v)_L^n + a_{23}(\Delta p)_L^n \right] + \\
 &+ b \left\{ \tilde{\beta}\chi_2 \left[(\Sigma v)_{L-1}^n - (\Sigma v)_L^n \right] + \tilde{\alpha}\chi_2 \left[(\Sigma v)_{L-1}^{n+(q)} - (\Sigma v)_L^{n+(q)} \right] \right\} + \\
 &+ b_{23} \left\{ \tilde{\beta}\chi_2 \left[(\Sigma p)_{L-1}^n - (\Sigma p)_L^n \right] + \tilde{\alpha}\chi_2 \left[(\Sigma p)_{L-1}^{n+(q)} - (\Sigma p)_L^{n+(q)} \right] \right\} - 2\tau\gamma_2; \\
 f_3 &= (\Sigma p)_L^n - 2\beta\chi_1 \left[a_{31}(\Delta u)_L^n + a_{32}(\Delta v)_L^n + a(\Delta p)_L^n \right] + \\
 &+ b_{32} \left\{ \tilde{\beta}\chi_2 \left[(\Sigma v)_{L-1}^n - (\Sigma v)_L^n \right] + \tilde{\alpha}\chi_2 \left[(\Sigma v)_{L-1}^{n+(q)} - (\Sigma v)_L^{n+(q)} \right] \right\} + \\
 &+ b \left\{ \tilde{\beta}\chi_2 \left[(\Sigma p)_{L-1}^n - (\Sigma p)_L^n \right] + \tilde{\alpha}\chi_2 \left[(\Sigma p)_{L-1}^{n+(q)} - (\Sigma p)_L^{n+(q)} \right] \right\} - 2\tau\gamma_3.
 \end{aligned}$$

Из системы уравнений (10)—(12) находим

$$\begin{aligned}
 u &= - \frac{\left[(1+\bar{A})(1-\bar{A})^2 + \bar{B}\bar{D}(1-\bar{A}) - \bar{E}\bar{C}(1+\bar{A}) \right] u_1 + 2\bar{B}\bar{E}v_1}{(1-\bar{A}) \left[(1-\bar{A})^2 - \bar{B}\bar{D} - \bar{E}\bar{C} \right]} - \\
 &- \frac{2\bar{B}(1-\bar{A})p_1 + \left[\bar{E}\bar{C} - (1-\bar{A})^2 \right] f_1 - \bar{B}\bar{E}f_2 - \bar{B}(1-\bar{A})f_3}{(1-\bar{A}) \left[(1-\bar{A})^2 - \bar{B}\bar{D} - \bar{E}\bar{C} \right]}; \\
 v &= - \frac{2\bar{C}\bar{D}u_1 + \left((1+\bar{A})(1-\bar{A})^2 + \bar{B}\bar{D}(1-\bar{A}) - \bar{E}\bar{C}(1+\bar{A}) \right) v_1}{(1-\bar{A}) \left[(1-\bar{A})^2 - \bar{B}\bar{D} - \bar{E}\bar{C} \right]} - \\
 &- \frac{2\bar{C}(1-\bar{A})p_1 - \bar{C}\bar{D}f_1 + \left(\bar{B}\bar{D} - (1-\bar{A})^2 \right) f_2 - \bar{C}(1-\bar{A})f_3}{(1-\bar{A}) \left[(1-\bar{A})^2 - \bar{B}\bar{D} - \bar{E}\bar{C} \right]}; \\
 p &= - \frac{2\bar{D}u_1 + \bar{E}v_1 + \left[(1-\bar{A})^2 - \bar{B}\bar{D} - \bar{E}\bar{C} \right] p_1 - \bar{D}f_1 - \bar{E}f_2 - (1-\bar{A})f_3}{(1-\bar{A}) \left[(1-\bar{A})^2 - \bar{B}\bar{D} - \bar{E}\bar{C} \right]}.
 \end{aligned}$$

Коэффициенты прогонки определяются выражениями

$$\tilde{\mu}_1 = \mu_1 \left[\left(\frac{1}{2\alpha\chi_1} + A \right) \left(\frac{1}{2\alpha\chi_1} - A \right) + BD - \frac{\frac{1}{2\alpha\chi_1} + A}{\frac{1}{2\alpha\chi_1} - A} EC \right] 2\alpha\chi_1 +$$

$$+ \left(\mu_2 \frac{C}{\frac{1}{2\alpha\chi_1} - A} + \mu_3 \right) 2D;$$

$$\tilde{\mu}_2 = \mu_2 \left[\left(\frac{1}{2\alpha\chi_1} + A \right) \left(\frac{1}{2\alpha\chi_1} - A \right) + BD - \frac{\frac{1}{2\alpha\chi_1} + A}{\frac{1}{2\alpha\chi_1} - A} EC \right] 2\alpha\chi_1 +$$

$$+ \left(\mu_1 \frac{C}{\frac{1}{2\alpha\chi_1} - A} + \mu_3 \right) 2E;$$

$$\tilde{\mu}_3 = 2(\mu_1 B + \mu_2 C) + \mu_3 \left[\left(\frac{1}{2\alpha\chi_1} + A \right) \left(\frac{1}{2\alpha\chi_1} - A \right) + BD + EC \right] 2\alpha\chi_1;$$

$$\tilde{g} = g \left[BD + EC - \left(\frac{1}{2\alpha\chi_1} - A \right)^2 \right] 2\alpha\chi_1 +$$

$$+ \mu_1 \left\{ -\frac{EC}{\frac{1}{2\alpha\chi_1} - A} + \left(\frac{1}{2\alpha\chi_1} - A \right) \right\} f_1 + \frac{BE}{\frac{1}{2\alpha\chi_1} - A} f_2 + Bf_3 \left\} + \right.$$

$$+ \mu_2 \left\{ \frac{CD}{\frac{1}{2\alpha\chi_1} - A} f_1 + \left[-\frac{BD}{\frac{1}{2\alpha\chi_1} - A} + \left(\frac{1}{2\alpha\chi_1} - A \right) \right] f_2 + Cf_3 \right\} +$$

$$+ \mu_3 \left[Df_1 + Ef_2 + \left(\frac{1}{2\alpha\chi_1} - A \right) f_3 \right],$$

где $\mu_1 = \frac{\tilde{\mu}_1}{\sqrt{(\tilde{\mu}_1)^2 + (\tilde{\mu}_2)^2 + (\tilde{\mu}_3)^2}}$.

Для обратной прогонки получаем

$$p = \frac{g(1 - \bar{A}) - (f_1\mu_1 - f_2\mu_2) + (\mu_1 u_1 + \mu_2 v_1)(1 + \bar{A}) + (\bar{B}\mu_1 + \bar{C}\mu_2) p_1}{\mu_3(1 - \bar{A}) + \bar{B}\mu_1 + \bar{C}\mu_2};$$

$$u = \frac{1}{1-\bar{A}} [f_1 + \bar{B}(p - p_1) - (1 + \bar{A})u_1];$$

$$v = \frac{1}{1-\bar{A}} [f_2 + \bar{C}(p - p_1) - (1 + \bar{A})v_1];$$

$$\rho = \frac{1}{1-\bar{A}} [f_3 + \bar{F}(u - u_1) + \bar{G}(v - v_1) - (1 + \bar{A})\rho_1].$$

На границе расчетной области, где определяется вектор X , должны выполняться условия Ренкина — Гюгонио на ударной волне:

$$v_\tau = v_{\tau_\infty};$$

$$\rho(V_v - D) = \rho_\infty(V_{v_\infty} - D);$$

$$p + \rho(V_v - D)V_v = p_\infty + \rho_\infty(V_{v_\infty} - D)V_{v_\infty};$$

$$\begin{aligned} \rho(V_v - D)\frac{V_v^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma-1}pV_v - \frac{1}{\gamma}pD = \\ = \rho_\infty(V_{v_\infty} - D)\frac{V_{v_\infty}^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma-1}p_\infty V_{v_\infty} - \frac{1}{\gamma}p_\infty D. \end{aligned}$$

Здесь D — скорость перемещения ударной волны по направлению к нормали.

В сферической системе координат

$$V_v = u \frac{F_y}{\sqrt{1+F_y^2}} + v \frac{1}{\sqrt{1+F_y^2}}; \quad V_\tau = u \frac{F_y}{\sqrt{1+F_y^2}} + v \frac{1}{\sqrt{1+F_y^2}}; \quad D = \frac{FF_t}{\sqrt{F^2 + F_y^2}}.$$

Система уравнений на ударной волне будет следующей:

$$uF_y + v = u_\infty F_y + v_\infty;$$

$$\rho(-u + vF_y + F_t) = \rho_\infty(-u_\infty + v_\infty F_y + F_t);$$

$$p(1 + f_{2,y}) + \rho(-u + vF_y + F_t)(-u + vF_y) =$$

$$= p_\infty(1 + f_{2,y}) + \rho_\infty(-u_\infty + v_\infty F_y + F_t)(-u_\infty + v_\infty F_y);$$

$$\frac{1}{2}\rho(-u + vF_y + F_t)(-u + vF_y)^2 + \frac{p}{\gamma-1}(1 + F_y^2)[\gamma(-u + vF_y) + F_t] =$$

$$= \frac{1}{2}\rho_\infty(-u_\infty + v_\infty F_y + F_t)(-u_\infty + v_\infty F_y)^2 +$$

$$+ \frac{p_\infty}{\gamma-1}(1 + F_y^2)[\gamma(-u_\infty + v_\infty F_y) + F_t];$$

$$\mu_1 u + \mu_2 v + \mu_3 p = g.$$

Неизвестные величины здесь u, v, p, ρ, F_t , известные — $u_\infty, v_\infty, p_\infty, \mu_1, \mu_2, \mu_3, g$ (из прямой прогонки) и F_t (с предыдущей итерации). В сферической системе координат F_y заменяем на F_y/F . Кроме того,

$$k = u_\infty F_y + v_\infty; \quad l = 1 + F_y^2; \quad g = -u_\infty + v_\infty F_y;$$

$$\lambda = \rho_\infty (-u_\infty + v_\infty F_y + F_t); \quad z = p_\infty l + \lambda g.$$

Выразим из этих уравнений u, v, p, ρ через F_t :

$$u = \frac{l(g - k\mu_2) + \mu_3(kF_y\lambda - z)}{l(\mu_1 - F_y\mu_2) + \lambda l\mu_3}; \quad v = k - uF_y;$$

$$p = -u_\infty + v_\infty F_y; \quad \rho = \frac{\lambda}{-u + vF_y + F_t}.$$

Решая теперь уравнение (2) относительно F_t методом Ньютона, получаем

$$F_t^{n+1} = F_t^n; \quad F^{n+1/2} = F^{n-1/2} + \tau F_t^n; \quad F_t^{n+1/2} = \frac{1}{2}(F_t^n + F_t^{n+1});$$

$$F_t^{n+1} = \frac{1}{2}(F^{n+3/2} + F^{n+1/2}).$$

Численное решение. Пусть G — разрушающаяся поверхность кометы, H — контактная поверхность (см. рис. 2). Введем новые переменные

$$\xi_1 = \frac{r - H(\theta, t)}{F(\theta, t) - H(\theta, t)}; \quad \xi_2 = \frac{r - G(\theta, t)}{F(\theta, t) - H(\theta, t)}.$$

Соотношения для прогонки примут вид

$$\mu_u u + \mu_v v + \mu_p p + M_u U + M_v V + M_p P = q;$$

$$v_u u + v_v v + v_p p + N_u U + N_v V + N_p P = h.$$

Запишем условия на контактной поверхности:

$$\frac{H}{\sqrt{H^2 + H_\theta^2}} u - \frac{H_\theta}{\sqrt{H^2 + H_\theta^2}} v =$$

$$= \frac{H}{\sqrt{H^2 + H_\theta^2}} U - \frac{H_\theta}{\sqrt{H^2 + H_\theta^2}} V = \frac{H}{\sqrt{H^2 + H_\theta^2}} H_t;$$

$$p = P,$$

и начальные значения коэффициентов прогонки

$$\mu_u^0 = \frac{H}{\sqrt{H^2 + H_\theta^2}}; \quad \mu_v^0 = -\frac{H_\theta}{\sqrt{H^2 + H_\theta^2}};$$

$$M_u^0 = -\mu_u^0; \quad M_v^0 = -\mu_v^0; \quad g^0 = 0;$$

$$v_p^0 = 1; \quad N_p^0 = -1; \quad v_u^0 = v_v^0.$$

Прямую прогонку ведем от контактной поверхности к ударной волне (ξ_1 возрастает от 0 до 1) и к поверхности вдува (ξ_2 уменьшается от 1 до 0). В обоих случаях индекс m пробегает значения от 0 до $M-1$. Уравнения, связывающие значения функций при ξ и $\xi + h$ (с индексами m и $m + 1$), в области между контактной поверхностью и ударной волной имеют вид

$$(1 + \bar{A})u_{m+1} + \bar{B}p_{m+1} + (1 - \bar{A})u_m - \bar{B}p_m = f_1; \quad (13)$$

$$(1 + \bar{A})u_{m+1} + \bar{C}p_{m+1} + (1 - \bar{A})u_m - \bar{C}p_m = f_2; \quad (14)$$

$$\bar{D}u_{m+1} + \bar{E}v_{m+1} + (1 + \bar{A})p_{m+1} - \bar{D}u_m - \bar{E}v_m + (1 - \bar{A})p_m = f_3. \quad (15)$$

При этом

$$A = a_{11} = \xi_t + \xi_r u + r^{-1} \xi_\theta v = a; \quad \bar{A} = 2\alpha\chi_1 A;$$

$$\bar{B} = 2\alpha\chi_1 B; \quad B = a_{13} = \xi_r \rho^{-1}; \quad C = a_{23} = r^{-1} \xi_\theta \rho^{-1};$$

$$D = a_{31} = \xi_r \gamma p; \quad E = a_{32} = r^{-1} \xi_\theta \gamma p;$$

$$F = a_{41} = r^{-1} \rho; \quad G = a_{42} = r^{-1} \xi_\theta \rho; \quad b = r^{-1} v;$$

$$b_{23} = r^{-1} \rho^{-1}; \quad b_{32} = r^{-1} \gamma p; \quad b_{42} = r^{-1} \rho;$$

$$u = 0, 25(u_m^n + u_{m+1}^n + u_m^{n+q} + u_{m+1}^{n+q}) = 0, 25(\Sigma u^n + \Sigma u^{n+q});$$

$$r = \xi(F - H) + H; \quad x_1 = \tau/h_\xi; \quad x_2 = \tau/h_\theta; \quad \xi = \frac{r - H(\theta, t)}{F(\theta, t) - H(\theta, t)};$$

$$\xi_t = \frac{H_t + \xi(F_t + H_t)}{F(\theta, t) - H(\theta, t)}; \quad \xi_r = \frac{1}{F(\theta, t) - H(\theta, t)};$$

$$\xi_\theta = -\frac{H_\theta + \xi(F_\theta - H_\theta)}{F(\theta, t) - H(\theta, t)}; \quad S = \frac{S^n + S^{n+q}}{2}; \quad S = F, F_t, F_\theta, H, H_t, H_\theta.$$

(Нижние индексы здесь обозначают производную по соответствующей переменной.)

После перехода к новым переменным правые части уравнений (10)—(12) примут вид

$$\begin{aligned}
 f_1 = & \left(1 - \frac{\sigma\chi_2}{4}\right) (\Sigma u)_i^n - 2\beta\chi_1 \left[a(\Delta u)_i^n + a_{23}(\Delta p)_i^n \right] + \\
 & + b \left\{ \frac{\beta\chi_2}{2} \left[(\Sigma u)_{l-1}^n - (\Sigma u)_{l+1}^n \right] + \frac{\alpha\chi_2}{2} \left[(\Sigma u)_{l-1}^{n+q} - (\Sigma u)_{l+1}^{n+q} \right] \right\} + \\
 & + \frac{\beta\chi_2}{4} \left[(\Sigma u)_{l-1}^n - (\Sigma u)_{l+1}^n \right] - 2\tau\gamma_1; \tag{16}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f_2 = & \left(1 - \frac{\sigma\chi_2}{4}\right) (\Sigma v)_i^n - 2\beta\chi_1 \left[a(\Delta v)_i^n + a_{23}(\Delta p)_i^n \right] + \\
 & + b \left\{ \frac{\beta\chi_2}{2} \left[(\Sigma v)_{l-1}^n - (\Sigma v)_{l+1}^n \right] + \frac{\alpha\chi_2}{2} \left[(\Sigma v)_{l-1}^{n+q} - (\Sigma v)_{l+1}^{n+q} \right] \right\} + \\
 & + b_{23} \left\{ \frac{\beta\chi_2}{2} \left[(\Sigma p)_{l-1}^n - (\Sigma p)_{l+1}^n \right] + \frac{\alpha\chi_2}{2} \left[(\Sigma p)_{l-1}^{n+q} - (\Sigma p)_{l+1}^{n+q} \right] \right\} + \\
 & + \frac{\sigma\chi_2}{4} \left[(\Sigma v)_{l-1}^n - (\Sigma v)_{l+1}^n \right] - 2\tau\gamma_2; \tag{17}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f_3 = & \left(1 - \frac{\sigma\chi_2}{4}\right) (\Sigma p)_i^n - 2\beta\chi_1 \left[a_{31}(\Delta u)_i^n + a_{23}(\Delta v)_i^n + a(\Delta p)_i^n \right] + \\
 & + \frac{\sigma\chi_2}{4} \left[(\Sigma p)_{l-1}^n - (\Sigma p)_{l+1}^n \right] - 2\tau\gamma_3 + \\
 & + b_{23} \left\{ \frac{\beta\chi_2}{2} \left[(\Sigma v)_{l-1}^n - (\Sigma v)_{l+1}^n \right] + \frac{\alpha\chi_2}{2} \left[(\Sigma v)_{l-1}^{n+q} - (\Sigma v)_{l+1}^{n+q} \right] \right\} + \\
 & + b \left\{ \frac{\beta\chi_2}{2} \left[(\Sigma p)_{l-1}^n - (\Sigma p)_{l+1}^n \right] + \frac{\alpha\chi_2}{2} \left[(\Sigma p)_{l-1}^{n+q} - (\Sigma p)_{l+1}^{n+q} \right] \right\}. \tag{18}
 \end{aligned}$$

Первый этап решения системы уравнений (16)—(18) на лучах методом прогонки состоит в вычислении коэффициентов этих соотношений. На крайнем расчетном луче имеем

$$\begin{aligned}
 f_1 = & (\Sigma u)_L^n - 2\beta\chi_1 \left[a(\Delta u)_L^n + a_{13}(\Delta p)_L^n \right] + \\
 & + b \left\{ \beta\chi_2 \left[(\Sigma u)_{L-1}^n - (\Sigma u)_L^n \right] + \alpha\chi_2 \left[(\Sigma u)_{L-1}^{n+q} - (\Sigma u)_L^{n+q} \right] \right\} - 2\tau\gamma_1; \\
 f_2 = & (\Sigma v)_L^n - 2\beta\chi_1 \left[a(\Delta v)_L^n + a_{23}(\Delta p)_L^n \right] + \\
 & + b \left\{ \beta\chi_2 \left[(\Sigma v)_{L-1}^n - (\Sigma v)_L^n \right] + \alpha\chi_2 \left[(\Sigma v)_{L-1}^{n+q} - (\Sigma v)_L^{n+q} \right] \right\} + \\
 & + b_{23} \left\{ \beta\chi_2 \left[(\Sigma p)_{L-1}^n - (\Sigma p)_L^n \right] + \alpha\chi_2 \left[(\Sigma p)_{L-1}^{n+q} - (\Sigma p)_L^{n+q} \right] \right\} - 2\tau\gamma_2;
 \end{aligned}$$

$$f_3 = (\Sigma p)_L^n - 2\beta\chi_1 \left[a_{31} (\Delta u)_L^n + a_{23} (\Delta v)_L^n + a (\Delta p)_L^n \right] + \\ + b_{23} \left\{ \beta\chi_2 \left[(\Sigma v)_{L-1}^n - (\Sigma v)_L^n \right] + \alpha\chi_2 \left[(\Sigma v)_{L-1}^{n+q} - (\Sigma v)_L^{n+q} \right] \right\} - 2\tau\gamma_3 + \\ + b \left\{ \beta\chi_2 \left[(\Sigma p)_{L-1}^n - (\Sigma p)_L^n \right] + \alpha\chi_2 \left[(\Sigma p)_{L-1}^{n+q} - (\Sigma p)_L^{n+q} \right] \right\},$$

где $\gamma_1 = -v^2/r$; $\gamma_2 = uv/r$; $\gamma_3 = (\gamma p/r)[u + j(u + v \operatorname{ctg} \theta)]$; $j \equiv 0$ для плоского случая и 1 — для осесимметричного. Здесь сумма и разность коэффициентов на соответствующем слое представлены в виде

$$(\Sigma f)_l^n = (f_m + f_{m+1}^n); \quad (\Delta f)_l^n = (f_{m+1} - f_m)_l^n.$$

В области между контактной и разрушаемой поверхностями имеет место аналогичная система уравнений со следующими заменами: $u \rightarrow U$, $v \rightarrow V$, $p \rightarrow P$, $\gamma \rightarrow \Gamma$, $\xi \rightarrow (+\xi_1)$, $\xi_t \rightarrow (-\xi_t)_1$, $\xi_r \rightarrow (-\xi_r)_1$, $\xi_\theta \rightarrow (-\xi_\theta)_1$, где

$$\xi_1 = \frac{r - G(\theta, t)}{H(\theta, t) - G(\theta, t)}; \quad (-\xi_t)_1 = -\frac{G_t + \xi(H_t - G_t)}{G(\theta, t) - H(\theta, t)}; \\ (-\xi_r)_1 = \frac{1}{G(\theta, t) - H(\theta, t)}; \quad (-\xi_\theta)_1 = -\frac{G_\theta + \xi(H_\theta - G_\theta)}{G(\theta, t) - H(\theta, t)}; \\ S = \frac{S^n + S^{n+q}}{2}; \quad S = H, H_t, H_\theta, G, G_t, G_\theta.$$

Из системы уравнений (13)—(15) для областей между контактной поверхностью и ударной волной и между контактной поверхностью и поверхностью кометы получаем явные соотношения между значениями искомых функций при ζ и $\zeta + h_\zeta$ (с индексами m и $m + 1$):

$$u_m = (S_{11}u_{m+1} + S_{12}v_{m+1} + S_{13}p_{m+1} + S_1)/S; \\ v_m = (S_{21}u_{m+1} + S_{22}v_{m+1} + S_{23}p_{m+1} + S_2)/S; \\ p_m = (S_{31}u_{m+1} + S_{32}v_{m+1} + S_{33}p_{m+1} + S_3)/S; \\ U_m = (t_{11}U_{m+1} + t_{12}V_{m+1} + t_{13}P_{m+1} + t_1)/t; \\ V_m = (t_{21}U_{m+1} + t_{22}V_{m+1} + t_{23}P_{m+1} + t_2)/t; \\ P_m = (t_{31}U_{m+1} + t_{32}V_{m+1} + t_{33}P_{m+1} + t_3)/t.$$

Здесь

$$S_{11} = (1 - \bar{A})^2 + \bar{B}\bar{D} - \bar{E}\bar{C} \frac{1 + \bar{A}}{1 - \bar{A}}; \quad S_{12} = \frac{2\bar{B}\bar{E}}{1 - \bar{A}}; \quad S_{13} = 2\bar{B};$$

$$S_1 = \left[\frac{\overline{EC}}{1-\overline{A}} - (1-\overline{A}) \right] f_1 - \frac{\overline{BE}}{1-\overline{A}} f_2 - \overline{B}f_3; \quad S = \overline{B}\overline{D} + \overline{E}\overline{C} - (1-\overline{A})^2;$$

$$S_{21} = \frac{2\overline{CD}}{1-\overline{A}}; \quad S_{22} = (1-\overline{A}^2) - \overline{B}\overline{D} \frac{1+\overline{A}}{1-\overline{A}} + \overline{E}\overline{C}; \quad S_{23} = 2\overline{C};$$

$$S_2 = \frac{\overline{CD}}{1-\overline{A}} f_1 + \left[\frac{\overline{BD}}{1-\overline{A}} - (1-\overline{A}) \right] f_2 - \overline{C}f_3; \quad S_{31} = 2\overline{D}; \quad S_{32} = 2\overline{E};$$

$$S_{33} = (1-\overline{A}^2) + \overline{B}\overline{D} + \overline{E}\overline{C}; \quad S_3 = -\overline{D}f_1 - \overline{E}f_2 - (1-\overline{A})f_3.$$

Значения t_{ij} вычисляем по формулам, аналогичным формулам для S_{ij} . В результате получаем соотношения между значениями коэффициентов прогонки при $\xi + h_\xi$ и ξ (в точках с индексами $m + 1$ и m):

$$\begin{aligned} \bar{\mu}_u^{m+1} &= (\mu_u^m S_{11} + \mu_v^m S_{21} + \mu_p^m S_{31}) / S; \\ \bar{\mu}_v^{m+1} &= (\mu_u^m S_{12} + \mu_v^m S_{22} + \mu_p^m S_{32}) / S; \\ \bar{\mu}_p^{m+1} &= (\mu_u^m S_{13} + \mu_v^m S_{23} + \mu_p^m S_{33}) / S; \\ \tilde{M}_u^{m+1} &= (M_u^m t_{11} + M_v^m t_{21} + M_p^m t_{31}) / t; \\ \tilde{M}_v^{m+1} &= (M_u^m t_{12} + M_v^m t_{22} + M_p^m t_{32}) / t; \\ \tilde{M}_p^{m+1} &= (M_u^m t_{13} + M_v^m t_{23} + M_p^m t_{33}) / t; \\ g^{m+1} &= g^m - \frac{\mu_u^m S_1 + \mu_v^m S_2 + \mu_p^m S_3}{S} - \frac{M_u^m t_1 + M_v^m t_2 + M_p^m t_3}{t}. \end{aligned}$$

Нормированные значения коэффициентов прогонки определяем по формулам

$$\mu_u^{m+1} = \sqrt{2} \cdot \tilde{\mu}_u^{m+1} / \sqrt{\Sigma}, \quad \dots, \quad M_u^{m+1} = \sqrt{2} \cdot \tilde{M}_u^{m+1} / \sqrt{\Sigma}, \quad \dots, \quad g = \sqrt{2} \cdot \tilde{g}^{m+1} / \sqrt{\Sigma},$$

$$\text{где } \Sigma = (\tilde{\mu}_u^{m+1})^2 + (\tilde{\mu}_v^{m+1})^2 + (\tilde{\mu}_p^{m+1})^2 + (\tilde{M}_u^{m+1})^2 + (\tilde{M}_v^{m+1})^2 + (\tilde{M}_p^{m+1})^2.$$

На границе ударная волна — поверхность разрушения неизвестными являются скорости ударной волны F_t^{m+1} , параметры $(u, v, p, \rho)^{m+1}$ течения на ударной волне, параметры $(U, V, P, \rho)^{m+1}$ течения на поверхности разрушения. Для их определения необходимы четыре уравнения на ударной волне, три уравнения на поверхности разрушения и два соотношения для коэффициентов прогонки при $m = M - 1$.

Величины u, v, p, ρ выражаем через F_t , а U, V, ρ — через P .

Окончательно получаем систему из двух уравнений относительно F_t, P :

$$\begin{aligned} \Phi(F_t, P) &= \mu_u u(F_t) + \mu_v v(F_t) + \mu_p p(F_t) + M_u U(P) + \\ &+ M_v V(P) + M_p P - g = 0; \\ \Psi(F_t, P) &= \nu_u u(F_t) + \nu_v v(F_t) + \nu_p p(F_t) + N_u U(P) + \\ &+ N_v V(P) + N_p P - h = 0. \end{aligned} \quad (19)$$

Решение системы (19) ведем итерациями. В качестве нулевого приближения принимаем

$$F_t^{(r+1)} = F_t^{(r)} + \Delta F_t; \quad P^{(r+1)} = P^{(r)} + \Delta P;$$

$$\Delta F_t = \frac{-\Phi \frac{\partial \Psi}{\partial P} + \Psi \frac{\partial \Phi}{\partial P}}{\frac{\partial \Phi}{\partial F_t} \frac{\partial \Psi}{\partial P} - \frac{\partial \Psi}{\partial F_t} \frac{\partial \Phi}{\partial P}}; \quad \Delta P = \frac{\Phi \frac{\partial \Psi}{\partial F_t} - \Psi \frac{\partial \Phi}{\partial F_t}}{\frac{\partial \Phi}{\partial F_t} \frac{\partial \Psi}{\partial P} - \frac{\partial \Psi}{\partial F_t} \frac{\partial \Phi}{\partial P}};$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial F_t} = \mu_u \frac{du}{dF_t} + \mu_v \frac{dv}{dF_t} + \mu_p \frac{dp}{dF_t}; \quad \frac{\partial \Psi}{\partial F_t} = \nu_u \frac{du}{dF_t} + \nu_v \frac{dv}{dF_t} + \nu_p \frac{dp}{dF_t};$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial P} = M_u \frac{dU}{dP} + M_v \frac{dV}{dP} + M_p; \quad \frac{\partial \Psi}{\partial P} = N_u \frac{dU}{dP} + N_v \frac{dV}{dP} + N_p.$$

Система уравнений на ударной волне имеет вид

$$u\bar{F}_\theta + v = k;$$

$$\rho(-u + v\bar{F}_\theta + F_t) = \lambda;$$

$$\rho l + \lambda(-u + v\bar{F}_\theta) = P_\infty l + \lambda g; \quad (20)$$

$$\frac{1}{2} \lambda (-u + v\bar{F}_\theta)^2 + \frac{\rho l}{\gamma - 1} |\gamma(-u + v\bar{F}_\theta) + F_t| = \frac{1}{2} \lambda g^2 + \frac{P_\infty l}{\gamma - 1} |\gamma g + F_t|.$$

Здесь

$$\bar{F}_\theta = F_\theta / F; \quad k = u_\infty \bar{F}_\theta + v_\theta; \quad \lambda = \rho_\infty (g + F_t);$$

$$l = 1 + F_\theta^2; \quad g = -u_\infty + v_\theta \bar{F}_\theta,$$

при этом

$$a = \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} P_\infty; \quad b = \frac{2}{\gamma + 1} \frac{1}{l \rho_\infty}; \quad c = \frac{4}{(\gamma + 1) l}; \quad m = g + \frac{P_\infty - P}{\lambda} l = -u + v\tilde{F}_\theta.$$

Из системы (20) находим

$$p = -a + b\lambda^2; \quad u = \frac{k\tilde{F}_\theta - m}{l}; \quad v = \frac{k + m\tilde{F}_\theta}{l}; \quad \rho = \frac{\lambda}{m + F_t}; \quad \frac{dp}{dF_t} = c\lambda;$$

$$\frac{du}{dF_t} = l + \frac{p_\infty - p}{\lambda} \frac{\lambda'}{\lambda}; \quad \frac{dv}{dF_t} = -\frac{du}{dF_t} \tilde{F}_\theta; \quad \frac{\lambda'}{\lambda} = \frac{\rho_\infty}{\rho_\infty(g + F_t)} = \frac{1}{g + F_t}.$$

После вычисления F^n положение F^{n+1} ударной волны определяем по формуле

$$F^{n+1} = F^n + \tau \frac{F_\tau^n + F_\tau^{n+1}}{2}.$$

На поверхности разрушения система уравнений будет следующей:

$$\rho W_n = \rho \left(U \frac{G}{\sqrt{G^2 + G_\theta^2}} - V \frac{G_0}{\sqrt{G^2 + G_\theta^2}} \right) = B;$$

$$\rho W_\tau = U \frac{G_0}{\sqrt{G^2 + G_\theta^2}} + V \frac{G}{\sqrt{G^2 + G_\theta^2}} = 0;$$

$$P/\rho = k.$$

Отсюда

$$U = \frac{kB}{P} \frac{G}{\sqrt{G^2 + G_\theta^2}}; \quad V = -\frac{kB}{P} \frac{G_0}{\sqrt{G^2 + G_\theta^2}};$$

$$\rho = \frac{P}{k}; \quad \frac{dU}{dP} = -\frac{U}{P}; \quad \frac{dV}{dP} = -\frac{V}{P}.$$

На неразрушаемой поверхности для определения U , V , ρ используем уравнения газовой динамики, записанные вдоль линии тока, основной является твердая поверхность:

$$\frac{\partial P}{\partial t} - G^2 \frac{\partial P}{\partial t} + W_s \left(\frac{dP}{ds} - c^2 \frac{\partial \rho}{\partial s} \right) = 0;$$

$$\frac{\partial W_s}{\partial t} + \left(W_s \frac{\partial W_s}{\partial s} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial s} \right) = 0, \tag{21}$$

где W_s — полная скорость течения; s — длина дуги твердой стенки; $c^2 = \tilde{A}P/\rho$.

Представим систему (21) в виде

$$\frac{P^{n+1} - P^n - \frac{\sigma\tau h_\theta}{4}(P^n)''_s}{\tau} - Q^{n,n+q} \frac{\rho^{n+1} - \rho^n - \frac{\sigma\tau h_\theta}{4}(\rho^n)''_s}{\tau} = S^{n,n+q};$$

$$\frac{W_s^{n+1} - W_s^n - \frac{\sigma\tau h_\theta}{4}(W_s^n)''_\theta}{\tau} = T. \quad (22)$$

Здесь

$$Q^{n,n+q} = \frac{(c^2)^{n+q} + (c^2)^n}{2};$$

$$S^{n,n+q} = \frac{W_s^n + W_s^{n+q}}{4} \left\{ Q^{n,n+q} \left[(\rho^{n+q})' + (\rho^n)' \right] - (P^{n+q})'_s + (P^n)'_s \right\};$$

$$T^{n,n+q} = - \left\{ \frac{W_s^n + W_s^{n+q}}{4} \left[(W_s^{n+q})'_s + (W_s^n)'_s \right] + \frac{(P^{n+q})'_s + (P^n)'_s}{\rho^{n+q} + \rho^n} \right\}.$$

Из системы (22) получаем

$$P^{n+1} - Q\rho^{n+1} = S; \quad W_s^{n+1} = T; \quad Q = Q^{n,n+q}, \quad (23)$$

где

$$S = \tau S^{n,n+q} + \left[P^n + \frac{\sigma\tau h_\theta}{4}(P^n)''_s \right] - Q \left[\rho^n + \frac{\sigma\tau h_\theta}{4}(\rho^n)''_s \right];$$

$$T = \tau T^{n,n+q} + \left(W_s^n + \frac{\sigma\tau h_\theta}{4}(W_s^n)''_s \right).$$

Формулы для вычисления производных f'_s, f''_s имеют вид

$$(f'_s)_l = \frac{(f_{l+1} - f_l)(S_l - S_{l-1})^2 + (f_l - f_{l-1})(S_{l+1} - S_l)^2}{(S_{l+1} - S_l)(S_l - S_{l-1})(S_{l+1} - S_{l-1})};$$

$$(f'_s)_L = \frac{f_L - f_{L-1}}{S_L - S_{L-1}};$$

$$(f''_s)_l = 2 \frac{(f_{l+1} - f_l)(S_l - S_{l-1}) - (f_l - f_{l-1})(S_{l+1} - S_l)}{(S_{l+1} - S_l)(S_l - S_{l-1})(S_{l+1} - S_{l-1})};$$

$$(f''_s)_L = 0.$$

В частном случае, когда твердая поверхность есть сфера единичного радиуса,

$$(f'_s)_l = (f'_\theta)_l = \frac{f_{l+1} - f_{l-1}}{2h_\theta}; \quad (f'_s)_L = \frac{f_L - f_{L-1}}{h_\theta};$$

$$(f''_s)_l = (f''_\theta)_l = \frac{(f_{l+1} - 2f_l + f_{l-1}))}{h_\theta^2}; \quad (f''_s)_L = 0.$$

Из системы (23) находим выражения для U, V, ρ :

$$U = T \frac{G_\theta}{\sqrt{G^2 + G_\theta^2}}; \quad V = T \frac{G}{\sqrt{G^2 + G_\theta^2}}; \quad \rho = \frac{1}{Q}(P - S); \quad \frac{dU}{dP} = \frac{dV}{dP} = 0.$$

В случае обратной прогонки имеем

$$p_m = \frac{A_v B_\mu - A_\mu B_v}{\alpha_\mu A_v - \alpha_v A_\mu}; \quad P_m = \frac{-\alpha_v \beta_\mu + \alpha_\mu \beta_v}{\alpha_\mu A_v - \alpha_v A_\mu}.$$

Здесь

$$A_\mu = (1 - \bar{A}^{**}) [M_p^* (1 - \bar{A}^{**}) + M_u^m \bar{B}^{**} + M_v^m \bar{C}^{**}];$$

$$\alpha_\mu = (1 - \bar{A}^{**}) [\mu_p^* (1 - \bar{A}^{**}) + \mu_u^m \bar{B}^* + \mu_v^m \bar{C}^*];$$

$$\begin{aligned} \beta_\mu = & g(1 - \bar{A}^*)(1 - \bar{A}^{**}) - (1 - \bar{A}^{**}) \{ \mu_u^m [f_1 - (1 + \bar{A}^*)u_{m+1} - \bar{B}\rho_{m+1}] + \\ & + \mu_v^m [f_2 - (1 + \bar{A}^*)v_{m+1} - \bar{C}\rho_{m+1}] \} - (1 - \bar{A}^*) \{ M_u^m [F^1 - \\ & - (1 + \bar{A}^{**})U_{m+1} - \bar{B}^{**}P_{m+1}] + M_v^m [F^2 - (1 + \bar{A}^{**})V_{m+1} - \bar{C}^{**}P_{m+1}] \}. \end{aligned}$$

Величины с индексами * и ** рассчитываем в точке с индексом m соответственно в областях между контактной поверхностью и ударной волной, а также между контактной поверхностью и поверхностью разрушения.

В результате обратной прогонки находим скорость контактной поверхности

$$H_t^{n+1} = u - \frac{H_\theta}{H} v = U - \frac{H_\theta}{H} V.$$

Новое положение контактной поверхности определяется соотношениями

$$H^{n+1} = H^n + \tau \left(\frac{H_t^n + H_t^{n+1}}{2} \right);$$

$$u_m = \frac{1}{1 - \bar{A}} [f_1 + \bar{B}(p_m - p_{m+1}) - (1 + \bar{A})u_{m+1}];$$

$$v_m = \frac{1}{1-\bar{A}} \left[f_2 + \bar{C}(p_m - p_{m+1}) - (1+\bar{A})v_{m+1} \right];$$

$$\rho_m = \frac{1}{1-\bar{A}} \left[f_3 + \bar{F}(u_m - u_{m+1}) - \bar{G}(v_m - v_{m+1}) - (1+\bar{A})\rho_{m+1} \right].$$

Обтекание сферической кометы рассчитывали в условиях равномерного разрушения. Программа определяла распределение основных параметров потока в поле течения между ударной волной и поверхностью кометы по поперечной координате ξ для различных значений угловой координаты. На рис. 3 и 4 показаны распределение отношения плотностей и распределение коэффициента давления, полученные при числе Маха $M_\infty = 22$ и интенсивности разрушения $(\overline{\rho v}) = 10\%$.

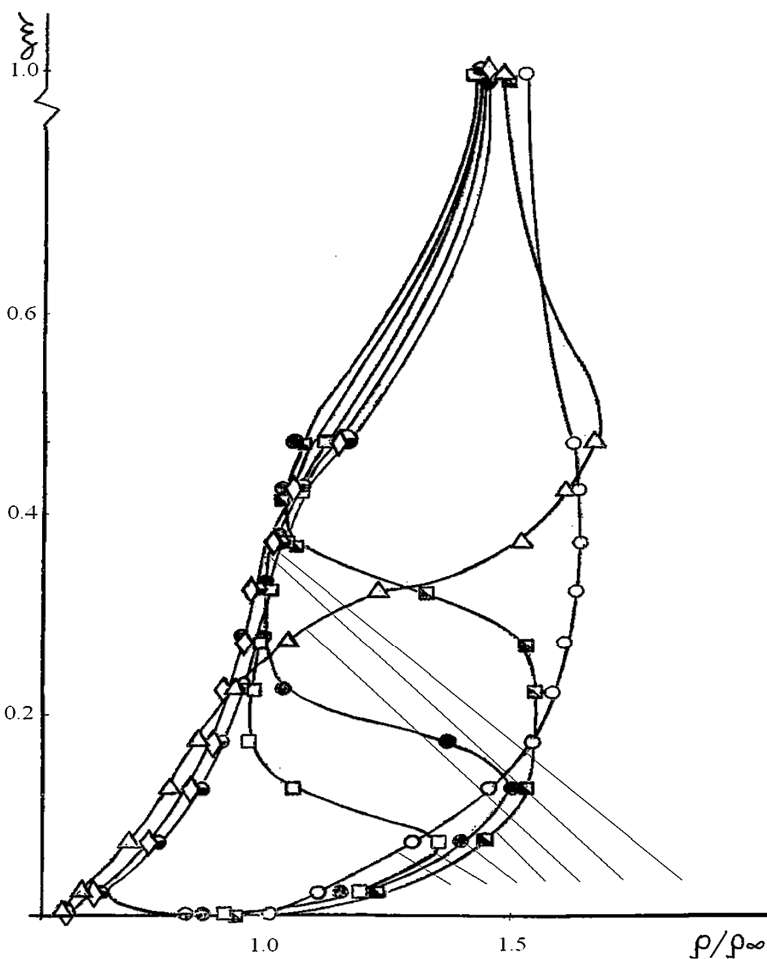


Рис. 3. Распределение отношения плотностей по толщине ударного слоя при $\theta = 20$ (1), 60 (2), 80 (3) 100 (4), 110 (5) 115 (6) и 120° (7)

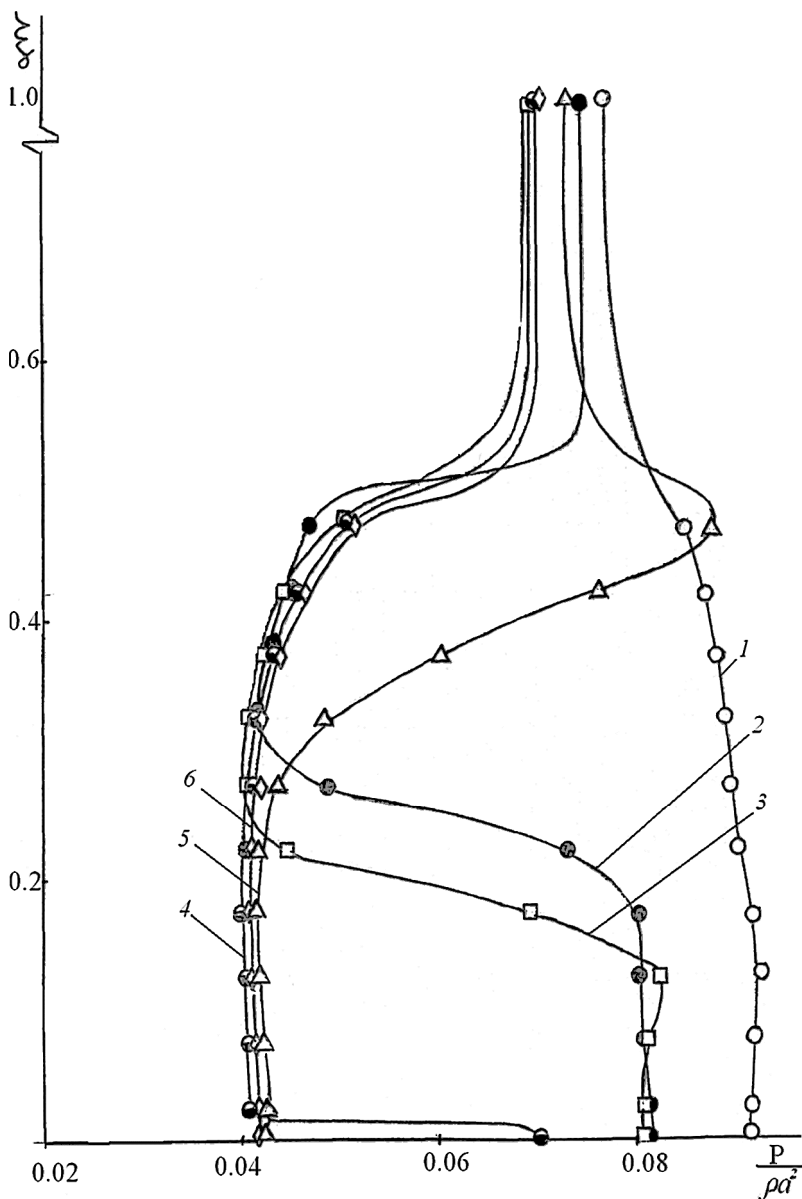


Рис. 4. Распределение коэффициента давления по толщине ударного слоя при $\theta = 20$ (1), 60 (2), 80 (3) 100 (4), 110 (5) 115 (6) и 120° (7)

Таким образом, с использованием уравнения газовой динамики для невязкого обтекания кометного тела сферической формы предложена численная методика решения задачи по гиперзвуковому обтеканию комет в условиях разрушения поверхности. Установлено, что удовлетворительное согласование расчетных данных по форме и расположению головной ударной волны и распределению давления по поверхности тела достигается при разностной сетке 30×20

(вдоль поверхности тела для $l = 1, 2, 3, \dots, 30$; по нормали к поверхности тела для $j = 1, 2, 3, \dots, 20$). При этом с уменьшением параметра разрушения ($\overline{\rho v}$) наблюдается увеличение расхождения результатов расчетов с аналитическими данными. Разработанный метод можно применять для численных расчетов по определению газодинамических параметров в ударном слое при обтекании кометы сферической формы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Пасконов В. М., Полежаев И.И., Чудов Л. А. Численное моделирование процессов тепло- и массообмена. – М.: Изд-во МГУ, 1984. – 285 с.
2. Исследование физико-газодинамических явлений при обтекании тел сверхзвуковым потоком/ под ред. Н.Н.Пилюгина. – М.: Изд-во МГУ, 1998. – 171 с.
3. Кокошинская Н.С., Павлов Б.М., Пасконов В.М. Численное исследование сверхзвукового обтекания тел вязким газом. – М.: Изд-во МГУ, 1980. – 247 с.
4. Рогов Б.В., Соколова И.А. Обзор моделей вязких внутренних течений // Математическое моделирование. – 2002. – Т. 14. – № 1. – С.41–72.
5. Сидняев Н.И. Обзор методик исследования обтекания гиперзвуковым потоком газа тел с разрушающим покрытием // Теплофизика и аэромеханика. – 2004. – Т. 11. – № 4. – С. 501–522.
6. Научные основы технологий XXI века / Н.И. Сидняев, В.Т.Калугин, А.Ю. Луценко и др.; под общ. ред. А.И.Леонтьева, Н.Н.Пилюгина, Ю.В.Полежаева. – М.: УНПЦ «Энергомаш», 2000. – 136 с.

Статья поступила в редакцию 28.09.2012