УДК 621.3

Н.Т. Вилисова, Д.В. Власова, Ю.С. Ильина

ОЦЕНКА РЕШЕНИЙ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С УЧЕТОМ СЛУЧАЙНЫХ ПАРАМЕТРОВ

Рассмотрено влияние неопределенностей параметров в правой части обыкновенных дифференциальных уравнений и систем на поведение их решений. Показано, что неопределенность параметров может оказывать не меньшее влияние на устойчивость получаемых решений, чем начальные условия. Сформированы условия существования устойчивых решений при наличии неопределенности параметров правой части уравнений.

E-mail: jm.bmstu@yandex.ru

Ключевые слова: *дифференциальные уравнения, устойчивость решений, случайные параметры.*

При описании и проектировании технических систем важно знать, как поведет себя математическая модель рассматриваемой системы при небольших изменениях параметров модели, и тем самым предсказать поведение реальной системы при небольших изменениях конструктивных параметров, вызванных случайными помехами и ошибками измерений.

Пусть некоторый реальный процесс $x_i(t)$ или реальная система $x_i(t)$ описывается системой дифференциальных уравнений

$$\dot{x}_i = f_i(t, \theta, x_1, ..., x_n), \quad \dot{x}_i \equiv \frac{dx_i}{dt}, \tag{1}$$

с начальными условиями

$$x_i(t_0) = x_{i0}, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{2}$$

где $x_i(t)$, $i = 1, \ldots, n$, — система искомых функций, описывающая реальный процесс; t — независимая переменная; θ — вектор параметров функций, входящих в правую часть дифференциальных уравнений (1).

В теории дифференциальных уравнений достаточно хорошо исследовано влияние начальных условий (2) на решение задачи Коши (1). Так, в теории устойчивости по Ляпунову [1–3] исследуются условия, при которых решение задачи Коши не выйдет из некоторой ξ-окрестности точного решения, если начальные условия не выйдут из δ-окрестности.

Влияние вектора θ параметров функций на решение задачи Коши

$$x_i = \varphi_i(t, t_0, x_{10}, ..., x_{n0}, \theta), \quad i = 1, 2, \dots, n, \tag{3}$$

при этом не рассматривается, что нельзя назвать строгим подходом. В процессе исследования поведения системы и составления математической модели изменяются не только начальные условия $x_i(t_0)$, но и вектор θ. Таким образом, в задаче Коши наряду с изменением начальных условий $x_i(t_0)$ случайными величинами будут также координаты вектора θ параметров. Небольшие изменения координат вектора θ могут привести к заметным изменениям в решении $x_i(t)$.

Рассмотрим классический пример. Пусть поведение системы описывается дифференциальным уравнением $\dot{x} = -\theta x$, удовлетворяющим начальному условию $x(0) = x_0$. Для данного случая решение задачи Коши $x(t) = x_0 e^{-\theta t}$. Если начальное значение x_0 получило приращение Δx_0, то приращение решения будет

$$\Delta x(t) = \Delta x_0 e^{-\theta t}.$$

Это решение устойчиво по Ляпунову [1], так как при $|\Delta x_0| < \delta$

$$|\Delta x(t)| = \left|\Delta x_0 e^{-\theta t}\right| < \xi = \delta.$$

Решение является и асимптотически устойчивым, поскольку

$$\lim_{t\to\infty}\left|\Delta x_0 e^{-\theta t}\right| = 0.$$

При изменении θ решение

$$\frac{dx_\theta(t)}{d\theta} \cong -t x_0 e^{-\theta t}\Delta\theta. \tag{4}$$

Как следует из формулы (4), поведение системы становится более сложным: при некотором $\xi > 0$ и $|\Delta\theta| < \delta$ неравенство $|\Delta x_\theta(t)| < \xi$ будет выполняться при $(t = 0,\ t_1) \cup (t_2,\ t_3)$, где $t_0 < t_1 < t_2 < t_3$; на интервале $(t_1,\ t_2)$ это неравенство не выполняется.

Для исследования поведения решения задачи Коши требуется вычисление производных от решений системы дифференциальных уравнений по начальным значениям и по параметрам, содержащимся в правых частях системы дифференциальных уравнений. Приведем известные теоремы, определяющие существование производных от этих решений [1].

Лемма. Если правые части системы дифференциальных уравнений (1)

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(t,\ x_1, \dots, x_n, \theta),\ i = 1, 2, \dots, n, \tag{5}$$

являются непрерывными функциями переменных $t, x_1, ..., x_n$ и вектора θ в области

$$\left|t - t_0\right| \le a; \ \left|x_i - x_{i_0}\right| \le b,\ i = 1, 2, \dots, n, \quad \theta_1 \le \theta \le \theta_2,$$

и в этой же области непрерывны частные производные

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_k},\ \ i, k = 1, 2, \dots, n,$$

то решение $x_i(t) = \varphi_i(t, t_0, x_{10}, x_{20}, ..., x_{n0}, \theta)$, определенное начальными значениями $(t_0, x_{10}, x_{20}, ..., x_{n0})$, является непрерывной функцией вектора θ параметров при $\theta_1 \le \theta \le \theta_2$.

Теорема 1. Если правые части системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(t, x_1, \dots, x_n),\ i = 1, 2, \dots, n, \tag{6}$$

допускают в области D $\left|t - t_0\right| \le a$; $\left|x_i - x_{i0}\right| \le b$, $i = 1, 2, \dots, n$, непрерывные частные производные

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_k},\ \ i, k = 1, 2, \dots, n,$$

то решение, определенное принадлежащими области D начальными данными $t_0, x_{10}, ..., x_{n0}$,

$$x_i(t) = \varphi_i(t, t_0, x_{10}, ..., x_{n0})$$

допускает непрерывные производные по начальным условиям:

$$\frac{\partial x_i}{\partial t_0}, \frac{\partial x_i}{\partial x_{k0}},\ \ i, k = 1, 2, \dots, n.$$

Замечание. Если правые части уравнений (6) кроме переменных x_i зависят еще от вектора θ, т. е. имеют вид (5), причем допускают непрерывные частные производные не только по $x_1, ..., x_n$, но также по θ для $\theta_1 \le \theta \le \theta_2$, то решение задачи Коши допускает также частные производные по θ, поскольку является непрерывной функцией вектора θ.

Таким образом, согласно лемме, теореме 1 и замечанию, в рассматриваемом случае решение задачи Коши есть функция (функции) случайных аргументов $x_{10}, x_{20}, ..., x_{n0}, \theta$, получающихся в практических приложениях в процессе наблюдений и измерений (строго говоря, в случайные аргументы следует включить и t_0), над которой можно проводить операции интегрирования и дифференцирования по параметрам $x_{10}, x_{20}, ..., x_{n0}, \theta$.

Теория вероятностей и математическая статистика предоставляют нам две возможности для исследования поведения задачи Коши как функции случайных аргументов: вычисление функции распределения как функции многих переменных и рассмотрение всех необходимых для конкретного решения моментов и вычисление только ее дисперсии [4, 5].

Часто процедура вычисления функции распределения функции многих переменных и всех небходимых моментов достаточно громоздка, и в практических приложениях ограничиваются вычислением только дисперсии функции многих случайных переменных (метод статистической линеаризации). Дисперсия функции x_i

$$D(x_i) \cong \sum_{i=0}^{n+m} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_{i0}} \right)^2 D(x_{i0}) + 2 \sum_{i=2}^{n+m} \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\partial \varphi}{\partial x_{i0}} \frac{\partial f}{\partial x_{j0}} \operatorname{cov}(x_{i0}, x_{j0}), \qquad (7)$$

где $x_{i0}, ..., x_{j0}$ — координаты вектора θ параметров; $\operatorname{cov}(x_{i0}, x_{j0})$ — корреляционный момент случайных величин x_{i0} и x_{j0} [6].

При известном математическом ожидании x_i и дисперсии $D(x_i)$ определяют соответствующую заданной доверительной вероятности β интервальную оценку Δx_i [5] , по которой судят о поведении полученного решения.

Для практики наибольший интерес представляют случаи, когда суждение о поведении решения системы дифференциальных уравнений (или дифференциального уравнения n-го порядка) может быть вынесено без нахождения решения в явном виде. В случае исследования устойчивости решения по Ляпунову для этого сформулирован ряд условий и критериев [1—3]. Рассмотрим некоторые из этих критериев и исследуем влияние на них погрешностей (неопределенностей) в значениях параметров системы — прежде всего устойчивость линейных однородных систем с постоянными коэффициентами:

$$\frac{dx}{dt} = Ax,$$

где A — квадратная матрица, элементами которой являются постоянные коэффициенты; $x = (x_1, ..., x_n)$ — вектор-столбец неизвестных функций.

Теорема 2. Для устойчивости линейной однородной системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами необходимо и достаточно, чтобы все корни характеристического уравнения системы имели неположительные вещественные части, причем элементарные делители, соответствующие корням характеристического уравнения с нулевой вещественной частью, были бы постоянными.

Рассмотрим характеристический многочлен (полином) данной системы дифференциальных уравнений

$$P(\lambda) = a_0\lambda^n + a_1\,\lambda^{n-1} + ... + a^n\ ,\ n \geq 1,$$

и определим его корни λ_k при случайных значениях коэффициентов a_k, $k = 0, 1, \ldots, n$, или интервальные оценки корней λ_k. Неопределенность значений λ вследствие неопределенности коэффициентов a_k, $k = 0, 1, \ldots, n$, может быть значительна. В простейшем случае, когда характеристический многочлен $P(\lambda)$ представляет собой произведение элементарных сомножителей, неопределенность $\Delta\lambda_k$ значений λ_k равна неопределенности Δa_k соответствующего значения a_k. Во всех остальных случаях она будет больше.

Для каждого конкретного многочлена применим свой метод нахождения корней. В простейшем случае при $n = 2$ имеем

$$a_0\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0,\ \ a_0 > 0.$$

По теореме Виета [7] получаем

$$\lambda_1 + \lambda_2 = -a_1/a_0;$$
$$\lambda_1\lambda_2 = a_2/a_0.$$

Если

$$\lambda(\omega) = [\lambda_1(\omega), \lambda_2(\omega)]^{\mathrm{T}};$$

$$\varphi(\lambda(\omega)) = [\lambda_1(\omega)\times\lambda_2(\omega)];$$

$$\operatorname{cov}[\lambda_1(\omega), \lambda_2(\omega)] = 0,$$

то, согласно методу статистической линеаризации,

$$D[\varphi(\lambda(\omega))] \approx \varphi'(X)\operatorname{cov}[\lambda(\omega)]\{\varphi'(X)\}^{\mathrm{T}}\,|_{X=M[\lambda(\omega)]} =$$
$$= M^2[\lambda_2(\omega)]\,D[\lambda_1(\omega)] + M^2[\lambda_1(\omega)]\,D[\lambda_2(\omega)].$$

Отсюда, согласно формуле (7), находим

$$D(\lambda_1)+D(\lambda_2)=\frac{1}{a_0^2}D(a_1)+\frac{a_1^2}{a_0^4}D(a_0);$$
$$\lambda_1^2 D(\lambda_2)+\lambda_2^2 D(\lambda_1)=\frac{1}{a_0^2}D(a_2)+\frac{a_2^2}{a_0^4}D(a_0), \tag{8}$$

или

$$D(\lambda_1)(\lambda_2^2-\lambda_1^2)=\frac{1}{a_0^2}D(a_2)-\frac{\lambda_1^2}{a_0^2}D(a_1)+\frac{a_2^2-\lambda_1^2 a_1^2}{a_0^4}D(a_0);$$
$$D(\lambda_2)(\lambda_1^2-\lambda_2^2)=\frac{1}{a_0^2}D(a_2)-\frac{\lambda_2^2}{a_0^2}D(a_1)+\frac{a_2^2-\lambda_2^2 a_1^2}{a_0^4}D(a_0). \tag{9}$$

Поскольку формула (7) для вычисления дисперсии нелинейных функций приближенная, во вторых уравнениях систем (8) и (9) могут быть неравенства. Следовательно, для устойчивости рассматриваемой системы корни характеристического уравнения должны иметь неположительные вещественные части, т. е. если λ_1 и λ_2 — действительные числа, то

$$\lambda_1+t_\beta\sigma(\lambda_1)\le 0;$$
$$\lambda_2+t_\beta\sigma(\lambda_2)\le 0,$$

где $\sigma(\lambda_{1,2})=\sqrt{D(\lambda_{1,2})}$ — среднее квадратическое отклонение значения i-го корня; t_β — квантиль, обеспечивающий заданную доверительную вероятность β.

При этом для обеспечения надлежащего уровня значимости α (доверительной вероятности β) значение t_β нужно выбирать с учетом закона распределения значений λ_i. В особых случаях можно применять закон распределения Стьюдента [4]. В рассматриваемом случае с вероятностью β система будет устойчивой, а с вероятностью $(1-\beta)$ — неустойчивой.

Возникает также проблема с корнями, имеющими нулевую вещественную часть. Для непрерывных случайных величин вероятность получить нулевое (конкретное) значение равна нулю. Учитывая дисперсию этого значения при заданной доверительной вероятности β, найдем интервальную оценку, в которую входят и отрицательные, и положительные значения в окрестности нуля, но при положительных значениях система неустойчива, а при отрицательных — устойчива. Иногда систему считают неустойчивой, если значения корней характеристического уравнения близки к нулю. Предлагаемый ниже подход позволяет решить эту проблему.

Условие устойчивости системы со случайными значениями параметров в правой части уравнения следует формулировать так.

Утверждение 1. Для устойчивости дифференциального уравнения n-го порядка с постоянными случайными коэффициентами при заданной доверительной вероятности β необходимо и достаточно, чтобы интервальные оценки вещественных частей корней характеристического уравнения были не положительны.

Корни характеристического уравнения (точнее, их отношение) позволяют судить о возможных отклонениях в решении [8]. Квадратный корень отношения наибольшего собственного значения симметричной матрицы $A^{\mathrm{T}}A$ к наименьшему показывает увеличение помех в направлении, соответствующем наименьшему собственному значению.

Для исследования устойчивости систем можно также пользоваться полиномом Гурвица.

Характеристический полином

$$P(\lambda) = a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_n \ \ (n \geq 1), \ \ a_0 > 0,$$

называется полиномом Гурвица, если действительные части всех его корней отрицательны.

Теорема 3. Необходимым (но не достаточным) условием того, что стандартный полином есть полином Гурвица, является положительность всех его коэффициентов.

С учетом того, что коэффициенты полинома есть случайные величины, теорему следует переформулировать.

Теорема 4. Необходимым условием с доверительной вероятностью β того, что стандартный полином есть полином Гурвица, является положительность интервальных оценок всех его коэффициентов.

Рассмотрим матрицу Гурвица

$$M = \begin{bmatrix} a_1 & a_0 & 0\ldots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1\ldots & 0 \\ \ldots. & \ldots. & \ldots. & \ldots. \\ 0 & 0 & 0\ldots & a_n \end{bmatrix}$$

размером $n \times n$, где на главной диагонали находятся коэффициенты $a_1, a_2, \ldots, a_n$, справа от них по строкам — коэффициенты с убывающими номерами, а слева — с возрастающими. При этом полагается $a_i = 0$, если $i < 0$ или $i > n$.

Теорема 5. Для того чтобы система была устойчива (или полином $P(\lambda)$ был полиномом Гурвица), необходимо и достаточно, чтобы все главные диагональные миноры матрицы Гурвица:

$$\Delta_1 = a_1; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix}; \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_4 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{vmatrix}; \quad \ldots,$$

были положительными (условия Гурвица).

Рассмотрим для примера полином третьей степени со случайными параметрами a_i, $i = 0, 1, 2, 3$:

$$P_3(\lambda) = a_0\lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3, \;\; a_0 > 0.$$

Тогда матрица Гурвица имеет вид

$$M = \begin{bmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ 0 & 0 & a_3 \end{bmatrix}.$$

Условия Гурвица для данного случая

$$\Delta_1 = a_1 > 0; \quad \Delta_2 = a_1a_2 - a_0a_3 > 0; \quad \Delta_3 = a_3\Delta_2 > 0.$$

Чтобы они выполнялись, должно быть $a_i > 0$, $i = 0, 1, 2, 3$, и $a_2 > a_0a_3/a_1$. С учетом случайных значений коэффициентов полинома a_i условия Гурвица примут следующий вид:

$$a_i - t_\beta\,\sigma(a_i) > 0, \quad i = 0, 1, 2, 3;$$

$$a_2 - t_\beta\,\sigma(a_2) > \frac{a_0a_3}{a_1} + m\sigma\left(\frac{a_0a_3}{a_1}\right),$$

где $\sigma(a_i)$ — среднее квадратическое отклонение коэффициента a_i, $i = 0, 1, 2, 3$.

Согласно формуле (7),

$$\sigma^2\left(\frac{a_0a_3}{a_1}\right) = \left(\frac{a_3}{a_1}\right)^2 \sigma^2(a_0) + \left(\frac{a_0}{a_1}\right)^2 \sigma^2(a_3) + \frac{a_0^2a_3^2}{a_1^4}\sigma^2(a_1).$$

Утверждение 2. Для того чтобы система линейных однородных дифференциальных уравнений со случайными параметрами в правой части была устойчива с заданной доверительной вероятностью β (полином $P(\lambda)$ со случайными коэффициентами был полиномом

Гурвица), необходимо и достаточно, чтобы интервальные оценки всех главных диагональных миноров матрицы Гурвица содержали бы только положительные значения.

Рассмотренные выше способы учета погрешностей параметров дифференциальных уравнений и формулировка критериев устойчивости систем дифференциальных уравнений распространяются и на другие методы исследования устойчивости систем: по уравнениям первого приближения, с помощью второго метода Ляпунова и т. д. [2, 3].

К задаче исследования устойчивости систем непосредственно примыкает задача построения фазовых траекторий в окрестности точки покоя. Пусть на фазовой плоскости Ox_1x_2 расположение и вид фазовых траекторий в окрестности точки покоя системы из двух линейных однородных уравнений с постоянными случайными коэффициентами a_{ij} , $i, j = 1, 2$,

$$\dot{x}_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2;$$
$$\dot{x}_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2$$

определяются корнями λ_1 и λ_2 характеристического уравнения

$$(a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) - a_{21}a_{12} = 0,$$

или

$$\lambda^2 - \lambda(a_{11} + a_{22}) + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0.$$

Обозначим $a_{11} + a_{22} \equiv b$, $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \equiv c$. Пусть также заданы дисперсии $D(a_{ij})$ коэффициентов a_{ij}. В случае некоррелированных коэффициентов a_{ij}, согласно формуле (7),

$$D(b) = D(a_{11}) + D(a_{22});$$

$$D(c) = a_{11}^2 D(a_{22}) + a_2^2 D(a_{11}) + a_{12}^2 D(a_{21}) + a_{21}^2 D(a_{12}).$$

Найдем дисперсии $D(\lambda_i)$ корней уравнения

$$\lambda^2 - b\lambda + c = 0.$$

Согласно теореме Виета [7],

$$\lambda_1 + \lambda_2 = b;$$
$$\lambda_1\lambda_2 = c,$$

откуда [4, 6]

$$D(\lambda_1)+D(\lambda_2)=D(b);$$
$$\lambda_1^2 D(\lambda_2)+\lambda_2^2 D(\lambda_1)=D(c),$$

или

$$D(\lambda_1)=\frac{D(c)-\lambda_1^2 D(b)}{\lambda_2^2-\lambda_1^2}; \quad D(\lambda_2)=\frac{D(c)-\lambda_2^2 D(b)}{\lambda_1^2-\lambda_2^2}.$$

При заданной доверительной вероятности β можно указать интервальную оценку значений этих корней:

$$\lambda_i \pm t_\beta \sqrt{D(\lambda_i)},\ i=1,2.$$

Вид фазовых траекторий определяется знаком корней, нулевым значением корня и вещественной частью комплексного корня.

Утверждение 3. При анализе фазовой траектории в окрестности точки покоя при заданной доверительной вероятности β необходимо рассматривать интервальные оценки корней характеристического уравнения:

$$\lambda_i - t_\beta \sqrt{D(\lambda_i)} > 0; \quad \lambda_i + t_\beta \sqrt{D(\lambda_i)} < 0, \quad i=1,2,$$

причем нулевое значение корня не существует.

Остановимся подробнее на последнем утверждении. Как отмечалось выше, вероятность получить нулевой корень равна нулю. И даже если конкретная реализация привела к нулевому значению оценки корня, то в последующих реализациях можно ожидать и положительные, и отрицательные значения корней, т. е. точка покоя может быть как устойчивой, так и неустойчивой. При этом возможно изменение вида траектории. Например, при действительных корнях характеристического уравнения одного знака точка покоя называется узлом, а при разных знаках корней (что вероятно для небольших по абсолютному значению корней) — седлом. Причем такой случай не является редким.

Рассмотрим для примера три квадратных уравнения:

$$\lambda^2 - 1,0001\lambda + 0,0001 = 0;$$
$$\lambda^2 - \lambda + 0 = 0;$$
$$\lambda^2 - 0,9999\lambda - 0,0001 = 0.$$

В пределах возможных ошибок измерений коэффициенты этих уравнений можно считать одинаковыми. Корни уравнений следующие: $\lambda_1 = 1$ для всех уравнений; $\lambda_2 = 0,0001$ — для первого, 0 — для второго и $-0,0001$ — для третьего уравнения. Соответственно изменяется и вид фазовых траекторий.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. – М.: Эдиториал УРСС, 2008. – 472 с.
2. Математические основы теории автоматического регулирования: учеб. пособ. для вузов / В.А. Иванов, В.С. Медведев, Б.К. Чемоданов, А.С. Ющенко; под ред. Б.К. Чемоданова. – М.: Высш. шк., 1971. – 807 с.
3. Анализ и статистическая динамика систем автоматического управления: учеб. для вузов / К.А. Пупков, А.И. Баркин, Е.М. Воронов и др.; под ред. Н.Д. Егупова. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2000. – 748 с.
4. Теория вероятностей: учеб. для вузов / В.А. Печинкин, О.И. Тескин, Г.М. Цветкова и др.; под ред. В.С. Зарубина, А.П. Крищенко. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1998. – 456 с.
5. Сборник задач по теории вероятностей, математической статистике и теории случайных функций: учеб. пособ. для втузов / Б.Г. Володин, М.П. Галкин, И.Я. Динер и др.; под ред. А.А. Свешникова. – М.: Наука, 1970. – 656 с.
6. Грешилов А.А. Математические методы принятия решений. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2006. – 584 с.
7. Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов: пер. с нем. – М.: Наука, 1980; Лейпциг, Тойбнер, 1979. – 974 с.
8. Ланцош К. Практические методы прикладного анализа / под ред. А.М. Лопшица: пер. с англ.; – М.: Физматгиз, 1961. – 524 с.

Статья поступила в редакцию 28.09.2012