УДК 517.977, 519.626

А.А. Гурченков

УПРАВЛЕНИЕ ВРАЩАЮЩИМИСЯ ТВЕРДЫМИ ТЕЛАМИ С ЖИДКИМ НАПОЛНЕНИЕМ

Рассмотрен ряд моделей оптимального управления на основании интегральной зависимости угловой скорости возмущенного движения твердого тела с жидким наполнением от момента внешних сил. Показана ее эквивалентность системе дифференциальных уравнений, позволяющая использование формализма Гамильтона — Понтрягина для анализа задач оптимального управления. Зависимость непосредственно применима при использовании принципа оптимальности Беллмана.

E-mail: challenge2005@mail.ru

Ключевые слова: *оптимальное управление, возмущенное движение, принцип максимума, множества достижимости.*

Задачи стабилизации и управления движением ротора с полостью, содержащей жидкость, актуальны в силу многочисленных технических приложений. Они возникают в теории движения самолетов, кораблей и спутников; при изучении динамики космических аппаратов, а также при проектировании быстровращающихся роторов и гироскопов.

В работах [1—3] найдена аналитическая зависимость угловой скорости возмущенного движения вращающегося твердого тела с полостью, целиком заполненной как идеальной, так и вязкой жидкостью, от момента внешних сил. Внешнее воздействие при этом рассматривается как управляющий момент. Таким образом, появляется возможность анализа различных классов задач оптимального управления, примеры из которых представлены в данной работе.

Постановка задачи. В работах [1—3] исследовано возмущенное относительно стационарного вращения движение твердого тела с полостью, целиком заполненной идеальной или вязкой несжимаемой жидкостью, в поле массовых сил. Исходные уравнения линеаризуют относительно равномерного вращения, когда движение тела с жидкостью относительно центра инерции представляет собой равномерное вращение всей системы как твердого тела относительно оси вращения с постоянной угловой скоростью. Параметры возмущенного движения считают малыми. Полученные таким образом линеаризованные уравнения позволяют решать две задачи, причем независимо. Одна из них — задача динамики твердого тела, которая в общем случае представляет собой задачу Коши для бесконечной системы интегродифференциальных уравнений, вторая — гидродинамическая —

сводится к решению краевой задачи и зависит от формы полости и не зависит от движения тела.

Рассмотрим первую задачу в предположении, что ось вращения системы в невозмущенном движении является одновременно осью массовой и геометрической симметрии тела и полости (в этом случае уравнения значительно упрощаются). Для вязкой жидкости поправки, обусловленные вязкостью, будем учитывать методом пограничного слоя, полагая, что стенки полости являются гладкими, а движение осуществляется при больших числах Рейнольдса.

Для решения системы интегродифференциальных уравнений воспользуемся преобразованием Лапласа и обратным преобразованием с использованием функции свертки, что в итоге даст аналитическую зависимость угловой скорости Ω возмущенного движения твердого тела от момента внешних сил M:

$$\Omega(t) = \int_0^t M(\tau)\left(Xe^{p^{(1)}(t-\tau)} + Ye^{p^{(2)}(t-\tau)}\right)d\tau, \tag{1}$$

где X, Y, $p^{(1,2)}$ — постоянные, зависящие только от формы полости и вязкости жидкости.

Для симметричного тела с идеальной жидкостью в работе [1] получены условия на его форму, когда величины $p^{(1)}$ и $p^{(2)}$ являются вещественными, что обеспечивает устойчивость динамической системы. При этом колебательное движение происходит в направлении, перпендикулярном основному вращению. Для вязкой жидкости корни имеют мнимую часть, а условия отрицательности вещественной части обеспечивают асимптотическую устойчивость движения [3].

Рассмотрим теперь момент внешних сил как управляющее воздействие. В терминах теории оптимального управления компоненты угловой скорости возмущенного движения твердого тела будем использовать как фазовые переменные, а внешний момент — как неизвестную функцию управления.

Сведение к системе дифференциальных уравнений. Покажем, что соотношение (1) эквивалентно системе линейных дифференциальных уравнений. С учетом того, что $\Omega = \Omega_x - i\Omega_y$, $M = M_x - iM_y$, запишем уравнение (1) в виде

$$\Omega_x(t) = \int_0^t M_x(\tau)K_{1,1}(t,\tau)d\tau + \int_0^t M_y(\tau)K_{1,2}(t,\tau)d\tau; \tag{2}$$

$$\Omega_y(t) = \int_0^t M_x(\tau)K_{2,1}(t,\tau)d\tau + \int_0^t M_y(\tau)K_{2,2}(t,\tau)d\tau, \tag{3}$$

где Ω_x, Ω_y и M_x, M_y — компоненты угловых скоростей и моментов соответственно;

$$K_{1,1}(t,\tau) = \mathrm{Re}\left(Xe^{p^{(1)}(t-\tau)} + Ye^{p^{(2)}(t-\tau)}\right);$$

$$K_{1,2}(t,\tau) = \mathrm{Im}\left(Xe^{p^{(1)}(t-\tau)} + Ye^{p^{(2)}(t-\tau)}\right);$$

$$K_{2,1}(t,\tau) = -K_{1,2}(t,\tau) = -\mathrm{Im}\left(Xe^{p^{(1)}(t-\tau)} + Ye^{p^{(2)}(t-\tau)}\right);$$

$$K_{2,2}(t,\tau) = -K_{1,1}(t,\tau) = -\mathrm{Re}\left(Xe^{p^{(1)}(t-\tau)} + Ye^{p^{(2)}(t-\tau)}\right).$$

Рассмотрим отдельно первый подынтегральный член в уравнении (1). Пусть

$$x(t) = \int_0^t M(\tau) X e^{p^1(t-\tau)} d\tau.$$

Продифференцируем его по t и положим $x = x_1 - ix_2$:

$$\dot{x}(t) = M(t)X + p^{(1)} \int_0^t M(\tau) X e^{p^{(1)}(t-\tau)} d\tau = M(t)X + p^{(1)} x(t);$$

$$\dot{x}_1 - i\dot{x}_2 = \left(M_x - iM_y\right)\left(\mathrm{Re}(X) + i\,\mathrm{Im}(X)\right) + \left(\mathrm{Re}\left(p^{(1)}\right) + i\,\mathrm{Im}\left(p^{(1)}\right)\right)\left(x_1 - ix_2\right),$$

где

$$\dot{x}_1 = M_x \mathrm{Re}(X) + M_y \mathrm{Im}(X) + \mathrm{Re}\left(p^{(1)}\right) x_1 + \mathrm{Im}\left(p^{(1)}\right) x_2;$$

$$\dot{x}_2 = -M_x \mathrm{Im}(X) + M_y \mathrm{Re}(X) - \mathrm{Im}\left(p^{(1)}\right) x_1 + \mathrm{Re}\left(p^{(1)}\right) x_2.$$

Если x рассматривать как вектор-столбец $(x_1, x_2)^{\mathrm{T}}$, а M — как вектор-столбец $\left(M_x, M_y\right)^{\mathrm{T}}$, то

$$\dot{x} = Ax + BM, \tag{4}$$

где

$$A = \begin{pmatrix} \mathrm{Re}(X) & \mathrm{Im}(X) \\ -\mathrm{Im}(X) & \mathrm{Re}(X) \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} \mathrm{Re}\left(p^{(1)}\right) & \mathrm{Im}\left(p^{(1)}\right) \\ -\mathrm{Im}\left(p^{(1)}\right) & \mathrm{Re}\left(p^{(1)}\right) \end{pmatrix}.$$

Аналогично для второго слагаемого в уравнении (1) получаем

$$\dot{y} = Cy + DM, \tag{5}$$

где

$$C = \begin{pmatrix} \mathrm{Re}(Y) & \mathrm{Im}(Y) \\ -\mathrm{Im}(Y) & \mathrm{Re}(Y) \end{pmatrix}; \qquad D = \begin{pmatrix} \mathrm{Re}\left(p^{(2)}\right) & \mathrm{Im}\left(p^{(2)}\right) \\ -\mathrm{Im}\left(p^{(2)}\right) & \mathrm{Re}\left(p^{(2)}\right) \end{pmatrix}.$$

Поскольку $\Omega = x + y$, где Ω — вектор-столбец $\left(\Omega_x, \Omega_y\right)$, сложим уравнения (4) и (5):

$$\dot{\Omega} = Ax + BM + Cy + DM = A(\Omega - y) + BM + Cy + DM.$$

Соотношение (1) эквивалентно следующей линейной системе из четырех уравнений:

$$\dot{\vec{z}} = \begin{pmatrix} \dot{\Omega} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & -A + C \\ 0 & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Omega \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B + D \\ D \end{pmatrix} M. \tag{6}$$

Заметим, что в работах [1—3] представлено сведение к системам дифференциальных уравнений более высоких порядков, когда применение принципа максимума Понтрягина приводит к простым процедурам.

Пример из теории управления в условиях неопределенности. Сведение к системе линейных уравнений позволяет рассмотреть различные классы задач оптимального управления, для которых сформулированы необходимые условия по типу принципа максимума. Одним из таких случаев являются постановки в условиях неопределенности, включающие развитый математический аппарат на основе сопряженных переменных [4].

Пусть движение n-мерной системы подчиняется линейному уравнению, аналогичному (6):

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + BM(t), \tag{7}$$

а начальное состояние системы заранее неизвестно и подчиняется условию

$$x_0 \in X^0,$$

где X^0 — заданное выпуклое компактное множество в множестве $\mathbb{R}^n$ возможных начальных состояний системы.

Тогда в каждый момент времени известно множество $X(t; M)$, $t \in [0, T]$, объединяющее все траектории, полученные при одном и том же управлении, при всевозможных векторах x_0. Будем называть его ансамблем траекторий. Выбирая всевозможные допустимые $M(t)$, можно управлять положением ансамбля. Пусть R — известная матрица наблюдения $k \times n$ (если $k = n$, $R = E$, т. е. единичная матрица) с вектором $z\left(t; M, x^0\right) = Rx\left(t; M, x^0\right)$; $\varphi(z)$ — выпуклая, всюду конечная функция, заданная на $\mathbb{R}^k$, а $\Phi(Z) = \max\{\varphi(z) \mid z \in Z\}$, где $\varphi(z)$ — функция расстояния вида $\varphi(z) = \|z - y\|$; y — терминальная точка.

Приведем ансамбль траекторий как можно ближе к заданному состоянию в момент времени T. Задача формулируется следующим образом: среди допустимых управлений $M(t) \in U = \{M : |M(t)| \le 1\}$ найти оптимальное $M^0(t)$, удовлетворяющее условию минимума:

$$\Phi^0\left(RX\left(T; M^0\right)\right) = \min_{M(t) \in U} \{\Phi(RX(T; M))\}. \tag{8}$$

Запишем сопряженную однородную к уравнению (7) задачу с некоторым краевым условием q^0:

$$\dot{s}(t) = -s(t) A; \quad s(T) = q^0. \tag{9}$$

В работе [4] сформулированы необходимые условия оптимальности в условиях неопределенности начальных данных и коэффициентов уравнения (7). Оптимальное управление $M^0(t)$ соотношения (8) удовлетворяет условию минимума

$$s\left(t; q^0\right) B(t) M^0(t) = \min_{M \in U} \left\{s\left(t; q^0\right) B(t) M(t)\right\} \tag{10}$$

на решении $s\left(t; q^0\right)$, где $q^0 = R^T l^0$, сопряженной задачи (9), порожденном элементом l^0, который максимизирует функцию $F(l)$:

$$F(l) = -\int_0^T \rho(-s(t; q) B(t) \mid U)\, dt - f^{**}(l). \tag{11}$$

Пусть

$$f(l) = \varphi^*(l) - \rho\left(s(0; q) \mid X^0\right).$$

Сопряженная функция

$$f^*(y) = \sup\{\langle x, y\rangle - f(x) \mid x \in E\},$$

а опорная функция к множеству E определяется как

$$\rho(x \mid E) = \sup\{\langle x, y\rangle, y \in E\}.$$

Подынтегральное выражение (11) имеет вид

$$\rho\left(s(t;q)B(t)\,|\,U\right)=\int_0^T \max_{M\in U}\left\{s(t;q)B(t)M(t)\right\}dt\,. \qquad (12)$$

Применительно к рассматриваемой динамической системе матрица наблюдения будет состоять только из двух ненулевых элементов $R_{1,1}=R_{2,2}=1$. Подынтегральное выражение в формуле (12) с учетом ограничений на управление принимает вид

$$\max_{M\in U}\left\{s(t;q)B(t)M(t)\right\}=\begin{pmatrix}\left|(X+Y)s_1+Xs_3+Ys_4\right|\\ \left|(X+Y)s_2+Xs_5+Ys_6\right|\end{pmatrix}.$$

Найдем выражение для $f^{**}(l)$. Согласно работе [4], если $\varphi(z)$ — функция расстояния до множества, то $\varphi^*(z)$ при $z=l$ имеет вид

$$\varphi^*(l)=(y,l)+\delta(l\,|\,\sigma_1[0]),$$

где $\delta(l\,|\,\sigma_1[0])$ — индикаторная функция, определяемая как

$$\delta(l\,|\,X)=\begin{cases}0, & l\in X;\\ +\infty, & l\notin X,\end{cases}$$

а $\sigma_1[0]$ — единичный шар с центром в точке 0.

Пусть X^0 — множество вида $\{x\in X^0 \Leftrightarrow |x_i|\le a_i,\ a_i\equiv 0,$ $i=3,\ldots,n\}$ — параллелепипед, в котором $a_{1,2}$ — заранее заданные числа. Тогда, по определению,

$$\rho\left(s(0;q)\,|\,X^0\right)=\sup_{x\in X^0}\left\{\left\langle s(0;q),x\right\rangle\right\}=\sum_{i=3}^{n}\sup_{-a_i\le x_i\le a_i}\left\{\left\langle s_i(0;q),x_i\right\rangle\right\}=$$

$$=\sum_{i=3}^{n}\left|s_i(0;q)\right|\left|a_i\right|;$$

$$f(l)=\varphi^*(l)-\rho\left(s(0;q)\,|\,X^0\right)=(y,l)+\delta(l\,|\,\sigma_1[0])-\sum_{i=1}^{2}\left|s_i(0;q)\right|\left|a_i\right|.$$

Поскольку $-\sum_i\left|s_i(0;q)\right|\left|a_i\right|$ — выпуклая функция и сумма выпуклых функций — выпуклая функция, и $f(l)$ — выпуклая функция, значит $f(l)=f^{**}(l)$.

Найдем максимум функции (11). С учетом вида $f^{**}(l)$ запишем

$$F(l) = -\int_0^T \rho\left(-s(t;q)B(t)\,|\,U\right)dt - (y,l) - \delta\left(l\,|\,\sigma_1[0]\right) + \sum_{i=1}^{2} |s_i(0;q)||a_i|. \quad (13)$$

Из определения индикаторной функции следует, что максимум функции (13) будет достигаться на множестве $\|l\| \le 1.$ Аналитическое определение значения l^0, соответствующего максимуму, весьма затруднительно, поскольку все входящие в выражение (13) величины зависят от параметров модели и для каждого конкретного случая получается своя функция. Численно же данную задачу решают известными оптимизационными методами — рассматривают варианты численно найденных значений l^0 при различных значениях параметров исходной системы управления (7), а также параметров a_1 и a_2, задающих неопределенность в начальном состоянии системы. В одних случаях функция $F(l)$ унимодальная, в других — ее поведение является более сложным.

Для нахождения оптимального управления подставим полученные значения параметра l^0 в условие (10):

$$s\left(t;q^0\right)B(t)M^0(t) = \min_{M\in U}\left\{s\left(t;q^0\right)B(t)M(t)\right\}, \;\; q^0 = R^{\mathrm{T}}l^0. \quad (14)$$

Поскольку мы рассматриваем случай ограничений на управление вида $M(t) \in U = \{M : |M(t)| \le 1\}$, компоненты $M^0(t)$ вычисляют так:

$$M_x^0 = \begin{cases} -1, (X+Y)s_1\left(t;q^0\right) + Xs_3\left(t;q^0\right) + Ys_4\left(t;q^0\right) \ge 0; \\ 1, (X+Y)s_1\left(t;q^0\right) + Xs_3\left(t;q^0\right) + Ys_4\left(t;q^0\right) < 0; \end{cases}$$

$$M_y^0 = \begin{cases} -1, (X+Y)s_2\left(t;q^0\right) + Xs_5\left(t;q^0\right) + Ys_6\left(t;q^0\right) \ge 0; \\ 1, (X+Y)s_2\left(t;q^0\right) + Xs_5\left(t;q^0\right) + Ys_6\left(t;q^0\right) < 0, \end{cases}$$

где s_i определяют согласно (9).

Построение множеств достижимости. При рассмотрении задач оптимального управления помимо сведения к системе дифференциальных уравнений можно использовать соотношение (1) напрямую. Это осуществляется, в частности, при построении множеств достижимости и при применении описанного далее метода динамического программирования Беллмана.

Множества достижимости фазовых состояний системы в различные моменты времени играют важную роль при решении задач управления, наблюдения и прогнозирования [5]. Точное или приближенное знание множеств достижимости позволяет делать выводы о предельных возможностях системы управления, оценивать разброс траекторий параметров задачи или внешних возмущений в условиях неопределенности.

Для анализа и нахождения множества достижимости системы (6) нас будут интересовать только первые две компоненты Ω_x и Ω_y фазовой переменной. Пусть на вектор управлений $M(t) = \left(M_x(t), M_y(t)\right)^{\mathrm{T}} = \left(M_1(t), M_2(t)\right)^{\mathrm{T}}$ наложено ограничение

$$M(t) \subset U, \tag{15}$$

где U — заранее заданное двумерное множество в пространстве управлений.

Пусть в начальный момент времени задано начальное состояние системы Z_0:

$$z(t_0) \in Z_0. \tag{16}$$

Приведем определение множества достижимости [5].

Определение 1. Множеством достижимости $D(t_0, T, Z_0, U)$ системы (6) с начальными условиями (16) называется совокупность концов $z(T)$ всех траекторий этой системы, начинающихся в момент времени t_0 в точках начального множества Z_0.

Рассмотрим следующую задачу оптимального управления для системы (6) с ограничением (15) и начальным условием (16):

$$J = \left(\vec{c}, \vec{z}(T)\right) \to \max, \ T > t_0, \ |\vec{c}| = 1, \tag{17}$$

где $\vec{c}$ — заданный вектор; T — фиксированный момент времени окончания процесса.

Решая задачу (17) для любого вектора $\vec{c}$, для каждого i-го его значения получаем точку $\vec{z}_i^{\,*}(T)$ на границе множества достижимости и опорную гиперплоскость в этой точке. Определив эти точки и опорные гиперплоскости, можно получить как внешнюю, так и внутреннюю аппроксимацию множества $D(t_0, T, Z_0, U)$. Чем большее число точек найдено, тем лучше внутренняя и внешняя аппроксимации приближаются к множеству достижимости.

Рассмотрим решение задачи (17) применительно к системе (6) при ограничениях на управление вида

$$a_i \le M_i(t) \le b_i, \ \ i = 1, 2, \tag{18}$$

где a_i, b_i — заданные числа, и начальным условием $\vec{z}(t_0) = 0$.

Подставив выражения (2) и (3) в (17), получим следующую оптимизационную задачу:

$$J = \int_0^T M_1(\tau)\left(c_1 K_{1,1}(T,\tau) + c_2 K_{2,1}(T,\tau)\right) d\tau +$$
$$+ \int_0^T M_2(\tau)\left(c_1 K_{1,2}(T,\tau) + c_2 K_{2,2}(T,\tau)\right) d\tau \to \max,$$

откуда для каждого момента времени $t \in [t_0, T]$ находим оптимальное управление

$$M_i^*(t) = \begin{cases} b_i, & \sum\limits_{j=1,2} c_j K_{j,i}(T,t) \ge 0; \\ a_i, & \sum\limits_{j=1,2} c_j K_{j,i}(T,t) < 0 \end{cases} \qquad (19)$$

и соответствующую ему оптимальную траекторию

$$z_i^*(T) = \int_0^T \sum_{j=1}^{2} M_j^*(t) K_{i,j}(T,t)\, dt. \qquad (20)$$

Все вышесказанное справедливо и для случая $\vec{z}_0 \ne 0.$ Тогда оптимальное управление не изменится, а выражение (20) примет вид

$$z_i^*(T) = z_{0_i} + \int_0^T \sum_{j=1}^{2} M_j^*(t) K_{i,j}(T,t)\, dt. \qquad (21)$$

В качестве множества достижимости получаем двумерные фигуры в координатах $\Omega_x - \Omega_y$.

Аналогично можно рассмотреть другие виды ограничений на управление. Например, для ограничений в виде круга $\left|\vec{M}\right| \le r$ выражение для оптимального управления примет вид

$$M_i^*(t) = r\, \frac{\sum\limits_{j=1}^{2} c_j K_{j,i}(T,t)}{\left|\sum\limits_{j=1}^{2} c_j K_{j,i}(T,t)\right|}.$$

Примеры построенных множеств достижимости для задач с жидким наполнением для случаев вязкой и идеальной жидкостей при ограничениях вида (18) показывают, что вязкость вносит поправки, которые сужают множество достижимости. Тем не менее при этом существуют точки, которые принадлежат множеству достижимости для вязкой жидкости, но не принадлежат множеству достижимости для случая идеальной жидкости.

Использование рекуррентных соотношений Беллмана в задаче с ограничениями на управление. Целый ряд интересных и важных формализаций физических процессов можно трактовать как многошаговые процессы. Мы приходим к теории динамического программирования, представляющего собой подход, основанный на использовании рекуррентных функциональных уравнений и принципа оптимальности Беллмана [6]. Покажем, каким образом данный подход можно применить для решения задач управления твердыми телами с жидким наполнением [7].

Рассмотрим следующую задачу оптимального управления:

$$J(M) = g(\vec{x}(T)) + \gamma \int_0^T F\left(\vec{M}(t)\right) dt \to \min, \tag{22}$$

с ограничениями вида

$$\vec{M}(t) \in U.$$

Поскольку нам известна зависимость (1) траекторий от управления, выражение (22) можно переписать в виде

$$J(M) = g\left(\vec{x}(t_0) + \int_{t_0}^{T} K(\tau)\vec{M}(\tau)\,d\tau\right) + \gamma \int_0^T F\left(\vec{M}(t)\right) dt \to \min, \tag{23}$$

где $K(t)$ — матрица из элементов $K_{i,j}(t)$, $i, j = 1, 2$ (см. формулы (2) и (3)). Кроме того,

$$F\left(\vec{M}(t)\right) = \left\|\vec{M}(t)\right\|_{E^m}^2; \quad g\left(\vec{x}\left(T; \vec{M}\right)\right) = \left\|\vec{x}(T) - \vec{y}^0\right\|_{E^n}^2$$

и в рассмотренных ранее примерах функционалов $t_0 = 0$, $\vec{x}(t_0) = 0$. В дальнейшем вид функций F и g для описания метода не имеет значения и может быть более общий.

Воспользуемся методом Беллмана для решения задачи (23). Запишем скалярную функцию Беллмана:

$$f(\vec{x}, t) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n, t) =$$

$$= \min_{\vec{M}(t) \in U} \left[g\left(\vec{x} + \int_t^T K(\tau)\vec{M}(\tau)\,d\tau\right) + \gamma \int_t^T F\left(\vec{M}(\tau)\right) d\tau \right]. \tag{24}$$

Введем сетку по времени $t_i = i\Delta$, $t_{i+1} = t_i + i\Delta$ на отрезке $[0, T]$ (набор индексов i определяется рассматриваемым отрезком времени). Тогда для функции (24) справедливо следующее рекуррентное соотношение:

$$f\left(\vec{x},t_i\right)=\min_{\vec{M}(t)\in U}\left[g\left(\vec{x}+\int_{t_i}^{T}K(\tau)\vec{M}(\tau)\,d\tau\right)+\gamma\int_{t_i}^{T}F\left(\vec{M}(\tau)\right)d\tau\right]=$$

$$=\min_{\vec{M}(t)\in U}\left[g\left(\vec{x}+\int_{t_i}^{t_i+\Delta}K(\tau)\vec{M}(\tau)\,d\tau+\int_{t_i+\Delta}^{T}K(\tau)\vec{M}(\tau)\,d\tau\right)+\gamma\int_{t_i}^{T}F\left(\vec{M}(\tau)\right)d\tau\right]=$$

$$=\min_{\vec{M}(t)\in U}\left[g\left(\vec{x}+\int_{t_i+\Delta}^{T}K(\tau)\vec{M}(\tau)\,d\tau+K(t_i)\vec{M}(t_i)\mathit{\Delta}\right)+\right.$$

$$\left.+\gamma\int_{t_i}^{t_i+\Delta}F\left(\vec{M}(\tau)\right)d\tau+\gamma\int_{t_i+\Delta}^{T}F\left(\vec{M}(\tau)\right)d\tau\right]=$$

$$=\min_{\vec{M}(t)\in U}\left[\gamma F\left(\vec{M}(t_i)\right)+f\left(\vec{x}+K(t_i)\vec{M}(t_i)\Delta,\,t_i+E\right)\right],$$

или

$$f\left(\vec{x},t_i\right)=\min_{\vec{M}(t)\in U}\left[\gamma F\left(\vec{M}(t_i)\right)+f\left(\vec{x}+K(t_i)\vec{M}(t_i)\mathit{\Delta},\,t_i+\mathit{\Delta}\right)\right].\qquad(25)$$

Граничное условие для функции (25) при $t_i=T$ имеет вид

$$f\left(\vec{x},T\right)=g\left(\vec{x},T\right).\qquad(26)$$

Согласно определению (24), для решения задачи (22) требуется отыскать значение функции Беллмана $f(0,0)$ в начальный момент времени с начальным условием

$$x\left(t_0\right)=x(0)=0.\qquad(27)$$

Решим задачу (22) при ограничениях на управление вида $\left|M_l(t)\right|\le R^2$, $l=x,y$. Будем рассматривать дискретные значения компонент управления с некоторым шагом разбиения Δ_M на всей области определения (около $N_M=2R^2/\Delta_M+1$ значений). Тогда получаем N_M^2 всевозможных значений вектора управлений в каждой точке t_i сетки по времени $t_i=i\Delta,\ t_{i+1}=t_i+i\Delta$ на отрезке $[0,T]$.

Введем сетку в пространстве траекторий с шагом Δ_x. Поскольку никакие ограничения на фазовые переменные не накладываются, можно построить множество достижимости $X_{\max}$ системы, описываемой соотношением (6), для каждого момента времени t_i, используемого в итерационном процессе, ограничив тем самым всевозможные допустимые значения фазовых переменных. Из выражения (1) получаем аппроксимацию для элемента $X_{\max}$:

$$x^l = \int_0^T \sum_j M_j(t) K_{l,j}(t)\, dt \le \sum_j \int_0^T \left| K_{l,j}(t) \right| dt = x_{\max}.$$

Таким образом, для $t_i = T$ находим $N_x = 2x_{\max} / \Delta_x + 1$ всевозможных значений фазовой переменной.

В каждой точке сетки по фазовой переменной для каждого t_i рассчитаем функцию Беллмана вида (25), начиная с граничного условия (26) ($t_i = T$, $t_i = T - \Delta$, $t_i = T - 2\Delta$, …, $t_i = 0$). Для оптимизации итерационного процесса и исключения перебора всевозможных значений фазовой переменной рассмотрим только значения, удовлетворяющие аппроксимациям множества достижимости системы. Помимо значения функции Беллмана будем хранить еще и значения оптимального управления в каждой точке, удовлетворяющего соотношению (25). При расчете компонент оптимального управления для *i*-го шага осуществляем контроль принадлежности полученной точки $\vec{x} + K(t_i)\vec{M}(t_i)\Delta$ для $i+1$-го шага множеству достижимости, а ее значение интерполируем ближайшим значением сетки.

В результате полного расчета ($t_i = 0$) получаем таблицы значений оптимального управления для каждой точки фазового пространства и значения функции Беллмана для каждого t_i. Среди всех значений фазовой переменной при $t = 0$ удовлетворительными будут только значения $x^l(0) = 0$, соответствующие начальному условию (27). Обратным пересчетом по таблицам восстановим оптимальную траекторию в каждый момент времени, после чего получим оптимальное значение функционала исходной задачи. Отметим, что значение функции Беллмана достаточно сохранять только для предыдущего шага по времени.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гурченков А.А., Есенков А.С., Цурков В.И. Управление движением ротора с полостью, содержащей идеальную жидкость. Ч. 1 // Известия РАН. Теория и системы управления. – 2006. – № 1. – С. 141–148.
2. Гурченков А.А., Есенков А.С., Цурков В.И. Управление движением ротора с полостью, содержащей идеальную жидкость. Ч. 2 // Известия РАН. Теория и системы управления. – 2006. – № 3. – С. 82–89.

3. Г у р ч е н к о в А.А., Е с е н к о в А.С., Ц у р к о в В.И. Управление движением ротора с полостью, содержащей вязкую жидкость // Автоматика и телемеханика. – 2007. – № 2. – С. 81–94.
4. К у р ж а н с к и й А.Б. Управление и наблюдение в условиях неопределенности. – М.: Наука, 1977. – 392 с.
5. Ч е р н о у с ь к о Ф.Л. Оценивание фазового состояния динамических систем. Метод эллипсоидов. – М.: Наука, 1998. – 320 с.
6. Б е л л м а н Р. Динамическое программирование: пер. с. англ. – М.: Иностр. лит., 1960. – 450 с.
7. Б е л л м а н Р., Д р е й ф у с С. Прикладные задачи динамического программирования: пер. с. англ. – М.: Наука, 1965. – 460 с.

Статья поступила в редакцию 28.09.2012