УДК 531.352

А.А. Панкратов

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ И УСЛОВНО-ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ДВИЖЕНИЯ СПУТНИКА-ГИРОСТАТА ПОД ДЕЙСТВИЕМ ГРАВИТАЦИОННОГО МОМЕНТА НА КРУГОВОЙ ОРБИТЕ

Проведено исследование периодических движений осесимметричного спутника-гиростата, центр масс которого движется по кеплеровой круговой орбите. В качестве переменных была использована модификация переменных Андуайе, в уравнениях движения спутника относительно центра масс учитывали только гравитационный момент. Система дифференциальных уравнений рассматриваемой задачи содержит малый параметр, характеризующий близость осевого и экваториального моментов инерции спутника-гиростата, а также малость проекции собственного кинетического момента гиростата на экваториальную плоскость. Уравнения движения задачи, допускающие интеграл Якоби, с помощью которого осуществляется понижение порядка системы на две единицы, приведены к так называемой форме Уиттекера. Методом Пуанкаре доказано существование многопараметрических семейств периодических решений приведенной системы, найдены порождающие периодические решения.

E-mail: a.a.pankratov@gmail.com

Ключевые слова*: *спутник-гиростат, переменные Андуайе, гравитационный момент, метод Пуанкаре, периодические и условно-периодические движения.

Твердое тело с полостями, заполненными идеальной несжимаемой жидкостью, совершающей потенциальное движение, и тело-носитель, в котором жестко закреплена ось вращения симметричного ротора, являются наиболее известными, но не единственными примерами механической системы, называемой гиростатом. Понятие гиростата неоднократно обобщалось и уточнялось. Работа Н. Е. Жуковского [1], опубликованная в 1885 г., сыграла важную роль в формировании представлений об основных характеристиках движения гиростата. Жуковский показал, что потенциальное движение жидкости в полости определяется движением тела, само же движение тела происходит так, как если бы жидкость была заменена эквивалентным твердым телом. Несмотря на то что многие классические задачи динамики твердого тела удалось обобщить на случай гиростата, специфические свойства движения гиростата остаются еще недостаточно изученными.

Постановка задачи. Под спутником-гиростатом будем понимать твердое тело (движущееся по орбите) с расположенными внутри него симметричными роторами (маховиками). Оси вращения роторов жестко связаны с несущим телом и совпадают с осью симметрии каждого ротора. Предположим, что угловые скорости роторов относительно несущего тела постоянны.

В настоящей работе проведено исследование различных семейств периодических решений в задаче о вращательном движении спутника-гиростата, центр масс которого движется по круговой орбите, собственный кинетический момент роторов мал, а эллипсоид инерции спутника-гиростата близок к сфере. Для нахождения периодических решений были использованы достаточные условия Пуанкаре [2, 3] и условия, полученные в работах [4, 5]. Для этого уравнения движения приведены к форме, необходимой для применения метода малого параметра Пуанкаре. Для получения требуемых уравнений сначала необходимо вывести дифференциальные уравнения вращательного движения спутника-гиростата в углах Эйлера и сопряженных канонических переменных, а затем с помощью канонических преобразований перейти к безразмерным переменным, типа переменных Андуайе. Анализ найденных периодических решений ограничен порождающими решениями.

Уравнения движения. Рассмотрим движение динамически симметричного спутника-гиростата вокруг центра масс S под действием гравитационной силы тяготения центрального тела O (однородного шара), относительно которого центр масс спутника описывает кеплеровскую орбиту радиусом R. Для определения движения спутника-гиростата введем следующие системы координат:

инерциальную $Oxyz$ с началом координат в точке O и осями $Ox, Oy,$ расположенными в плоскости орбиты;

декартову $Sxyz$ с началом координат в точке S — центре масс спутника-гиростата и осями Sx, Sy, Sz, параллельными осям Ox, Oy, Oz соответственно;

подвижную $S\xi\eta\zeta$, оси которой направлены по главным центральным осям инерции спутника-гиростата.

Пусть A, B, C — моменты инерции спутника-гиростата (вместе с роторами) относительно осей $S\xi, S\eta, S\zeta$ соответственно. Обозначим K_ξ, K_η, K_ζ проекции собственного кинетического момента роторов на оси $S\xi, S\eta, S\zeta.$ Тогда $\mathbf{K} = (K_\xi, K_\eta, K_\zeta)$ — кинетический момент роторов относительно системы координат $S\xi\eta\zeta.$ Отметим, что в рассматриваемой задаче K_ξ, K_η, K_ζ — постоянные величины.

Ориентацию системы координат $S\xi\eta\zeta$ относительно системы $Sxyz$ зададим углами Эйлера $\varphi, \psi, \theta.$ Кинетическая энергия вращательного движения спутника-гиростата с точностью до аддитивной постоянной имеет вид

$$T = \frac{1}{2}\left(A\omega_\xi^2 + B\omega_\eta^2 + C_\zeta^2 \right) + K_\xi\omega_\xi + K_\eta\omega_\eta + K_\zeta\omega_\zeta , \qquad (1)$$

где $\omega_\xi, \omega_\eta, \omega_\zeta$ — проекции угловой скорости спутника на оси $S\xi, S\eta, S\zeta.$ Зависимости проекций $\omega_\xi, \omega_\eta, \omega_\zeta$ от углов φ, ψ, θ и их производных заданы кинематическими уравнениями Эйлера. Углы Эйлера можно рассматривать как обобщенные координаты, которые вместе с обобщенными импульсами p_φ, p_ψ, p_θ определяются формулами

$$p_\varphi = \frac{\partial T}{\partial \dot\varphi}, \;\; p_\psi = \frac{\partial T}{\partial \dot\psi}, \;\; p_\theta = \frac{\partial T}{\partial \dot\theta} \tag{2}$$

и образуют в рассматриваемой задаче систему канонических переменных.

Опуская промежуточные выкладки, запишем гамильтониан задачи H_* в канонических переменных φ, ψ, θ, p_φ, p_ψ, p_θ:

$$\mathrm{H}_* = \frac{1}{2}\left(\frac{p_\varphi}{\sin\theta} - p_\varphi \operatorname{ctg}\theta\right)^2 \left(\frac{\sin^2\varphi}{A} + \frac{\cos^2\varphi}{B}\right) + p_\theta \sin\varphi\cos\varphi \times$$

$$\times\left(\frac{p_\psi}{\sin\theta} - p_\varphi \operatorname{ctg}\theta\right)\left(\frac{1}{A} - \frac{1}{B}\right) + \frac{1}{2}p_\theta^2\left(\frac{\cos^2\varphi}{A} + \frac{\sin^2\varphi}{B}\right) + \frac{p_\varphi^2}{2C} -$$

$$-\left(\frac{p_\psi}{\sin\theta} - p_\varphi \operatorname{ctg}\theta\right)\left(\frac{K_\xi\sin\varphi}{A} + \frac{K_\eta\cos\varphi}{B} + p_\theta\frac{K_\eta\sin\varphi}{B} - \frac{K_\xi\cos\varphi}{A}\right) -$$

$$-p_\varphi\frac{K_\xi}{C} - U(\varphi, \psi, \theta). \tag{3}$$

Далее выполним преобразование $(\theta, \varphi, \psi, p_\theta, p_\varphi, p_\psi) \to (l', g', h', L', G', H')$, где G' — модуль вектора кинетического момента вращательного движения спутника-гиростата, т. е. вектора $\mathbf{G}' = (A\omega_\xi + K_\xi)\mathbf{i} + (B\omega_\eta + K_\eta)\mathbf{j} + (C\omega_\zeta + K_\zeta)\mathbf{k}$; H' — проекция вектора $\mathbf{G}'$ на ось Sz; L' — проекция вектора $\mathbf{G}$ на ось $S\zeta$. Пусть Σ — плоскость, проходящая через центр масс спутника-гиростата и перпендикулярная вектору $\mathbf{G}$. Тогда l' — угол между осью $S\xi$ и линией пересечения плоскости $\sum$ с плоскостью $S\xi\eta$; g' — угол между линиями пересечения плоскости $\sum$ с плоскостями $S\xi\eta$ и Sxy; h' — угол между осью Sx и линией пересечения плоскостей $\sum$ и Sxy. Переменные l', g', h' являются углами, изменяющимися по модулю 2π. Отметим, что связь между импульсами $p_\theta, p_\varphi, p_\psi$ и L', G', H' можно получить с помощью формул (1), (2), учитывая определения переменных L', G', H', l', g', h':

$$p_\theta = \sqrt{G'^2 - L'^2}\sin(l' - \varphi), \;\; p_\varphi = L', \;\; p_\psi = H'. \tag{4}$$

Используя формулы сферической тригонометрии [3], получаем следующее дифференциальное соотношение:

$$dg' = \cos\theta d(\varphi - l') + \cos\rho d(\psi - h') - \sin(\varphi - l')\sin\theta d\theta, \qquad (5)$$

где

$$\cos\theta = \frac{L'}{G'},\ \cos\rho = \frac{H'}{G'},\ \sin\theta = \sqrt{\frac{G'^2 - L'^2}{G'}},\ \sin\rho = \sqrt{\frac{G'^2 - L'^2}{G'}}.$$

Умножив соотношение (5) на величину G', на основании формул (4) имеем

$$G'dg' + L'dl' + Hdh' = p_\varphi d\varphi + p_\psi d\psi + p_\theta d\theta.$$

Из этого соотношения следует, что преобразование $(\theta, \varphi, \psi, p_\theta, p_\varphi, p_\psi) \to (l', g', h', L', G', H')$ является однородным каноническим преобразованием [3].

Используя определения канонических переменных L', G', H', l', g', h', соотношения (4) и формулы сферической тригонометрии, получаем

$$A\omega_\xi = G'\sin\theta\sin l' - K_\xi \equiv \sqrt{G'^2 - L'^2}\sin l' - K_\xi,$$

$$B\omega_\eta = G'\sin\theta\cos l' - K_\eta \equiv \sqrt{G'^2 - L'^2}\cos l' - K_\eta,$$

$$C\omega_\zeta = G'\cos\theta - K_\zeta \equiv L' - K_\zeta.$$

С помощью формул сферической тригонометрии можно получить формулы, связывающие углы Эйлера с переменными Андуайе [3]. Здесь приведем необходимую в дальнейшем запись направляющих косинусов a_{13}, a_{23}, a_{33} через переменные L', G', H', l', g', h':

$$a_{13} = \left(\frac{H'}{G'}\sqrt{1 - \left(\frac{L'}{G'}\right)^2}\cos g' + \frac{L'}{G'}\sqrt{1 - \left(\frac{H'}{G'}\right)^2}\right)\sin h' +$$

$$+ \sqrt{1 - \left(\frac{L'}{G'}\right)^2}\sin g'\cos h',$$

$$a_{23} = \left(\frac{H'}{G'}\sqrt{1 - \left(\frac{L'}{G'}\right)^2}\cos g' + \frac{L'}{G'}\sqrt{1 - \left(\frac{H'}{G'}\right)^2}\right)\sin h' + \qquad (6)$$

$$+ \sqrt{1 - \left(\frac{L'}{G'}\right)^2}\sin g'\sin h',$$

$$a_{33} = \frac{L'H'}{G'^2} - \sqrt{1 - \left(\frac{L'}{G'}\right)^2}\sqrt{1 - \left(\frac{H'}{G'}\right)^2}\cos g'.$$

Таким образом, кинетическую энергию и силовую функцию U, а следовательно, и гамильтониан задачи (3) можно записать в переменных L', G', H', l', g', h'. С точностью до аддитивной константы имеем

$$\mathrm{H}' = \frac{\left(G'^2 - L'^2\right)}{2}\left(\frac{\sin^2 l'}{A} + \frac{\cos^2 l'}{B}\right) + \frac{L'^2}{2C} + K_\xi \frac{\sqrt{G'^2 - L'^2}}{A}\sin l' -$$

$$-\frac{K_\eta}{B}\sqrt{G'^2 - L'^2}\cos l' - \frac{K_\zeta}{C}L' - U. \qquad (7)$$

Ограничимся следующим общепринятым [6] приближенным значением силовой функции:

$$U = \frac{3fm}{2R^3}\left[\left(A - B\right)\gamma'^2 + \left(A - C\right)\gamma''^2\right], \qquad (8)$$

где f — гравитационная постоянная; m — масса спутника-гиростата; $\left|\mathbf{R}\right| = R$ – модуль радиус-вектора центра масс спутника-гиростата; γ' — косинус угла между радиус-вектором $\mathbf{R}$ и осью спутника $S\eta$; γ'' — косинус угла между радиус-вектором центра масс спутника $\mathbf{R}$ и осью $S\zeta$. В рассматриваемом случае $R = \mathrm{const}$ (центр масс спутника-гиростата движется по круговой орбите) и моменты инерции A и B равны (спутник осесимметричный). Тогда силовую функцию (8) можно представить в виде

$$U = \frac{3}{2}\omega^2(A - C)\gamma''^2. \qquad (9)$$

Здесь ω — среднее орбитальное движение спутника. Так как

$$\gamma'' = a_{13}\frac{x}{R} + a_{23}\frac{y}{R} + a_{33}\frac{z}{R} = \frac{\mathbf{R}\cdot\mathbf{e}_\zeta}{R},$$

где $\mathbf{e}_\zeta$ — орт оси S_ζ; x, y, z — координаты центра масс спутника-гиростата,

$$x = R\cos\omega t', \quad y = R\sin\omega t', \quad z = 0,$$

то

$$\gamma'' = a_{13}\cos\omega t' + a_{23}\sin\omega t'. \qquad (10)$$

Формулы (6), (9) и (10) позволяют представить силовую функцию U явной функцией элементов Андуайе и времени t'. Опуская выкладки, окончательно представим силовую функцию в тригонометрическом виде:

$$U\left(L', G', H', g', h', t'\right) =$$
$$= \omega^2\left(A - C\right)\sum_{k_1, k_2} U_{k_1, k_2}(\theta, \rho)\cos\left[k_1 g' + k_2\left(h' - \omega t'\right)\right].$$

Здесь суммирование проводится по индексам $k_1 = 0, 1, 2;$ $k_2 = 0, \pm 2,$ а коэффициенты разложения $U_{k_1, k_2}(\theta, \rho,)$ определяются следующими формулами:

$$U_{0.0} = \frac{3}{4}\sin^2\theta + \frac{3}{4}\left(1 - \frac{3}{2}\sin^2\theta\right)\sin^2\rho,\ U_{2.0} = -\frac{3}{8}\sin^2\theta\sin^2\rho,$$

$$U_{1.0} = \frac{3}{8}\sin 2\rho\sin 2\theta,\ U_{0.2} = -\frac{3}{4}\left(1 - \frac{3}{2}\sin^2\theta\right)\sin^2\rho, \tag{11}$$

$$U_{2.\pm 2} = -\frac{3}{16}\sin^2\theta(1 \pm \cos\rho)^2,\ U_{1.\pm 2} = \mp\frac{3}{8}\sin 2\theta\sin\rho(1 \pm \cos\rho).$$

Выполним каноническую замену переменных $H'' = H'$, $G'' = G'$, $L'' = L'$, $h'' = h' - \omega t'$, $g'' = g'$, $l'' = l'$, что соответствует переходу к вращающейся вокруг оси Oz с угловой скоростью ω системе координат $Oxyz$ (в этой системе центр масс спутника-гиростата покоится). В результате такой замены уравнения движения принимают автономный вид. Для упрощения последующих выкладок перейдем от переменных $L'', G'', H'', l'', g'', h''$ к новым (безразмерным) каноническим переменным $L,\ G,\ H,\ l,\ g,\ h$ и безразмерному времени t:

$$L = \frac{L''}{A\omega},\ G = \frac{G''}{A\omega},\ H = \frac{H''}{A\omega},\ l = l'',\ g = g'',\ h = h'',\ t = \omega t',$$

$$\mathrm{H}_{\text{пр}} = \frac{\mathrm{H}''}{A\omega^2},$$

где $\mathrm{H}_{\text{пр}}$ — преобразованный гамильтониан; H'' — гамильтониан (7), записанный в соответствующих переменных. С учетом изложенного запишем гамильтониан (7) для случая $A = B$:

$$\mathrm{H}_{\text{пр}} = \frac{G^2}{2} + \frac{A - C}{2C}L^2 - H - \frac{\sqrt{G^2 - L^2}}{A\omega}\left(K_\xi\sin l + K_\eta\cos l\right) -$$
$$- \frac{K_\zeta}{C\omega}L - \hat{U}(L, G, H, g, h). \tag{12}$$

Здесь

$$\hat{U} \equiv \frac{1}{A\omega^2} U(L, G, H, g, h) = \frac{A-C}{A} \sum_{k_1, k_2} U_{k_1, k_2}(\rho, \theta) \cos\left(k_1 g + k_2 h\right). \tag{13}$$

Введем вспомогательные обозначения $æ_0$, α, β, определяемые формулами

$$\frac{K_\xi}{A\omega} = æ_0 \sin\beta \sin\alpha, \quad \frac{K_\eta}{A\omega} = æ_0 \sin\beta \cos\alpha, \quad \frac{K_\zeta}{C\omega} = æ_0 \cos\beta,$$

тогда гамильтониан (12) можно представить в виде

$$\mathrm{H}_{\text{пр}} = \frac{G^2}{2} + \frac{A-C}{2C} L^2 - H - æ_0 G [\sin\beta \sin\theta \cos(l-\alpha) + \cos\beta \cos\theta] -$$
$$-\hat{U}(L, G, H, g, h), \tag{14}$$

или

$$\mathrm{H}_{\text{пр}} = \frac{G^2}{2} + \frac{A-C}{2C} L^2 - H - æ_0 \left\{ \sqrt{G^2 - L^2} \sin\beta \cos(l-\alpha) + L \cos\beta \right\} - \hat{U}. \tag{15}$$

Запишем дифференциальные уравнения вращательного движения спутника-гиростата в виде

$$\begin{aligned} \frac{dl}{dt} &= \frac{\partial}{\partial L} \mathrm{H}_{\text{пр}}, \quad \frac{dg}{dt} = \frac{\partial}{\partial G} \mathrm{H}_{\text{пр}}, \quad \frac{dh}{dt} = \frac{\partial}{\partial H} \mathrm{H}_{\text{пр}}, \\ \frac{dL}{dt} &= \frac{\partial}{\partial l} \mathrm{H}_{\text{пр}}, \quad \frac{dG}{dt} = \frac{\partial}{\partial g} \mathrm{H}_{\text{пр}}, \quad \frac{dH}{dt} = \frac{\partial}{\partial h} \mathrm{H}_{\text{пр}}. \end{aligned} \tag{16}$$

Поскольку при значениях $G = 0$, $|H| = G$ или $|L| = G$ уравнения (11), (13), (15), (16) имеют особенность, рассмотрим их на множестве $D \times T^3$:

$$\begin{gathered} D = \{G, \rho, \theta: \ 0 < \varepsilon_1 < G; \ 0 < \varepsilon_2 < \rho < \pi - \varepsilon_2; \ 0 < \varepsilon_3 < \theta < \pi - \varepsilon_3\}, \\ T^3 = \{l, g, h \bmod 2\pi\}. \end{gathered} \tag{17}$$

Без ограничения общности рассматриваемой задачи в выражениях (14) и (15) можно положить $\alpha = 0$ (т. е. $K_\xi = 0$). Выберем в качестве малого параметра динамическое сжатие спутника-гиростата $\mu = (A-C)/C$ и модуль собственного кинетического момента гиростата $æ_0 = \mu æ$. Тем самым приведем гамильтониан (14) (или (15)) к стандартному виду:

$$\mathrm{H}_{\text{ст}} = \mathrm{H}_{\text{ст}\,0} + \mu\mathrm{H}_{\text{ст}1} + \mu\mathrm{H}_{\text{ст}\,2} + \ldots \tag{18}$$

где

$$\mathrm{H}_{\text{ст}0} = \frac{G^2}{2} - H;$$

$$\mathrm{H}_{\text{ст}1} = \frac{L^2}{2} - æ\left(\sqrt{G^2 - L^2}\sin\beta\cos l + L\cos\beta\right) -$$

$$- \sum_{k_1,\, k_2} U_{k_1, k_2}(\rho, \theta)\cos(k_1 g + k_2 h); \tag{19}$$

$$\mathrm{H}_{\text{ст}\,2} = \frac{L^2}{2} - æL\cos\beta, \ldots$$

Периодические решения приведенной системы. Система (16) с гамильтонианом (18), (19) допускает интеграл Якоби

$$\frac{G^2}{2} - H + \mu\mathrm{H}_{\text{ст}1}\left(L, G, H, l, g, h\right) + \mu^2\mathrm{H}_{\text{ст}\,2} + \ldots = C_1 = \text{const}, \tag{20}$$

который используем для понижения порядка системы на две единицы, путем приведения уравнений (16) к так называемой форме уравнений Уиттекера [7]. Для этого решим уравнение (20) относительно переменной H и получим

$$H \equiv \mathrm{H}_{\text{ст}} = \mathrm{H}_0 + \mu\,\mathrm{H}_1\left(L, G, l, g, h\right) + \mu^2\,\mathrm{H}_2 + \ldots, \tag{21}$$

где

$$\mathrm{H}_0 = \frac{G^2}{2} - C_1;$$

$$\mathrm{H}_1 = \mathrm{H}_{\text{ст}1}\left(L, G, H, l, g, h\right)\Big|_{H = \mathrm{H}_{\text{ст}\,0} = \frac{G^2}{2} - C_1};$$

$$\mathrm{H}_2 = \left[\mathrm{H}_{\text{ст}\,1}\left(L, G, H, l, g, h\right)\frac{\partial}{\partial H}\mathrm{H}_{\text{ст}1} + \mathrm{H}_{\text{ст}\,2}\right]\Bigg|_{H = \mathrm{H}_{\text{ст}\,0} = \frac{G^2}{2} - C_1}, \ldots, \tag{22}$$

$$\mathrm{H}_n = \left(\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{(n-k)!}\frac{\partial^{n-k-1}}{\partial H^{n-k-1}}\left(\mathrm{H}_{\text{ст}\,k+1}\right)^{n-k}\right)\Bigg|_{H = H_{\text{ст}\,0} = \frac{G^2}{2} - C_1}, \ldots$$

Так как $\partial\mathrm{H}_{\text{ст}\,0}\big/\partial H \neq 0,$ ряд (21) является сходящимся при достаточно малых значениях параметра μ.

Приняв угловую переменную h за новую независимую переменную, уравнения вращательного движения спутника-гиростата запишем в виде

$$\frac{dG}{dh}=\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial \mathrm{g}},\quad \frac{dL}{dh}=\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial l},$$
$$\frac{dg}{dh}=-\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial G},\quad \frac{dl}{dh}=-\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial L}, \tag{23}$$

где гамильтониан Н определяется формулами (21), (22).

В случае если будет найдено какое-либо решение системы (23), то соответствующее ему решение исходных уравнений (16) можно представить формулами

$$H \equiv \mathrm{H}\left(L, G, l, g, h\right)=H\left(h\right),\ \int\limits_{h_0}^{h}\frac{dh}{\left.\left(\dfrac{\partial \mathrm{H}_{\text{ст}}}{\partial H}\right)\right|_{\substack{L=L(h),\, l=l(h),\\ G=G(h),\, g=g(h),\\ H=H(h)}}}=t-t_0. \tag{24}$$

При значении $\mu=0$ уравнения (21)—(23) несложно проинтегрировать, т. е.

$$G=G_0,\ L=L_0,\ g=-G_0h+g_0,\ l=l_0, \tag{25}$$

где G_0, L_0, g_0, l_0 — постоянные интегрирования. При рациональном значении G_0 решение (25) будем называть периодическим. Рациональность величины G_0 означает соизмеримость между невозмущенным значением угловой скорости вращательного движения спутника-гиростата $n^{(0)}$ и средним орбитальным движением ω, т. е. $G_0=n^{(0)}:\omega=\overline{k}_1:\overline{k}_2$ ($\overline{k}_1$ и $\overline{k}_2$ — взаимно простые целые числа). Период такого решения (по параметру h) $T_0=2\pi\overline{k}_2$.

Для исследования вопроса о существовании периодических решений системы (23) при значении $\mu\neq 0$ воспользуемся стандартным достаточным условием Пуанкаре, которое сформулируем в виде следующей теоремы [2— 4].

Теорема 1. Система (23) допускает при малых значениях $\mu\neq 0$ голоморфные по малому параметру μ T_0-периодические решения, близкие к порождающему решению (решение (25) при $G_0=\overline{k}_1/\overline{k}_2$), если параметры порождающего решения удовлетворяют условиям

$$\frac{\partial^2 \mathrm{H}_0}{\partial G_0^2}\neq 0; \tag{26}$$

$$\frac{\partial \overline{\mathrm{H}}_1}{\partial l_0}=\frac{\partial \overline{\mathrm{H}}_1}{\partial g_0}=\frac{\partial \overline{\mathrm{H}}_1}{\partial L_0}=0, \tag{27}$$

$$\operatorname{Hes}\left(\overline{\mathrm{H}}_1\right)\Big|_{l_0,\, g_0,\, L_0} \neq 0, \tag{28}$$

где

$$\overline{\mathrm{H}}_1 = \frac{1}{\mathrm{T}_0}\int\limits_0^{T_0} H_1\left(L_0,\ G_0,\ -\frac{\overline{k}_1}{\overline{k}_2}h + g_0,\ l_0,\ h\right)dh; \tag{29}$$

$\operatorname{Hes}(F)\big|_{x,\,y}$ — определитель Гессе, вычисленный от функции F по величинам, стоящим справа от вертикальной черты.

Вычислив интеграл (29), получим:

а) при $G_0 = \pm 1$ $\left(n^{(0)} : \omega = 1 : \pm 1\right)$

$$\overline{\mathrm{H}}_1 = \frac{L_0^2}{2} - æ_0\left\{\sqrt{G_0^2 - L_0^2}\sin\beta\cos l_0 + L_0\cos\beta\right\} - u_{0.0} - u_{2.\pm 2}\cos 2g_0; \tag{30}$$

б) при $G_0 = \pm 2$ $\left(n^{(0)} : \omega = 2 : \pm 1\right)$

$$\overline{\mathrm{H}}_1 = \frac{L_0^2}{2} - æ_0\left\{\sqrt{G_0^2 - L_0^2}\sin\beta\cos l_0 + L_0\cos\beta\right\} - u_{0.0} - u_{1.\pm 2}\cos g_0; \tag{31}$$

в) при $G_0 = \overline{k}_1/\overline{k}_2$, исключая пп. а), б) и $\overline{k}_1 = 0$ $\left(n^{(0)} = 0\right)$

$$\overline{\mathrm{H}}_1 = \frac{L_0^2}{2} - æ_0\left\{\sqrt{G_0^2 - L_0^2}\sin\beta\cos l_0 + L_0\cos\beta\right\} - u_{0.0}. \tag{32}$$

Условие (26) выполняется при любом значении G_0. Для случая в) условие (28) заведомо нарушается. Следовательно, с помощью теоремы 1 можно исследовать периодические решения системы (23) только для резонансов $\overline{k}_1 : \overline{k}_2 = 1 : \pm 1$ и $2 : \pm 1$.

Подставим выражения (30) и (31) в уравнения (27) и с учетом неравенства (28) получим следующие решения:

А. При $G_0 = \pm 1$ $\left(n^{(0)} : \omega = 1 : \pm 1\right)$

1) ρ_0, θ_0 и β произвольны; $l_0 = 0, \pi$; $g_0 = 0,\ \frac{\pi}{2},\ \pi, \frac{3\pi}{2}$;

$$æ_0 = \frac{\varepsilon\sin 2\theta_0\left[3(6-\sigma)\cos^2\rho_0 - 6\varepsilon\sigma\cos\theta_0 + 2 - 3\sigma\right]}{16\sin\left(\theta_0 - \sigma_1\beta\right)};$$

2) ρ_0 и $æ_0$ произвольны; $l_0 = 0, \pi$; $g_0 = 0,\ \frac{\pi}{2},\ \pi,\ \frac{3\pi}{2}$; $\beta = \theta_0 = \frac{\pi}{2}$;

3) θ_0 и $æ_0$ произвольны; $l_0 = 0, \pi$; $g_0 = 0, \pi$;

$$\cos\rho_0 = -\frac{\varepsilon}{3 \pm 2\sqrt{6}}; \quad \beta = \theta_0 + 0{,}5\left(1+\sigma_1\right)\left(\pi - 2\theta_0\right).$$

Б. При $G_0 = \pm 2 \quad \left(n^{(0)} : \omega = 2 : \pm 1\right)$

4) ρ_0, θ_0 и β произвольны; $l_0 = 0, \pi$; $g_0 = 0, \ \pi$;

$$æ_0 = \frac{\varepsilon \sin 2\theta_0\left(13 + 9\cos^2\rho_0\right) - 6\cos 2\theta_0\left(1 + \varepsilon\cos\rho_0\right)\sin\rho_0\sigma}{16\sin\left(\theta_0 - \sigma_1\beta\right)};$$

5) ρ_0, g_0 и β произвольны; $l_0 = 0, \pi$; $\quad \theta_0 = \dfrac{\pi}{2}$;

$$æ_0 = \frac{3\sin\rho_0\left(1 + \varepsilon\cos\rho_0\right)\cos g_0}{8\cos\beta};$$

6) $æ_0$ и ρ_0 произвольны; $l_0 = 0, \pi$; $g_0 = \dfrac{\pi}{2}, \ \dfrac{3\pi}{2}$; $\beta = \theta_0 = \dfrac{\pi}{2}$;

7) $æ_0$ и ρ_0 произвольны; $l_0 = 0, \pi$; $g_0 = 0, \ \pi$;

$$\operatorname{tg} 2\theta_0 = \frac{6(\varepsilon + \cos\rho_0)\sin\rho_0\sigma}{13 + 9\cos^2\rho_0}; \quad \beta = \theta_0 + 0{,}5\left(1+\sigma_1\right)\left(\pi - 2\theta_0\right).$$

В пп. 1—7 использованы следующие обозначения: $\varepsilon = 1$ при $G_0 = 1$ и 2; $\varepsilon = -1$ при $G_0 = -1$ и –2, $\sigma_1 = \cos l_0 = \pm 1$, $\sigma = \pm 1$ (при $G_0 = \pm 1$ и $g_0 = 0, \ \dfrac{\pi}{2}, \ \pi, \ \dfrac{3\pi}{2}$ значения $\sigma = \cos 2g_0 = \pm 1$; при $G_0 = \pm 2$ и $g_0 = 0, \pi$ значения $\sigma = \cos g_0 = \pm 1$). В соответствии с неравенством (28) некоторые из произвольных порождающих значений в решениях 1—7 исключаются.

Итак, доказано существование и найдены порождающие семи различного типа семейств периодических решений системы (23). В соответствии с формулами (24) периодические решения (25), вообще говоря, есть условно-периодические решения исходной системы (16). В решениях исходной системы, соответствующих найденным периодическим решениями системы (23), произвольно выбираются значения: t_0, h_0, ρ_0, θ_0, β_0 — для решений типа 1), 4); t_0, h_0, ρ_0, θ_0, β_0 — для решений типа 3), 5); $t_0, h_0, \rho_0, æ_0$ — для решений типа 2), 6), 7). Таким образом, найдены три пятипараметрических (при фиксированных значениях $æ_0$ и β — трехпараметрических) и четыре четырехпараметрических семейства условно-периодических решений системы (16), соответствующих резонансам $n^{(0)} : \omega = 1 : \pm 1$ и $2 : \pm 1$.

Для исследования периодических решений, соответствующих другим резонансам (см. формулу (32)) воспользуемся одним из достаточных условий существования, полученных в работах [4, 5], которое сформулируем в виде следующей теоремы.

Теорема 2. Система (21)—(23) в особом случае (32) допускает при малых значениях $\mu \neq 0$ голоморфные по параметру μ T_0-периодические решения, близкие к порождающему решению (25), если параметры этого решения удовлетворяют условиям

$$\frac{\partial \mathrm{H}_0}{\partial G_0^2} \neq 0; \tag{33}$$

$$\frac{\partial \overline{\mathrm{H}}_1}{\partial l_0} = \frac{\partial \overline{\mathrm{H}}_1}{\partial L_0} = 0; \tag{34}$$

$$\Delta \equiv \mathrm{Hes}\left(\overline{\mathrm{H}}_1\right)\Big|_{l_0,\, L_0} \neq 0; \tag{35}$$

$$\overline{\Phi_G^{(i-1)}} + \frac{\partial \overline{\mathrm{H}}_i}{\partial g_0} = 0; \tag{36}$$

$$\frac{\partial \overline{\Phi_G^{(i-1)}}}{\partial g_0} + \frac{\partial^2 \overline{\mathrm{H}}_i}{\partial g_0^2} \neq 0. \tag{37}$$

Алгоритм построения функций $\overline{\Phi_G^{(i-1)}}$ приведен в работе [5], индекс i $(i \in N)$ — порядковый номер приближения, в котором появляются «критические» для исследуемого резонанса члены. Учитывая структуру функций $\overline{\mathrm{H}}_i$ и рекуррентную формулу для вычисления функций $\overline{\Phi_G^{(i-1)}}$, можно доказать, что достаточные условия существования периодических решений (36), (37) для резонансов $n^{(0)} : \omega = r : p$ $\left(r \in \mathrm{Z},\ p \in N,\ rp \neq 0\right)$ принимают вид

$$F^{(p,r)}\left(\rho_0,\, \theta_0\right) \sin kpg_0 = 0; \tag{38}$$

$$kpF^{(p,r)}\left(\rho_0, \theta_0\right) \cos kpg_0 \neq 0, \tag{39}$$

где при четном rk — некоторое натуральное число, при нечетном rk — четное.

Условие (33) выполняется тождественно. Подставим выражение (32) в уравнения (34) и решим их вместе с уравнением (38) с учетом неравенств (35) и (39). Получим следующее решение:

$$l_0 = 0, \pi;\ g_0 = \frac{\pi s}{kp}\ \left(s = 0, \ldots, 2kp - 1\right);$$

ρ_0, θ_0, и β — произвольные величины;

$$
æ_0 = \frac{\varepsilon \sin 2\theta_0 \left(9\cos^2 \rho_0 + 4G_0^2 - 3\right)}{8|G_0| \sin\left(\theta_0 - \sigma_1 \beta\right)}. \tag{40}
$$

Естественно, что значения параметров, при которых нарушается условие (35) и $F^{(p,r)}\left(\rho_0,\, \theta_0\right) = 0,$ исключаются. Соответствующие неравенства можно представить в явном виде, например выражение (35)

$$
\Delta \equiv æ_0^2 \sin^2 \beta \operatorname{ctg}^2 \theta_0 \left(1 + \sigma_1 \operatorname{tg}^3 \theta_0 \operatorname{ctg} \beta\right) \neq 0.
$$

Таким образом, можно утверждать, что система (23) имеет бесконечное количество периодических решений (порождающие определяются решениями (40) и $G_0 = r/p$), которые, согласно формулам (24), есть условно-периодические решения исходной системы (16). В решениях исходной системы произвольно выбираются значения $t_0,\, h_0,$ $\rho_0,\, \theta_0,\, \beta$ и $G_0 = r/p.$

В настоящей работе найдены новые многопараметрические семейства периодических и условно-периодических движений осесимметричного спутника-гиростата вокруг центра масс, перемещающегося по круговой орбите. Полученные результаты можно использовать при разработке систем ориентации и стабилизации искусственных спутников, а также при построении теории вращения естественных небесных тел, учитывающей динамику внутреннего жидкого ядра. Результаты работы, кроме того, имеют теоретический интерес, поскольку найденные решения дополняют и расширяют известные классы движений твердого тела и спутника-гиростата.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Жуковский Н.Е. О движении твердого тела, имеющего полости, наполненные однородной капельной жидкостью: собр. соч. в 6 т. М.; Л.: ОГИЗ, 1949. Т. 2. С. 152—309.
2. Пуанкаре А. Избранные труды. Т. 1. М.: Наука, 1971.
3. Козлов В.В. Методы качественного анализа в динамике твердого тела. М.: МГУ, 1984.
4. Баркин Ю.В., Панкратов А.А. О характеристических показателях периодических решений гамильтоновых систем // Известия АН СССР. МТТ, 1987. № 2. С. 25—33.
5. Баркин Ю.В., Панкратов А.А. Периодические решения гамильтоновых систем в некоторых случаях вырождения. ПММ, 1987. Т. 51. Вып. 2. С. 29—41.
6. Белецкий В.В. Движение искусственного спутника относительно центра масс. М.: Наука, 1965.
7. Беленький И.М. Введение в аналитическую механику. М.: Высш. шк., 1964.

Статья поступила в редакцию 14.09.2012