УДК 539.3

А.Ю. Карпачев

О ДЕФОРМАЦИИ УПРУГОГО ТОНКОГО ДИСКА ПРИ СФЕРИЧЕСКОМ ДВИЖЕНИИ

Изложен математический аппарат анализа напряженно-деформированного состояния тонких круглых пластин (дисков), находящихся в сложном движении, при котором относительное и переносное движение — вращение вокруг пересекающихся взаимно перпендикулярных осей. Приведены результаты численных экспериментов.

E-mail: a-karpachev@mail.ru

Ключевые слова*: *круглая пластина, диск, сложное движение, вращение.

Особенности поведения тонкой круглой пластины, находящейся в сложном движении, учитывают при моделировании работы основных конструктивных элементов реальных машин. Наглядное представление о характере возникающих при этом деформаций можно получить на примере сферического движения упругого диска, когда его относительное и переносное движения есть вращение вокруг взаимно перпендикулярных пересекающихся осей (рис. 1).

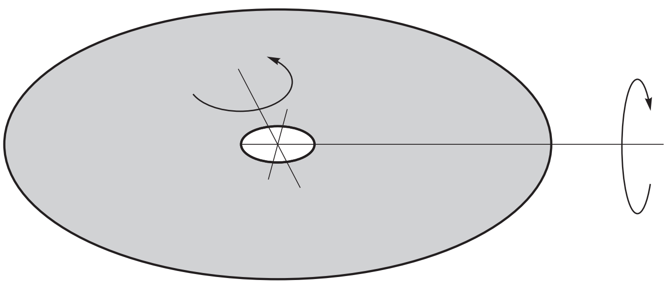

Рис. 1. Схема сложного движения диска

Качественную картину деформированного состояния упругого диска в сферическом движении можно наблюдать на установке, представленной на рис. 2, подробное описание конструкции которой приведено в [1, 2]. Сферическое движение диска обеспечивают два независимо управляемых электромотора, причем блок управления позволяет изменять значения переносной и относительной скоростей вращения. В связи с этим возникает задача определения напряженно-деформированного состояния диска, зависящего от кинематических характеристик указанного движения.

Основные допущения и постановка задачи. Для теоретического осмысления представленной на рис. 2 качественной картины деформированного состояния диска обратимся к рис. 3.

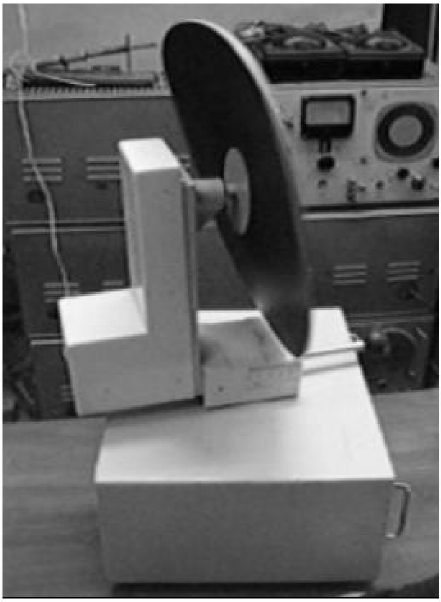

Рис. 2. Демонстрационная установка

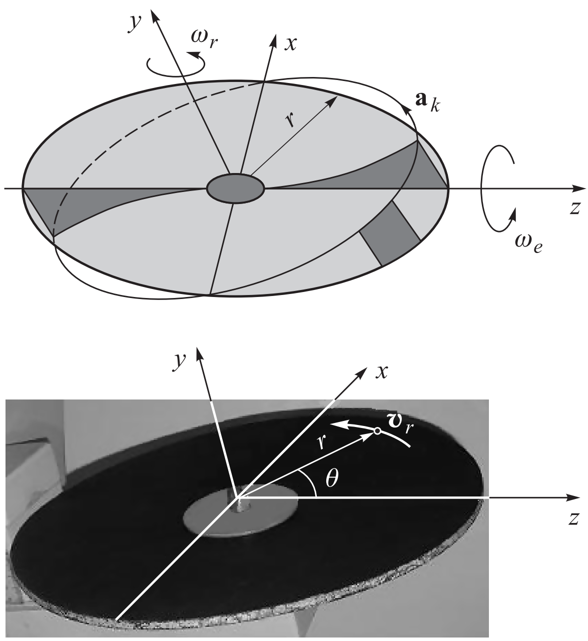

Рис. 3. Кинематическая схема и выбранная система координат

Предположим, что относительное движение диска есть его вращение с постоянной угловой скоростью ω_r вокруг оси y, а переносное движение происходит с постоянной угловой скоростью ω_e вокруг оси z. При вращении диск деформируется так, что каждая его частица смещается в направлении, противоположном ускорению:

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_r + \boldsymbol{a}_e + \boldsymbol{a}_{\text{К}},$$

где $\boldsymbol{a}_r$ — относительное ускорение; $\boldsymbol{a}_e$ — переносное ускорение; $\boldsymbol{a}_{\text{К}}$ — ускорение Кориолиса. Последняя составляющая ускорения (см. рис. 3.) определяется известной формулой

$$\boldsymbol{a}_{\text{К}} = 2\left(\boldsymbol{\omega}_e \times \boldsymbol{v}_r\right),$$

где $\boldsymbol{v}_r$ — относительная скорость.

Такое движение приводит к растяжению и изгибу диска.

Расчет деформаций рассмотренного тела с позиций двухмерной геометрически нелинейной теории круглых пластин [3] может оказаться слишком трудоемким. Решение вопроса усложняется нелинейным характером зависимостей ускорений, а следовательно, и вызывающих эти ускорения сил, от порождающих их деформаций.

Обратимся к допущениям, которые позволяют исследовать деформацию диска на основе решения одномерной краевой задачи с использованием линеаризованных уравнений [4, 5].

Пусть перемещения W точек срединной поверхности диска в направлении нормали к ней малы по сравнению с его радиусом c. Используемые линеаризованные соотношения построим в предположении, что напряженное состояние диска состоит из основного и дополнительного. Первое вызвано растяжением диска в его плоскости и обусловлено относительным ускорением $a_r = a_r^n = \omega_r^2 r$, второе — изгибом плоскости диска, как следствие проявления ускорений $a_{\text{К}} = 2\omega_e \omega_r r \cos\theta$ и $a_e = a_e^n = \omega_e^2 W$.

Рассмотрим случаи, когда $\omega_e^2 \ll \omega_r^2$, а относительная скорость меньше критической частоты вращения диска. При выполнении этих условий основное напряженное состояние диска можно считать осесимметричным. Действием аэродинамических сил на диск пренебрегаем.

Для решения задачи о расчете основного напряженного состояния воспользуемся основными соотношениями теории растяжения пластин в виде системы из двух дифференциальных уравнений и алгебраического уравнения [6, 7]:

$$\frac{d\tilde{u}}{d\tilde{r}} = (1-\mu^2)\frac{\tilde{N}_r}{k_h} - \mu\frac{\tilde{u}}{\tilde{r}},$$
$$\frac{d\tilde{N}_r}{d\tilde{r}} = k_h\frac{\tilde{u}}{\tilde{r}^2} - (1-\mu)\frac{\tilde{N}_r}{\tilde{r}} - k_h\tilde{q}_r\tilde{r}, \qquad (1)$$

$$\tilde{N}_\theta = k_h\frac{\tilde{u}}{\tilde{r}} + \mu\tilde{N}_r, \qquad (2)$$

где переменные параметры представлены в безразмерной форме и имеют вид

$$\tilde{u} = \frac{c\eta}{h_0^2}u,\ \ \tilde{N}(r \leftrightarrow \theta) = \frac{\eta c^2}{Eh_0^3}N(r \leftrightarrow \theta),\ \ \tilde{r} = \frac{r}{c},$$
$$\tilde{q}_r = \frac{\eta c^4}{Eh_0^2}\rho\omega_r^2\ \ (\eta = 12(1-\mu^2)),\ \ h = k_h h_0, \tag{3}$$

N_r и N_θ — силы в сечениях, отнесенные к единице длины сечения (рис. 4, *a*); h_0 — некоторая характерная толщина профиля диска; ρ — плотность материала диска; u — перемещение точек вдоль радиуса; E — модуль Юнга; μ — коэффициент Пуассона.

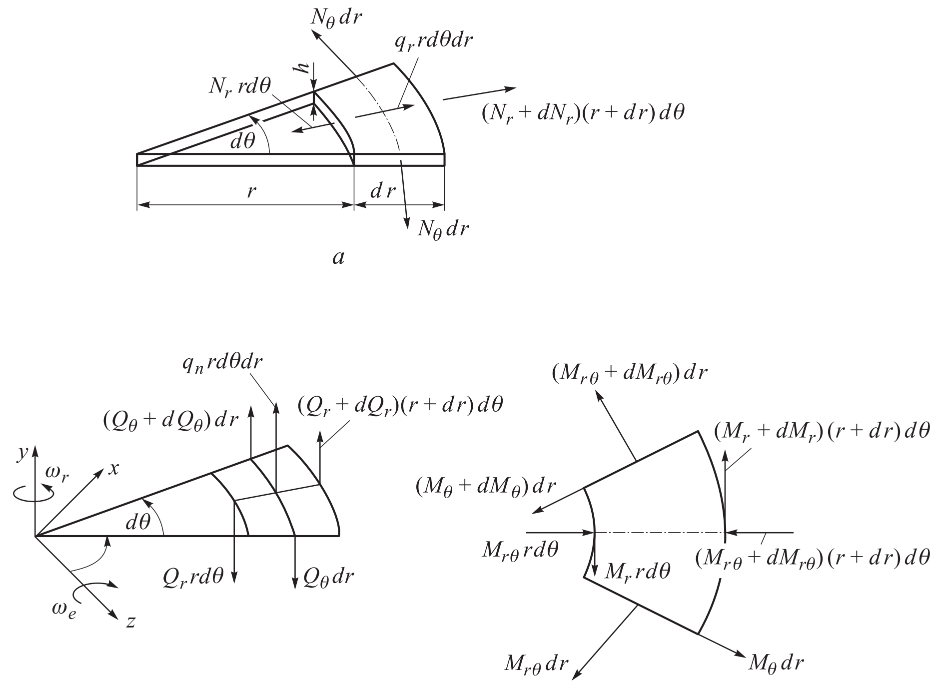

Рис. 4. Схема систем сил, приводящих к растяжению пластины (*а*) и ее изгибу (*б*)

Соотношения (1)—(3) позволяют найти основное напряженное состояние пластины переменной толщины при известных граничных условиях и угловой скорости вращения.

Для проведения расчетов систему уравнений (1), (2) запишем в матричной форме:

$$\frac{d}{d\tilde{r}}\{X\} = \left[A\right]\{X\} + \{G\}, \tag{4}$$

где $\{X\} = (x_1,\ x_2)^{\text{т}}$ $(x_1 = \tilde{u},\ \ x_2 = \tilde{N}_r)$; $\left[A\right]$ — 2×2-матрица переменных коэффициентов:

$$a_{11} = -\frac{\mu}{\tilde{r}},\ \ a_{12} = \frac{(1-\mu^2)}{k_h},\ \ a_{21} = \frac{k_h}{\tilde{r}^2},\ \ a_{22} = -\frac{(1-\mu)}{\tilde{r}};$$

$\{G\} = (g_1,\ g_2)^{\text{т}}$ — вектор правых частей $(g_1 = 0,\ \ g_2 = -k_h\tilde{q}_r\tilde{r})$.

Решение уравнения (4) подчиняется двум условиям на границах интервала интегрирования: $\tilde{r}=\tilde{k}$, $\tilde{r}=1$, где $\tilde{k}=b/c$ (b — радиус зажимных фланцев диска). Дифференциальные уравнения, описывающие движения элемента пластины при ее изгибе, имеют вид [4]

$$\frac{\partial(rM_{r\theta})}{\partial r}+M_{r\theta}+\frac{\partial M_\theta}{\partial\theta}-Q_\theta r=0,$$

$$\frac{\partial(rM_r)}{\partial r}-M_\theta+\frac{\partial M_{r\theta}}{\partial\theta}-Q_r r=0, \tag{5}$$

$$\frac{\partial(rQ_r)}{\partial r}+\frac{\partial Q_\theta}{\partial\theta}+q_n r+N_r r\frac{\partial^2 W}{\partial r^2}+N_\theta r\left(\frac{\partial^2 W}{r^2\partial\theta^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial W}{\partial r}\right)-q_r hr\frac{\partial W}{\partial r}=0,$$

где $W=W(r,\,\theta)$.

Уравнения (5) получены добавлением в уравнения равновесия выражения для распределенной инерционной силы, рис. 4, *б*:

$$q_n=\rho h\left(2\omega_e\omega_r r\cos\theta+\omega_e^2 W\right).$$

Первые два уравнения (5) соответствуют уравнениям моментов, причем изгибающие моменты $(M_r,\,M_\theta)$ и момент кручения $(M_{r\theta})$ в сечениях пластины связаны с ее прогибом соотношениями упругости; третье уравнение соответствует уравнению проекций поперечных сил $\left(Q_r,Q_\theta\right)$ на нормаль к деформированному элементу пластины. При деформации пластины наблюдается ее перегиб или образование формы деформирования с одним узловым диаметром, перемещения точек которого $W=0$.

Переменные, входящие в уравнения (5), представим следующим образом:

$$W=w\cos\theta,\;\; M_{r\theta}=H\sin\theta,$$

$$M_r=M\cos\theta,\;\; Q_r=V_r\cos\theta,$$

$$M_\theta=L\cos\theta,\;\; Q_\theta=V_\theta\sin\theta,$$

$$Q=V\cos\theta.$$

Введем безразмерные параметры:

$$\tilde{w}=\sqrt{\eta}\,\frac{w}{h_0},\;\; \tilde{\vartheta}=\frac{c}{h_0}\sqrt{\eta}\,\vartheta,\;\; \tilde{M}=\frac{c^2\eta^{3/2}}{Eh_0^4}M\quad (M\leftrightarrow H,\,L),$$

$$\tilde{Q}=\frac{c^3\eta^{3/2}}{Eh_0^4}Q\quad (Q\leftrightarrow V_r,\,V_\theta),$$

$$\tilde{q}_{\text{К}}=\frac{c^5\eta^{3/2}}{Eh_0^3}2\rho\,\omega_e\omega_r,\quad \tilde{q}_e=\frac{c^5\eta^{3/2}}{Eh_0^3}\rho\,\omega_e^2, \tag{6}$$

$$\frac{d\tilde{w}}{d\tilde{r}} = \tilde{\vartheta}.$$

После пребразований, аналогичных приведенным в работе [4], полную систему уравнений представим в виде одного уравнения:

$$\frac{d}{d\tilde{r}}\{Y\} = \left[B\right]\{Y\} + \{D\}, \qquad (7)$$

где $\{Y\} = (y_1,\, y_2,\, y_3,\, y_4)^{\text{т}}$ $(y_1 = \tilde{w};\quad y_2 = \tilde{\vartheta},\quad y_3 = \tilde{M},\quad y_4 = \tilde{V})$; $\left[B\right]$ — 4×4-матрица следующих переменных коэффициентов:

$$b_{11} = 0,\ b_{12} = 1,\ b_{13} = 0,\ b_{14} = 0,\ b_{21} = \mu / \tilde{r}^2,\ b_{22} = -\mu / \tilde{r},\ b_{23} = -1/k_h^3,$$

$$b_{24} = 0,\ b_{31} = k_h^3(3+\mu)(1-\mu) / \tilde{r}^3,\ b_{32} = -k_h^3(1-\mu)(3+\mu) / \tilde{r}^2,$$

$$b_{33} = -(1-\mu) / \tilde{r},\ b_{34} = 1,$$

$$b_{41} = [k_h^3(1-\mu)(3+\mu) / \tilde{r}^2 - (\mu\tilde{N}_r - \tilde{N}_\theta)] / \tilde{r}^2 - k_h\tilde{q}_e,$$

$$b_{42} = k_h\tilde{q}_r\tilde{r} + (\mu\tilde{N}_r - \tilde{N}_\theta) / \tilde{r} - k_h^3(1-\mu)(3+\mu) / \tilde{r}^3, \qquad (8)$$

$$b_{43} = \mu / \tilde{r}^2 + \tilde{N}_r / k_h^3,\ b_{44} = -1 / \tilde{r};$$

$$\{D\} = (0,\, 0,\, 0, -k_h\tilde{q}_k\tilde{r})^{\text{т}}.$$

Решение уравнения (7) должно удовлетворять граничным условиям

$$\tilde{w} = 0,\ \tilde{\vartheta} = 0 \ \text{при}\ \tilde{r} = \tilde{k};\ \tilde{M} = 0,\ \tilde{V} = 0\ \text{при}\ \tilde{r} = 1. \qquad (9)$$

Метод расчета и его реализация. Рассмотрим численное решение сформулированной задачи исследования деформаций диска при его сферическом движении. Для этого воспользуемся методом начальных параметров (НП) [8].

Поясним алгоритм проведения расчета указанным методом. Задав исходные данные, решим краевую задачу на основе векторно-матричных уравнений (4). Граничные условия для расчета основного напряженного состояния пластины примем, исходя из того, что внешний контур пластины свободен от напряжений: $\tilde{N}_r(1) = 0$, а внутренний контур жестко закреплен $\tilde{u}(\tilde{k}) = 0$. Тогда, полагая нулевыми компоненты вектора $\{G\}$, проинтегрируем уравнение (4) с учетом граничных условий: $x_1(\tilde{k}) = 0$, $x_2(\tilde{k}) = 1$; второй раз интегрирование этого уравнения проведем с учетом компонент вектора $\{G\}$, но при нулевых граничных условиях. Искомую силу на внутреннем контуре определим как $\tilde{N}_r(\tilde{k}) = x_2(\tilde{k}) = -x_2^2(1) / x_2^1(1)$, где $x_2^1(1)$, $x_2^2(1)$ —

значения компоненты x_2 на внешнем контуре, полученные в результате первого и второго интегрирований соответственно. Затем после интегрирования уравнений (4) с такими граничными условиями $x_1(\tilde{k}) = 0, \;\; x_2(\tilde{k}) = \tilde{N}_r(\tilde{k}),$ определим значения радиальных, а используя выражение (2) — окружных распределенных сил.

Далее последовательно определением непосредственно прогибы пластины на основе решения краевой задачи с использованием уравнения (7) и граничных условий (9). Для этого необходимо, принимая $\{D\} = \left(0,\, 0,\, 0,\, 0\right)^{\text{т}}$, дважды проинтегрировать уравнение (7) с граничными условиями вида

$$\{Y\}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \{Y\}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Третий раз следует проводить интегрирование, учитывая, что в уравнении (13) $\{D\} = (0,\, 0,\, 0,\, -k_h \tilde{q}_k \tilde{r})^{\text{т}}$ и при граничном условии $\{Y\} = \left(0,\, 0,\, 0,\, 0\right)^{\text{т}}$. После определения вектора констант из уравнения, составленного таким образом, согласно методу НП, еще раз проинтегрировав неоднородное дифференциальное уравнение (7) при найденных граничных условиях, получим решение вида

$$\{y\} = \{Z\} + [Y]\{C\}.$$

В ходе проведения указанной процедуры решения искомые силовые факторы на внутреннем контуре диска равны найденным константам C_3, C_4:

$$\tilde{M}(\tilde{k}) = C_3 = \frac{d_1}{d}; \quad \tilde{V}(\tilde{k}) = C_4 = \frac{d_2}{d},$$

где

$$d_1 = \begin{vmatrix} (-y_3^3) y_3^2 \\ (-y_4^3) y_4^2 \end{vmatrix} = (-y_3^3) y_4^2 - (-y_4^3) y_3^2;$$

$$d_2 = \begin{vmatrix} y_3^1 (-y_3^3) \\ y_4^1 (-y_4^3) \end{vmatrix} = y_3^1 (-y_4^3) - y_4^1 (-y_3^3);$$

$$d = \begin{vmatrix} y_3^1 y_3^2 \\ y_4^1 y_4^2 \end{vmatrix} = y_3^1 y_4^3 - y_4^1 y_3^2.$$

Значения прогибов и внутренних силовых факторов диска, найденные с учетом и без учета его растяжения, приведены ниже:

С учетом растяжения

$\tilde{r}$	0,25	0,325	0,4	0,475	0,55	0,625	0,7	0,775	0,85	0,925	1,00
$\tilde{N}_r$	8,65	7,44	6,61	5,9	5,2	4,48	3,71	2,89	2,00	1,03	0
$\tilde{N}_\theta$	4,32	5,02	5,19	5,12	4,89	4,55	4,13	3,63	3,06	2,42	1,72
$\tilde{M}_r$	–129	–76,2	–48,5	–31,7	–20,6	–12,9	–7,4	–3,58	–1,14	0,0421	0
$\tilde{M}_\theta$	–64,5	–52,2	–40	–30,2	–22,6	–16,7	–12,2	–8,72	–6,21	–4,57	–3,77
w, мм	0	0,582	1,944	3,74	5,8	8	10,28	12,56	14,84	17,1	19,32

Без учета растяжения

$\tilde{r}$	0,25	0,325	0,4	0,475	0,55	0,625	0,7	0,775	0,85	0,925	1,00
$\tilde{M}_r$	–280	–177	–120	–82,5	–56,1	–36,2	–21,4	–10,6	–3,6	–0,0655	0
$\tilde{M}_\theta$	–140	–120	–96,5	–75,5	–58	–43,6	–32	–22,9	–16,1	–11,7	–9,61
w, мм	–0	1,20	4,4	8,6	13,48	18,78	24,2	29,8	35,4	41	46,4

Определители, составленные из компонент вектора состояния $\{Y\}_1$ на внешнем контуре диска, получены трехкратным интегрированием уравнения (7) (каждому из которых соответствуют верхний индекс). Искомое напряженно-деформированное состояние можно определить по результатам четвертого уравнения (7).

Как следует из проведенных расчетов, напряжение максимально на внутреннем контуре диска. Его значение можно вычислить по известной формуле [9], полученной с учетом выражений (3) и (6):

$$\sigma_{r\max} = \left(\frac{\tilde{N}_r(\tilde{k})}{\eta} + \frac{6\tilde{M}_r(\tilde{k})}{\eta^{3/2}} \right) \frac{Eh_0^2}{c^2}.$$

Результаты проведенных расчетов. Для исследования деформации диска на лабораторной установке с помощью предложенной модели предварительно были установлены характеристики материала диска (см. (14)): $E = 3{,}5$ МПа, $\mu = 0{,}5$, $\rho = 280$ кг/м^3; его геометрические параметры: $c = 160$ мм, $h_0 = 6$ мм, $k_h = 1$. Расчет проводили при значении относительной угловой скорости $\omega_r = 40$ рад/с, постоянном значении переносной угловой скорости $\omega_e = 4$ рад/с. На рис. 5 представлена зависимость максимальных значений прогибов диска от его радиуса, построенная по результатам расчета.

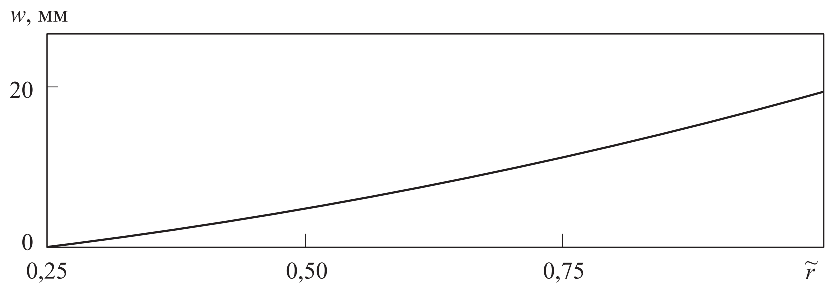

Рис. 5. Изменение максимальных значений прогибов диска вдоль радиуса

Прогиб диска, наблюдаемый в проведенных опытах на лабораторной установке, показан на рис. 6. Частота собственного вращения диска в эксперименте составляла 6,5 об/с, скорость переносного вращения изменялась в диапазоне значений 0…5 рад/ с. Сопоставляя теоретические и экспериментальные данные максимальных значений перемещений точек диска, можно выявить предельные кинематические характеристики вращения диска, при превышении которых использование предложенной математической модели для анализа поведения диска становится невозможным. В рассматриваемом случае значение угловой переносной скорости не должно быть более 3 рад/с.

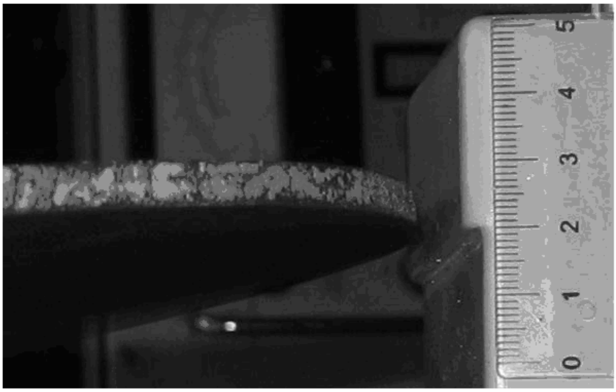

Рис. 6. Определение максимальных прогибов диска на лабораторной установке

Таким образом, предложенный метод исследований позволяет определить влияние каждой из составляющих $\boldsymbol{a}_r$, $\boldsymbol{a}_e$, $\boldsymbol{a}_\text{К}$ ускорения ее точек на прогиб пластины. Применение описанной лабораторной установки создает условия для экспериментальных исследований кинематических границ применимости принятых допущений и использования предлагаемой математической модели. На основе решения поставленной задачи можно также существенно снизить риск возникновения высоких переменных напряжений и обусловленных ими усталостных разрушений.

Исследования проведены при поддержке гранта Президента РФ для ведущих научных школ №НШ-4748.2012.8.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Динамика: метод. указания по проведению практических занятий с использованием моделей и приборов по курсу «Теоретическая механика». Ч. II. / Под. ред. Г.Д. Блюмина. М.: МВТУ, 1988.
2. Карпачев А.Ю., Небесный М.В., Овчинников В.А. К исследованию динамического поведения систем с распределенными параметрами на ЭВМ// Изв. вузов. Машиностроение. 2007. № 5. С. 3–12.
3. Коваленко А.Д. Круглые пластины переменной толщины. М.: Физматгиз, 1959.
4. Карпачев А.Ю. Собственные динамические характеристики вращающихся круглых пил при неравномерном нагреве // Вестник машиностроения. 2006. № 5. С. 32–36.
5. Бидерман В.Л. Теория механических колебаний. М.: Высш. шк., 1980.
6. Карпачев А.Ю. Влияние остаточных напряжений на устойчивость круглых пластин при неравномерном нагреве // Изв. вузов. Машиностроение. 2006. № 9. С. 3—13.
7. Демьянушко И.В., Биргер И.А. Расчет на прочность вращающихся дисков. М.: Машиностроение, 1978.
8. Бидерман В.Л. Механика тонкостенных конструкций. Статика. М.: Машиностроение, 1977.
9. Феодосьев В.И. Сопротивление материалов: учеб. для вузов. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумна, 2007.

Статья поступила в редакцию 14.09.2012