

А.А. Пожалостин, А.В. Паншина

**ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ УПРУГИХ
ОДНОМЕРНЫХ СИСТЕМ С СУХИМ ТРЕНИЕМ**

Рассмотрен аналитический приближенный метод расчета вынужденных колебаний упругих прямых стержней с сухим трением. Предполагается, что трение небольшое, а движение системы безостановочное. Описан подход, основанный на использовании энергетического метода и метода собственных функций. Результаты расчета можно использовать при исследовании динамики нефтепроводов.

E-mail: panalv@mail.ru

Ключевые слова: стержень, балка, вал, трение, вынужденные колебания, приведенные параметры.

Задача о вынужденных колебаниях упругих одномерных систем с сухим трением носит важный методический аспект. В настоящей работе изложен аналитический приближенный метод расчета вынужденных продольных, крутильных и поперечных колебаний упругих прямых стержней (валов, балок) с сухим трением в предположении, что трение небольшое, а движение системы безостановочное. Описан также подход, основанный на использовании энергетического метода и метода собственных функций. При расчете приняты следующие основные допущения:

- 1) колебания систем малые;
- 2) материалы стержней однородные и подчиняются закону Гука;
- 3) для колебаний системы справедливы гипотезы сплошности и плоских нормалей.

Поставленная задача решена приближенно с помощью введения эквивалентного вязкого трения и приведения к эквивалентным параметрам колебательных систем, представляющих собой линейные осцилляторы.

Пусть возмущающее воздействие изменяется в соответствии с гармоническим законом. Стержень расположен на шероховатой плоскости и испытывает силу сухого трения. Распределение силы трения вдоль длины стержня (вала, балки) равномерное. Интенсивность силы трения $q_{тр} = f \frac{P}{l}$, где P — сила тяжести стержня; l — длина стержня.

Предположим, что решения однородных краевых задач о продольных, крутильных и поперечных колебаниях таких систем описываются уравнением

$$L(q) + \lambda^2 q = 0 \quad (1)$$

с учетом граничных условий

$$x = 0 \text{ и } x = l,$$

где $L(q)$ — оператор продольных, крутильных или поперечных колебаний; λ — собственное значение краевой задачи; q — прогиб (или угол кручения) стержня; x — координата вдоль стержня.

Решение уравнения (1) имеет вид [1]

$$q = \sum_{i=1}^{\infty} X_i(x) B_i \cos(\omega_i t + \alpha_i). \quad (2)$$

Здесь $X_i(x)$ — собственные формы; ω_i — частота i -го тона собственных колебаний; B_i, α_i — произвольные постоянные; t — время.

Пусть вынуждающее воздействие $F = F_0 \cos pt$, где F_0, p — амплитуда и частота вынуждающего воздействия.

Собственные функции $\{X_i\}$ краевой задачи (1) удовлетворяют условиям полноты и ортогональности. Представим интенсивность силы трения в виде ряда по функциям $X_i(x)$:

$$q_{\text{тр}} = \sum_{i=1}^{\infty} a_i X_i(x),$$

где a_i — коэффициент разложения сил трения в ряд по собственным функциям.

Эквивалентные системы (механические аналоги) [2, 3] вынужденных колебаний показаны на рис. 1, 2, где введены следующие обозначения: m_i^0 — приведенная масса механического аналога, $m_i^0 = \frac{1}{2} \int_0^l m_0 X_i^2 dx$ (m_0 — погонная масса или погонный момент инерции);

c_i^0 — приведенная жесткость системы, $c_i^0 = \frac{1}{2} \int_0^l G_0 (X_i')^2 dx$ (G_0 — погонная жесткость на растяжение, кручение или изгиб); $Q_i(t)$ — обобщенная сила; q_i — обобщенная координата.

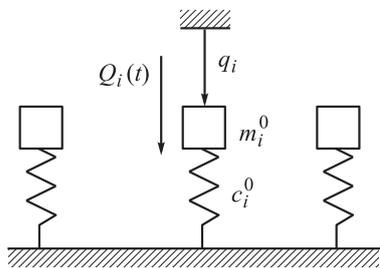


Рис. 1. Механический аналог продольных и поперечных колебаний

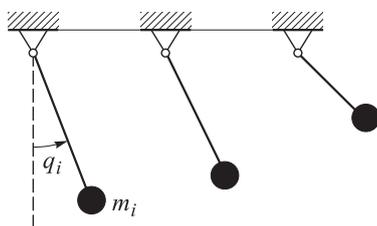


Рис. 2. Механический аналог крутильных колебаний

Отметим, что при изгибе $X_i' = dX_i/dx$ следует заменить на $X_i'' = \frac{d^2 X_i}{dx^2}$.

Коэффициент эквивалентного вязкого трения получим на основании равенства за период вынужденных колебаний $T = \frac{2\pi}{p}$ работы сил линейно-вязкого сопротивления для каждого i -го члена ряда (осциллятора) и работы сил сухого трения:

$$\int_0^T \int_0^l \mu_i X_i^2(x) A_i^2 p^2 \sin^2(pt + \alpha) dx dt = 4 A_i \int_0^l a_i X_i(x) dx.$$

Допустим, что вынужденные колебания i -го осциллятора описываются законом

$$q_i = A_i \cos(pt + \alpha_i),$$

где A_i — амплитуда вынужденных колебаний; α_i — фазовый сдвиг.

Поскольку $\int_0^T \sin^2(pt + \alpha) dt = \frac{T}{2}$, приведенный коэффициент демпфирования

$$\mu_i = \frac{\int_0^l a_i X_i(x) dx}{2\pi A_i \int_0^l X_i^2 p dx}. \quad (3)$$

Особенность рассмотренного выше подхода заключается в том, что коэффициент демпфирования μ_i обратно пропорционален амплитуде внешнего воздействия A_i .

Запишем дифференциальное уравнение вынужденных колебаний для эквивалентной системы (i -го осциллятора):

$$m_i^0 \ddot{q}_i + \mu_i \dot{q}_i + c_i^0 q_i = Q_i(t), \quad (4)$$

где обобщенная координата q_i , характеризующая перемещение i -го механического аналога и отсчитываемая от положения равновесия.

Введем обозначение $\omega_i^2 = \frac{c_i^0}{m_i^0}$, тогда для i -го осциллятора [1]

$$Q_i(t) = \frac{\sum_{k=1}^N \mathbf{F}_k(t) \cdot \delta \mathbf{r}_k^{(\delta q_i)}}{\delta q_i}.$$

Здесь $\mathbf{F}_k(t)$ — вектор активной силы; $\delta \mathbf{r}_k$ — вектор соответствующего возмущения.

Для определения коэффициента μ_i^0 сравним функции Рэля механического аналога и исходной системы. Функция Рэля для механического аналога

$$\Phi = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \mu_i^0 \dot{q}_i^2,$$

для исходной системы

$$\Phi = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \int_0^l \mu_i \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} \right)^2 dx = \frac{1}{2} \int_0^l \mu_i X_i^2 dx \dot{q}_i.$$

Приравняв эти два выражения, получим

$$\mu_i^0 = \mu_i \|X_i\|,$$

где $\|X_i\|$ — норма функции $X_i(x)$.

Перепишем дифференциальное уравнение (4) в каноническом виде:

$$\ddot{q}_i + 2n_i \dot{q}_i + \omega_i^2 q_i = h_i \cos(pt + \alpha), \quad (5)$$

где h_i — приведенная амплитуда внешнего воздействия.

Решение уравнения (5), т. е. закон вынужденных колебаний, описывается уравнением

$$q_i = \frac{h_i}{\sqrt{(\omega_i^2 - p^2)^2 + 4n_i^2 p^2}} \cos(pt + \alpha_i - \varepsilon_i),$$

где $2n_i = \mu_i / m_i^0$.

Введем следующее обозначение:

$$\mu_i = \frac{b_i}{A_i},$$

где

$$b_i = \frac{\left[\int_0^l a_i X_i(x) dx \right] \|X_i\|}{2\pi p \int_0^l X_i^2 dx}.$$

Поскольку $q_i = A_i \cos(pt + \alpha_i - \varepsilon_i)$, получим

$$A_i = \frac{h_i}{\sqrt{(\omega_i^2 - p^2)^2 + \left(\frac{b_i}{A_i}\right)^2 \frac{p^2}{(m_i^0)^2}}}, \quad \operatorname{tg} \varepsilon_i = \frac{2n_i p}{\omega_i^2 - p^2}.$$

Отсюда

$$A_i^2 \left[(\omega_i^2 - p^2)^2 + \left(\frac{b_i}{A_i}\right)^2 \left(\frac{p}{m_i^0}\right)^2 \right] = h_i^2,$$

т. е.

$$A_i^2 (\omega_i^2 - p^2)^2 + b_i^2 \left(\frac{p}{m_i^0}\right)^2 = h_i^2.$$

Окончательно имеем

$$A_i = \pm \frac{1}{(\omega_i^2 - p^2)^2} \sqrt{h_i^2 - b_i^2 \left(\frac{p}{m_i^0}\right)^2}. \quad (6)$$

Решение уравнения (6) справедливо при $h_i \geq \frac{b_i p}{m_i^0}$, небольшом трении и непрерывном движении системы. Более подробно это решение описано в работе [1].

Теперь рассмотрим применение этого подхода на некоторых примерах:

- 1) продольные колебания однородной консоли;
- 2) крутильные колебания однородной консоли (вала);
- 3) поперечные колебания шарнирно-опертой однородной балки.

Пример 1. Рассмотрим вынужденные продольные колебания однородной консоли с левым защемленным торцем, расположенной на шероховатой плоскости (рис. 3). Пусть погонная масса консоли равна m_0 , длина — l , погонная жесткость — EF_0 . На рис. 4 изображена механическая колебательная система, эквивалентная исходной системе.

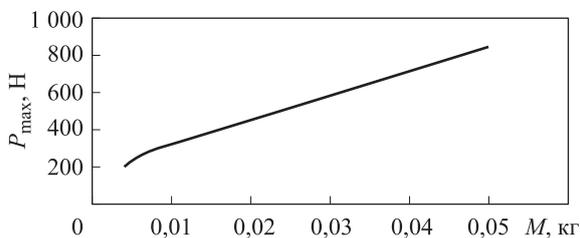


Рис. 3. Схема для определения продольных колебаний

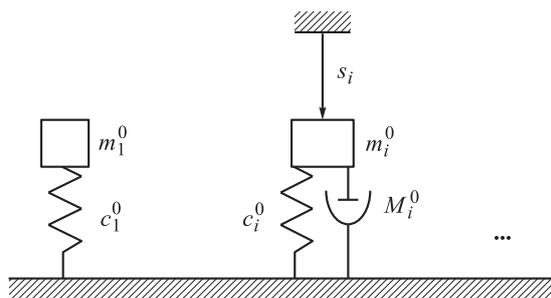


Рис. 4. Механический анализ колебательной системы

Дифференциальное уравнение продольных колебаний однородной консоли [1] имеет вид

$$EF_0 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - m_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0. \quad (7)$$

Здесь $u(x, t)$ — перемещение в продольном направлении материального сечения стержня.

Зададим граничные условия. Так как левый торец зашцеилен, $u(0, t) = 0$, а правый торец свободен, то $N(l, t) = EF_0 \frac{\partial u}{\partial x}(l, t) = 0$.

Согласно методу Фурье, решение уравнения (7) имеет вид

$$u(x, t) = X(x)s(t).$$

Тогда его можно преобразовать в дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + \lambda^2 X = 0, \quad \lambda^2 = \frac{m_0 \omega^2}{EF_0}. \quad (8)$$

Решение дифференциального уравнения (8) для $X(x)$, удовлетворяющее граничным условиям, имеет вид

$$X_i(x) = \sin \frac{\pi x}{2l} (2i - 1), \quad i = 1, 2, \dots$$

Приведенная масса m_i^0 и жесткость c_i^0 i -го осциллятора определяются формулами

$$m_i^0 = \int_0^l m_0 X_i^2(x) dx = m_0 \frac{l}{2},$$

$$c_i^0 = EF_0 \int_0^l \left(\frac{dX_i}{dx} \right)^2 dx = \frac{EF_0}{l} \frac{\pi^2}{8} (2i-1)^2.$$

Чтобы вычислить приведенный коэффициент демпфирования (3), представим силу трения в виде ряда

$$\frac{P}{l} f = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \sin \frac{\pi x}{2l} (2i-1), \quad a_i = \frac{4Pf}{\pi(2i-1)l},$$

где f — коэффициент сухого трения первого рода.

Поскольку

$$\int_0^l \left[\sin \frac{\pi x}{2l} (2i-1) \right]^2 dx = \frac{l}{2},$$

имеем

$$\mu_i = \frac{64Pf}{A_i \pi^3 l (2i-1)^2 p}. \quad (9)$$

Выражение (5) для коэффициента затухания с учетом формулы (9) принимает вид

$$n_i = \frac{\mu_i}{2m_i} = \frac{Pf}{A_i \pi^2 l^2 m_0 p (2i-1)}.$$

Поскольку $\cos \lambda_i l = 0$, $\lambda_i = \frac{\pi(2i-1)}{2l}$, частота собственных колебаний (5), согласно уравнению (8),

$$\omega_i^2 = \frac{\pi^2}{4} \frac{(2i-1)^2}{l^2} \frac{EF_0}{m_0}.$$

Обобщенная сила

$$Q_i = F_0 \cos(pt + \alpha_i) X_i(x_j),$$

поэтому

$$h_i = \frac{2F_0 X_i(x_j)}{m_0 l}.$$

Таким образом, амплитуда вынужденных колебаний (см. (6))

$$A_i = \frac{1}{\left(\frac{\pi^2(2i-1)^2}{4l^2} \frac{EF_0}{m_0} - p^2\right)^2} \sqrt{4\left(\frac{F_0 X_i(x_j)}{m_0 l}\right)^2 - \left(\frac{Pf}{\pi^2 l(2i-1)p}\right)^2 \frac{4p^2}{(m_0 l)^2}}.$$

Пример 2. Рассмотрим вынужденные крутильные колебания однородной консоли (вала) с левым защемленным торцом, расположенной на шероховатой плоскости (рис. 5). В этом случае прослеживается аналогия с продольными колебаниями (см. пример 1). Заменяем погонную жесткость EF_0 погонной жесткостью консоли на кручение GI_{p0} (I_p — полярный момент инерции), погонную массу m_0 — погонным моментом инерции I_0 , а перемещение в продольном направлении материального сечения стержня $u(x, t)$ — углом кручения $\varphi(x, t)$. Тогда

$$\lambda_i^2 = \frac{I_0}{GI_{p0}} \omega_i^2, \quad \lambda_i = \frac{\pi(2i-1)}{2l}, \quad i = 1, 2, 3, \dots$$

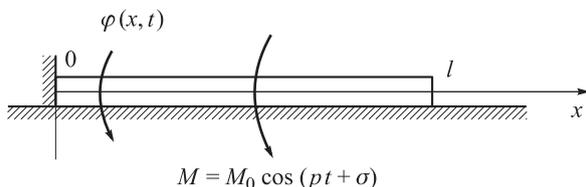


Рис. 5. Схема крутильных колебаний

Форма собственных колебаний описывается уравнением

$$X_i(x) = \sin \frac{\pi x}{2l} (2i-1), \quad i = 1, 2, \dots$$

Коэффициенты разложения

$$a_i = \frac{4Pf}{\pi(2i-1)l}.$$

Здесь P — сила тяжести консоли; f — коэффициент сухого трения первого рода.

Приведенный коэффициент демпфирования

$$\mu_i = \frac{64Pf}{A_i \pi^3 l (2i-1)^2 p},$$

где A_i — i -я амплитуда вынужденных крутильных колебаний.

Обобщенная сила

$$Q_i = M_0 \cos(pt + \alpha) X_i(x_j),$$

M_0 — амплитуда внешнего крутящего момента, поэтому

$$h_i = \frac{M_0 X_i(x_j)}{I_0}.$$

Таким образом, амплитуда вынужденных крутильных колебаний

$$A_i = \frac{2}{\left[\frac{\pi^2 (2i-1)^2 G I_{p0}}{4l^2} \frac{1}{I_0} - p^2 \right]^2} \sqrt{\left(\frac{M_0 X_i(x_j)}{I_0 l} \right)^2 - \left(\frac{P f}{\pi^2 l (2i-1) p} \right)^2 \frac{p^2}{I_0^2 l^2}}.$$

Пример 3. Рассмотрим вынужденные поперечные колебания однородной шарнирно-опертой балки, расположенной на шероховатой плоскости (рис. 6). Применим изложенный выше подход к определению поперечных колебаний однородной шарнирно-опертой балки, расположенной на шероховатой плоскости. Пусть погонная масса консоли равна m_0 , длина — l , погонная жесткость на изгиб — EJ_0 . Внешняя возмущающая сила $F(t) = F_0 \cos(pt + \alpha)$ действует на балку в сечении x_k . Интенсивность нормальной реакции $q_N(x, t) = \frac{P}{l}$, где P — сила тяжести балки; $y(x, t)$ — прогиб балки.

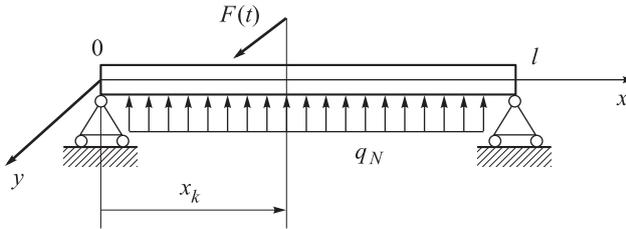


Рис. 6. Схема поперечных колебаний

Дифференциальное уравнение поперечных колебаний имеет вид

$$EJ_0 y^{IV} + m_0 \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0, \quad y^{IV} = \frac{\partial^4 y}{\partial x^4}.$$

Зададим граничные условия закрепления торцев балки:

$$y(0, t) = 0, \quad y(l, t) = 0, \quad M_{\text{изг}}(0, t) = 0, \quad M_{\text{изг}}(l, t) = 0,$$

где $M_{\text{изг}}$ — изгибающий момент в поперечном сечении балки [1].

Представим искомое решение в виде

$$y(x, t) = f(x)s(t).$$

Тогда граничные условия для формы колебаний $f(x)$ принимают вид

$$f(0) = 0, \quad f(l) = 0.$$

Так как $M_{\text{изг}} = -EJ_0 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$, получаем $f''(0) = 0, \quad f''(l) = 0$.

Решая эту краевую задачу, имеем

$$f_i(x) = \sin \frac{\pi x i}{l}, \quad i = 1, 2, 3, \dots$$

Интенсивность силы сухого трения $q_{\text{тр}} = \delta \frac{P}{l}$, где δ — коэффициент трения скольжения (сухого трения первого рода).

Разложим величину $q_{\text{тр}}$ в ряд по собственным формам свободных колебаний:

$$q_{\text{тр}} = \sum_{i=1}^{\infty} a_i f_i(x).$$

Отсюда

$$a_i = \delta \frac{P}{l} \frac{\int_0^l \sin \frac{\pi x i}{l} dx}{\frac{l}{2}},$$

$$a_{2i} = 0, \quad i = 1, 2, 3, \dots, \quad a_{2i-1} = \frac{4\delta}{\pi l} \frac{P}{2i-1}, \quad i = 1, 2, 3, \dots$$

Приведенная масса осциллятора i -го тона колебаний

$$m_i^0 = \int_0^l m_0 f_i^2 dx = m_0 \frac{l}{2}.$$

Приведенная жесткость i -го осциллятора

$$c_i^0 = \int_0^l EJ_0 \left(\frac{\partial^2 f_i}{\partial x^2} \right)^2 dx = EJ_0 \left(\frac{\pi i}{l} \right)^4 \frac{l}{2} = EJ_0 \frac{\pi^4 i^4}{2l^3}.$$

Перемещение массы i -го осциллятора (см. рис. 1) удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$m_i^0 \ddot{y}_i + \mu_i \dot{y}_i + c_i^0 y_i = Q_i(t). \quad (10)$$

Здесь

$$Q_i = \frac{F_0 \cos pt f_i(x_j) \delta y_i}{\delta y_i} = F_0 \cos pt f_i(x_j), \quad \delta y_i \neq 0.$$

Согласно выражению (9), приведенный коэффициент демпфирования

$$\mu_i^0 = \frac{4P\delta}{A_i \pi^3 (2i-1)^2 p},$$

где A_i — амплитуда вынужденных колебаний i -го осциллятора; p — частота возбуждающего воздействия.

Перепишем уравнение (10) в виде

$$\ddot{y}_i + 2n_i \dot{y}_i + \omega_i^2 y_i = h_i \cos(pt + \alpha), \quad (11)$$

где

$$2n_i = \frac{\mu_i^0}{m_i^0} = \frac{8P\delta}{A_i \pi^3 (2i-1)^2 p m_0 l}, \quad h_i = \frac{F_0 f_i(x_j)}{m_0}.$$

Таким образом,

$$A_i = \frac{h_i}{\sqrt{(\omega_i^2 - p^2)^2 + 4n_i^2 p^2}}. \quad (12)$$

Здесь $\omega_i^2 = \frac{EJ_0}{m_i^2} \left(\frac{\pi i}{l} \right)^4$.

Угол сдвига фаз

$$\varepsilon_i = \arctg \frac{2n_i p}{\omega_i^2 - p^2}.$$

Из формул (6) и (12) окончательно получаем

$$A_{2i-1} = \pm \frac{1}{\left[\frac{EJ_0}{m_0} \left(\frac{(2i-1)\pi}{l} \right)^4 - p^2 \right]^2} \sqrt{4 \frac{[F_0 f_{2i-1}(x_j)]^2}{m_0^2 l^2} - b_{2i-1}^2 \frac{p^2}{m_0^2 l^2}},$$

где $b_{2i-1} = \frac{\delta P}{l^2} \frac{4}{(2i-1)p\pi}$, $i = 1, 2, 3, \dots$

Отметим, что значение $n_i = 0$ при $i = 2, 4, 6, \dots$

Таким образом, получены аналитические формулы для расчета вынужденных колебаний одномерных систем [2, 3], которые можно использовать на практике, в частности для исследования динамики нефтепроводов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Тимошенко С.П. Колебания в инженерном деле. М.: ГИФМЛ, 1959.
2. Шиманецкий Ю.А. Динамический расчет судовых конструкций. Л.: Судпромгиз, 1963.
3. Колесников К.С. Динамика ракет. М.: Машиностроение, 2003.

Статья поступила в редакцию 14.09.2012