УДК 531.38

Ю.Д. Плешаков, Е.А. Брусенцова

НОВЫЕ ИНТЕГРИРУЕМЫЕ СЛУЧАИ В ЗАДАЧЕ ЖУКОВСКОГО О ДВИЖЕНИИ ТВЕРДОГО ТЕЛА С ПОЛОСТЯМИ, ЗАПОЛНЕННЫМИ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТЬЮ

Найден ряд новых интегрируемых случаев уравнений Жуковского — Пуанкаре. Существенное отличие найденных решений от классических общих случаев интегрируемости уравнений состоит в том, что матрицы параметров гамильтониана являются недиагональными. Показано, что в случае, когда матрицы параметров диагональные, все девять параметров матриц независимы и, следовательно, полученные решения содержат как частные результаты классические случаи интегрируемости Клебша — Шоттки, Ляпунова — Стеклова, Адлера — ван Мербеке.

E-mail: udpleshakova@mail.ru

Ключевые слова: *твердое тело с эллипсоидальной полостью; уравнение Жуковского — Пуанкаре; задачи Клебша — Шоттки, Ляпунова — Стеклова, Адлера — ван Мербеке; интегрируемые случаи.*

Работа посвящена классической проблеме интегрируемости уравнений Жуковского — Пуанкаре. Специальными случаями уравнений Жуковского — Пуанкаре являются:

уравнения движения твердого тела с эллипсоидальной полостью, заполненной идеальной несжимаемой жидкостью, совершающей однородное вихревое движение, — задача Жуковского;

уравнения движения, описывающие динамику взаимодействующих спинов, — классические модели Гейзенберга.

Гамильтониан уравнений Жуковского — Пуанкаре определяется выражением [1, 2]

$$2H = a\mathbf{P}\cdot\mathbf{P} + 2c\mathbf{R}\cdot\mathbf{P} + b\mathbf{R}\cdot\mathbf{P} = \text{const}, \tag{1}$$

где a, b, c — матрицы 3×3, причем a, b — симметричные матрицы.

Уравнения движения можно представить следующим образом:

$$\dot{\mathbf{P}} = \mathbf{P}\cdot\nabla_P H \Rightarrow \dot{\mathbf{P}} = \mathbf{P}\cdot a\mathbf{P} + \mathbf{P}\cdot c\mathbf{R}, \tag{2}$$

$$\dot{\mathbf{R}} = \mathbf{R}\times\nabla_R H \Rightarrow \dot{\mathbf{R}} = \mathbf{R}\cdot\mathbf{P}c + \mathbf{R}\cdot b\mathbf{R}. \tag{3}$$

Уравнения (2)—(3) имеют три первых интеграла

$$2H = a\mathbf{P}\cdot\mathbf{P} + 2c\mathbf{R}\cdot\mathbf{P} + b\mathbf{R}\cdot\mathbf{R} = \text{const},$$

$$\mathbf{P}\cdot\mathbf{P} = \text{const}, \quad \mathbf{R}\cdot\mathbf{R} = \text{const}.$$

Для интегрируемости гамильтоновой системы (1)—(3) по Лиувиллю достаточно найти четвертый первый независимый дополнительный интеграл. Известны три общих случая интегрируемости уравнений Жуковского — Пуанкаре с четвертым первым дополнительным интегралом.

Эти классические решения характеризуются следующими условиями.

1. Случай Клебша — Шоттки [3, 4, 7]:

$$a_{ij} = b_{ij} = c_{ij} = 0, \quad \forall i \neq j, \quad i, j = 1, 2, 3,$$

$$a_i = b_i, \quad i = 1, 2, 3,$$

$$c_1^2(a_2 - a_3) + c_2^2(a_3 - a_1) + c_3^2(a_1 - a_2) + (a_1 - a_2)(a_2 - a_3)(a_3 - a_1) = 0.$$

2. Случай Ляпунова — Стеклова [4, 5, 7]:

$$a_{ij} = b_{ij} = c_{ij} = 0, \quad \forall i \neq j, \quad i, j = 1, 2, 3,$$

$$a = \operatorname{diag}(\lambda_2^2\lambda_3^2, \ \lambda_1^2\lambda_3^2, \ \lambda_1^2\lambda_2^2),$$

$$c = \operatorname{diag}\left[\lambda_2\lambda_3(\lambda_2^2 + \lambda_3^2), \ \lambda_1\lambda_3(\lambda_1^2 + \lambda_3^2), \ \lambda_1\lambda_2(\lambda_1^2 + \lambda_2^2)\right],$$

$$b = \operatorname{diag}\left[(\lambda_2^2 + \lambda_3^2)^2, \ (\lambda_1^2 + \lambda_3^2)^2, \ (\lambda_1^2 + \lambda_2^2)^2\right].$$

3. Случай Адлера — ван Мербеке [6, 7]:

$$a_{ij} = b_{ij} = c_{ij} = 0, \quad \forall i \neq j, \quad i, j = 1, 2, 3,$$

$$a_i = -\frac{2}{3}\varepsilon_{ijk}\lambda_j{}^2\lambda_k{}^2, \quad i, \ j, \ k = 1, 2, 3; \quad \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0,$$

$$c_i = \varepsilon_{ijk}\left[\lambda_i^4 + \lambda_j^2\lambda_k^2 - (\lambda_j + \lambda_k)^2(\lambda_j^2 + \lambda_k)\right],$$

$$b_i = \frac{2}{3}\varepsilon_{ijk}\left[\lambda_i{}^4 - \lambda_j\lambda_k(\lambda_j{}^2 + \lambda_k{}^2 + \frac{5}{4}\lambda_j\lambda_k)\right],$$

где символ ε_{ijk} означает круговую перестановку индексов.

Следует обратить внимание, что в классических решениях недиагональные элементы матриц гамильтониана уравнений Жуковского — Пуанкаре равны нулю: $a_{ij} = b_{ij} = c_{ij} = 0, \ \forall i \neq j, \ i, j = 1, 2, 3.$

В общих случаях интегрируемости уравнений (2) — (3) с четвертым первым квадратичным интегралом справедлива теорема Стеклова об обращении роли функций гамильтониана и квадратичного интеграла.

Проведем доказательство этой важной теоремы. Следуя Стеклову, будем искать квадратичный интеграл в виде

$$2V_{1,1} = X\mathbf{P}\cdot\mathbf{P} + 2Y\mathbf{R}\cdot\mathbf{P} + Z\mathbf{R}\cdot\mathbf{R} = \text{const}, \tag{4}$$

где X, Y, Z — матрицы 3×3, причем X, Z — симметричные матрицы.

Квадратичная форма (4) будет являться первым интегралом уравнений (2)—(3), если первая производная по времени от параметра V, составленная в соответствии с уравнением движения, тождественно равна нулю.

Согласно уравнениям (2)—(3), находим

$$\begin{gathered}2\dot{V} = X\mathbf{P}\cdot\dot{\mathbf{P}} + Y\mathbf{R}\cdot\dot{\mathbf{P}} + \mathbf{P}Y\cdot\dot{\mathbf{R}} + Z\mathbf{R}\cdot\dot{\mathbf{R}} = \\ = [\mathbf{P}\cdot(a\mathbf{P}\cdot X\mathbf{P})] + [c\mathbf{R}\cdot(X\mathbf{P}\cdot\mathbf{P}) + Y\mathbf{R}\cdot(\mathbf{P}\cdot a\mathbf{P}) + \\ + \mathbf{R}\cdot(\mathbf{P}c\cdot\mathbf{P}Y)] + [\mathbf{P}Y\cdot(\mathbf{R}\cdot b\mathbf{R}) + \mathbf{P}c\cdot(Z\mathbf{R}\cdot\mathbf{R}) + \mathbf{P}\cdot(c\mathbf{R}\cdot Y\mathbf{R})] + \\ + [\mathbf{R}\cdot(b\mathbf{R}\cdot Z\mathbf{R})] \equiv 0, \ \forall\mathbf{P}, \ \mathbf{R}\neq 0.\end{gathered} \tag{5}$$

Поскольку в соотношение (5) параметры гамильтониана $H(a,b,c)$ и квадратичного интеграла $V(X, Y, Z)$ входят симметрично, справедлива теорема Стеклова. Если для уравнений движения Жуковского — Пуанкаре известен общий случай интегрируемости с четвертым квадратичным интегралом $V = \text{const}$, то для этих уравнений можно указать еще один случай интегрируемости, поменяв местами роли функций H и V:

$$\begin{gathered}V_{(1)} \to H_{(2)}, \\ H_{(1)} \to V_{(2)}.\end{gathered}$$

Покажем, что существуют новые интегрируемые случаи при наличии в гамильтониане уравнений Жуковского — Пуанкаре матриц общего недиагонального вида.

Примечание. Везде далее символ $\sum\limits_{(123)}$ означает, что сумма состоит из членов, полученных круговой перестановкой индексов; диагональные элементы матриц имеют один индекс.

Теорема 1. Если

$$c_i = \beta + na_i + mX_i^{-1}, \ X_i = \alpha + \eta a_i^{-1}, \ i = 1, 2, 3, \quad \alpha, \beta, n, m, \eta = \text{const},$$

$$a_{12} = a_{23} = b_{12} = b_{23} = c_{12} = c_{21} = c_{23} = c_{32} = 0,$$

$$a_{13} = \frac{c_{13}}{\Gamma_{13}} A_{13}, \ \ b_{13} = \frac{c_{13}}{\Gamma_{13}} B_{13},$$

$$c_{13}^2 = c_{31}^2, \quad \sum_{(123)} a_1(A_2 - A_3) = 0, \quad a_1 - a_2 = \frac{c_{13}}{\Gamma_{13}}(A_1 - A_2),$$

$$\sum_{(123)} b_1(B_2 - B_3) = 0, \quad b_1 - b_2 = \frac{c_{13}}{\Gamma_{13}}(B_1 - B_2), \tag{6}$$

$$c_1\Gamma_{13} - c_{13}\Gamma_1 = c_2 A_{13} - \Gamma_2 a_{13},$$

$$c_3\Gamma_{31} - c_{31}\Gamma_3 = c_2 A_{13} - \Gamma_2 a_{13}, \;\; \Gamma_{13}c_{31} = \Gamma_{31}c_{13},$$

то существует четвертый первый независимый квадратичный интеграл

$$2V_{1,1} = A\mathbf{P}\cdot\mathbf{P} + 2\Gamma\mathbf{R}\cdot\mathbf{P} + B\mathbf{R}\cdot\mathbf{R} = \text{const}, \tag{7}$$

где элементы матриц A, B, Γ определяются выражениями

$$\begin{gathered} A_{12} = A_{23} = B_{12} = B_{23} = \Gamma_{12} = \Gamma_{21} = \Gamma_{23} = \Gamma_{32} = 0, \\ \Gamma_{13}^2 = \Gamma_{31}^2, \;\; A_{13}^2 = B_{13}^2, \end{gathered} \tag{8}$$

$$\Gamma_i = \chi c_i + X_i(c_i + \mu) + Y_i, \;\; \chi, \;\mu = \text{const}, \;\; \chi(a_1 - a_3) = A_1 - A_3, \tag{9}$$

$$B = \zeta_0 \cdot 1 + \zeta \cdot b, \;\; \zeta_0, \zeta = \text{const}, \tag{10}$$

причем α, β, η, μ, χ, ζ, m, n, Y_1, Y_2, Y_3 можно найти следующим образом:

$$d_1 = -\frac{\hat{m}\eta^2 + n + 1}{\hat{m}\eta\alpha} d_2, \; d_2 = d_0\left(\hat{m}\eta\alpha\right)^2\left(a_1 - a_3\right)\left(a_3 - a_2\right)\left(a_1 - a_2\right), \tag{11}$$

$$d_3 + X_3\left(c_3 + \mu\right) = d_0\left(\hat{m}\eta\alpha\left(c_3 + a_3\right) + \hat{m}\eta^2 + n + 1\right), \tag{12}$$

$$\begin{gathered} \hat{m}\eta^2 + n = \frac{\sum\limits_{(123)} c_1 a_1\left(a_2 - a_3\right)}{\left(a_1 - a_3\right)\left(a_3 - a_2\right)\left(a_2 - a_1\right)}, \\ \hat{m}\eta\alpha = \frac{\sum\limits_{(123)} c_1\left(a_3 - a_2\right)}{\left(a_1 - a_3\right)\left(a_3 - a_2\right)\left(a_2 - a_1\right)}, \end{gathered} \tag{13}$$

$$(B_2 - B_3)\,\theta_2(c_1\theta_3 - c_3\theta_1) + (B_3 - B_1)\,\theta_1(c_2\theta_3 - c_3\theta_2) = 0, \tag{14}$$

$$\chi = \frac{\left[\sum\limits_{(123)} B_1(A_3 - A_2)\right]\theta_1\theta_2}{(c_2\theta_1 - c_1\theta_2)(A_3 - A_2 + B_2 - B_3)(B_1 - B_3) + c_1\theta_2\left[\sum\limits_{(123)} B_1(A_3 - A_2)\right]}, \tag{15}$$

$$\zeta = \chi + \frac{\left[\sum\limits_{(123)} B_1(A_3 - A_2)\right]\theta_1\theta_2}{c_1\theta_2(A_3 - A_1)(B_2 - B_3) + c_2\theta_1(A_2 - A_3)(B_1 - B_3)}. \tag{16}$$

Здесь

$$d_1 = \sum_{(123)} Y_1 a_1(a_2 - a_3) + \alpha n(a_3 - a_2)(a_1 - a_3)(a_2 - a_1);$$

$$d_2 = \sum_{(123)} Y_1(a_2 - a_3) + \hat{\eta}(a_3 - a_1)(a_2 - a_3)(a_2 - a_1);$$

$$d_3 = n\eta + \alpha(\mu + \beta) + Y_3; \tag{17}$$

$$\hat{m} = \frac{m}{x_1 x_2 x_3 a_1 a_2 a_3}, \quad \hat{\eta} = \frac{\eta(\mu + \beta)}{a_1 a_2 a_3};$$

$$\theta_i = \chi c_i - \Gamma_i, \quad i = 1, 2, 3;$$

$$d_0 = \left[\alpha\left(\beta + \mu\right) + \eta n\right]\left(\hat{m}\eta^2 + n - 1\right)\Delta^{-1};$$

$$\Delta = \left(\hat{m}\eta^2 + n\right)^2 - 1 + \hat{m}\eta\alpha\left\{\hat{m}\eta\alpha\left[a_3\left(a_1 + a_2\right) - a_1 a_2\right] + 2\left(\hat{m}\eta^2 + n\right)a_3 - 2c_3\right\}.$$

Следовательно, уравнения Жуковского — Пуанкаре интегрируются в квадратурах.

В силу теоремы Стеклова об обращении роли функций гамильтониана и квадратичного интеграла справедлива следующая теорема.

Теорема 2. Если гамильтониан задачи Жуковского — Пуанкаре определен выражением

$$2H_{1,2} = A\mathbf{P}\cdot\mathbf{P} + 2\Gamma\mathbf{R}\cdot\mathbf{P} + B\mathbf{R}\cdot\mathbf{R} = \text{const},$$

где элементы матриц A, Γ, B связаны между собой соотношениями (6)—(17), то существует четвертый первый квадратичный интеграл

$$2V_{1,2} = a\mathbf{P}\cdot\mathbf{P} + 2c\mathbf{R}\cdot\mathbf{P} + b\mathbf{R}\cdot\mathbf{R} = \text{const}.$$

Здесь элементы матриц a, b, c отвечают условиям (6), (8)—(17).

Из теоремы 2 вытекает следующая теорема.

Теорема единственности. Уравнения Жуковского — Пуанкаре интегрируемы в квадратурах в самом общем случае, когда матрицы параметров гамильтониана задачи являются диагональными, т. е. число независимых элементов матриц параметров гамильтониана задачи Жуковского — Пуанкаре равно девяти.

Следствие 1. Интегрируемые случаи задачи Жуковского — Пуанкаре, открытые Клебшем — Шоттки, Ляпуновым — Стекловым, Адлером — ван Мербеке, являются частными результатами найденного решения, определяемого условиями теоремы 2.

Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 3. Если

$$a_{12} = a_{13} = b_{12} = b_{13} = 0,\ a_{23} + b_{23} = 0,\ b_i = b_0 + a_i,\ i = 1, 2, 3,$$

$$c_2 Y_{23} = c_1 X_{23} - Y_1 a_{23},\ c_2 + c_3 = 0,\ c_{ij} = 0,\ \forall i \neq j,\ i, j = 1, 2, 3,$$

$$\left(a_1 - a_3\right) X_{23} = \left(X_1 - X_3\right) a_{23},\ \left(a_2 - a_3\right) X_{23} = \left(X_2 - X_3\right) a_{23},$$

то существует четвертый первый независимый квадратичный интеграл

$$2V_{3,1} = X\mathbf{P}\cdot\mathbf{P} + 2Y\mathbf{R}\cdot\mathbf{P} + Z\mathbf{R}\cdot\mathbf{R} = \mathrm{const},$$

где элементы матриц X, Y, Z связаны между собой соотношениями

$$X_{12} = X_{13} = Z_{12} = Z_{13} = 0,\ X_{23} + Z_{23} = 0,\ Z_i = Z_0 + X_i,\ i = 1, 2, 3,$$

$$Y_{12} = Y_{21} = Y_{13} = Y_{31} = 0,\ Y_{23} + Y_{32} = 0,$$

$$\frac{c_1}{a_{23}}\left[Y_{23}\left(Y_3 + \frac{X_1 - X_3}{X_{23}}Y_{23}\right) + Y_1 X_{23}\right] = -Y_{23}^2 + Y_1^2 + \frac{Y_{23}^2\left(X_2 - X_1\right)\left(X_1 - X_3\right)}{X_{23}^2},$$

$$\left(Y_3 + \frac{X_1 - X_3}{X_{23}}Y_{23}\right)^2 = Y_1^2 - Y_{23}^2 + X_{23}^2 + \frac{\left(X_{23}^2 - Y_{23}^2\right)\left(X_2 - X_1\right)\left(X_1 - X_3\right)}{X_{23}^2},$$

$$X_{23}\left(Y_2 + Y_3\right) = Y_{23}\left(X_3 - X_2\right),$$

и, следовательно, уравнения Жуковского — Пуанкаре интегрируются в квадратурах. Значит, справедлива следующая теорема.

Теорема 4. Если

$$a_{12} = a_{23} = b_{12} = b_{23} = 0,\ a_{13} + b_{13} = 0,\ a_1 = a_2,\ b_1 = b_2,$$

$$c_{13} = a_{13}, \quad c_2 = c_1, \quad c_{13} + c_{31} = 0, \quad c_{12} = c_{21} = c_{23} = c_{32} = 0,$$

$$(a_1 - a_3) X_{13} = (X_1 - X_3) a_{13}, \quad (b_1 - b_3) Z_{13} = (Z_1 - Z_3) b_{13},$$

то существует четвертый первый независимый квадратичный интеграл

$$2V_{4,1} = X\mathbf{P} \cdot \mathbf{P} + 2Y\mathbf{R} \cdot \mathbf{P} + Z\mathbf{R} \cdot \mathbf{R} = \mathrm{const},$$

где элементы матриц X, Y, Z связаны между собой соотношениями

$$X_{12} = X_{23} = Z_{12} = Z_{23} = 0, \quad X_{13} + Z_{13} = 0, \quad X_1 = X_2, \quad Z_1 = Z_2,$$

$$Y_{12} = Y_{21} = Y_{23} = Y_{32} = 0, \quad Y_{13} + Y_{31} = 0, \quad X_{13} = Y_{13}, \quad Y_1 = Y_2,$$

$$(Y_2 + Y_3) a_{13} = (c_2 + c_3) X_{13},$$

$$Y_2 (a_2 - a_3 + c_3) = (X_2 - X_3 + Y_3) c_2, \quad Y_2 (b_2 - b_3 + c_3) = (Z_2 - Z_3 + Y_3) c_2$$

и, значит, уравнения Жуковского — Пуанкаре интегрируются в квадратурах.

Следствие. Решение, определяемое теоремой 4, включает в себя интегрируемый случай, полученный А.В. Борисовым, И.С. Мамаевым и В.В. Соколовым [7]. Таким образом, найденные в работе решения существенно отличаются от классических общих случаев интегрируемости уравнений тем, что матрицы параметров гамильтониана являются недиагональными.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Жуковский Н.Е. О движении твердого тела, имеющего полости, наполненные однородной капельной жидкостью: собр. соч. Т. 1. М., 1949.
2. Моисеев Н.Н., Румянцев В.В. Динамика тела с полостями, содержащими жидкость М.: Наука, 1965.
3. Schottky F. Über das analytisće Problem der Rotation eines starren Körpers in Raume von vier Démensionen. Sitzungsber. König. Preuss. Akad. Wiss. Berlin, 1891. Bd. XII. S. 227—232.
4. Бабенко А.Н. Уравнения Эйлера на алгебрах e(3) и so(4). Изоморфизм интегрируемых случаев // Функ. ан. и его прил. 1986. Т. 20 № 1. С. 64—66.
5. Stekloff V.A. Sur le movement d'un corps solide ayant une cavite de forme ellipsoidale remple par variations des latitudes. Ann. de la fac. des Sci.: de Toulouse. Ser. 3, 1909. Vol. 1.
6. Adler M., van Moerbeke P. The algebralic integrability of geodesic flow on so(4), Invent. math., 1982. V. 67. P. 297—331.
7. Борисов А.В., Мамаев И.С. Динамика твердого тела. Москва; Ижевск: РХД, 2001.

Статья поступила в редакцию 14.09.2012