

Н.И. Бондаренко, Ю.И. Терентьев

**К ВОПРОСУ ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ ДАВЛЕНИЯ  
В ТРУБОПРОВОДЕ ПРИ ЕГО ЗАКРЫТИИ**

*Рассмотрено неустановившееся движение идеальной сжимаемой жидкости в однородной упругой прямой трубе, вызванное срабатыванием отсечного устройства. Результаты расчетов давления перед отсечным устройством для различных случаев прямого и непрямого гидроударов представлены в виде двух обобщенных графических зависимостей.*

E-mail: yury\_terentev@mail.ru

**Ключевые слова:** трубопровод, расход жидкости, разностная схема, давление, фаза гидравлического удара.

В процессе эксплуатации жидкостных ракет их расходные магистрали подвергаются различным наземным и полетным режимам нагружения [1]. В некоторых из них велика вероятность возникновения гидравлического удара, например, в случае аварийного выключения двигателей при стендовых испытаниях или на пусковой установке.

При проведении прочностного расчета трубопроводов и их опор необходимо знать распределение давления по длине трубопровода, в том числе и при гидравлическом ударе. Этому вопросу посвящено много работ, например [2—10, 12]. Однако интересным является инженерный метод определения характеристик переходных процессов в трубопроводах с помощью которого можно оперативно и с заданной точностью их прогнозировать.

В настоящей работе предложен подход, основанный на численном решении уравнений движения и неразрывности идеальной сжимаемой жидкости в полностью заполненной однониточной трубе, который дает возможность определить изменение параметров потока во времени при быстром перекрытии трубопровода, а в частном случае получить обобщенные зависимости давления перед клапаном, перекрывающим проходное сечение трубы, от времени.

Уравнения движения и неразрывности потока для рассматриваемого случая имеют вид [5, 8]

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial p}{\partial t} + \rho a^2 \frac{\partial v}{\partial x} &= 0, \end{aligned} \tag{1}$$

где  $v, p$  — скорость и давление возмущенного потока в сечении  $x$  в момент времени  $t$ , отсчитываемые от своих начальных значений  $v_0$  и

$p_0$ , которые были в момент времени перед началом закрытия клапана;  $\rho$  — плотность жидкости в невозмущенном потоке;  $a$  — эффективная скорость звука в потоке с учетом упругости стенок трубы, определяемая для цилиндрической трубы,  $a = c\sqrt{E\delta / (E\delta + \varepsilon D)}$  ( $c$  — скорость звука в бесконечном объеме жидкости;  $D$  и  $\delta$  — диаметр и толщина стенки трубы;  $E$  и  $\varepsilon$  — модули упругости материала стенки и жидкости).

В уравнении движения не учитывается гидравлическое сопротивление трения трубы, поскольку расходные магистрали жидкостных ракет, как правило, имеют значительную длину и большой диаметр. В таких магистралях скорость потока небольшая и гидравлическое сопротивление незначительно [5]. Это позволяет сравнить результаты, получаемые по предлагаемой методике, с данными, получаемыми по формулам Жуковского и Мишо [4, 7] для прямого и непрямого гидроударов соответственно.

Обозначив площадь проходного сечения  $F$ , массовый расход  $G = \rho v F$  и вводя переменные

$$\varphi = \frac{G}{F} + \frac{p}{a}, \quad \psi = \frac{G}{F} - \frac{p}{a},$$

систему уравнений (1) представим в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + a \frac{\partial \varphi}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial \psi}{\partial t} - a \frac{\partial \psi}{\partial x} &= 0. \end{aligned} \tag{2}$$

Построим разностный аналог уравнений (2). Для этого используем разностную схему, в соответствии с которой однородную трубу длиной  $l$  разобьем вдоль своей продольной оси  $x$  на  $N$  элементов одинаковой длины  $h = l / N$ . Время  $t$  также разобьем на слои, отстоящие один от другого на шаг  $\tau$ . Обозначим через  $k$  номер слоя по времени  $t$ , через  $n$  — номер сечения по оси  $x$ .

Неизвестные функции  $\varphi$  и  $\psi$  на  $k$ -м временном слое в сечении  $n$  обозначим  $\varphi_n^k$ ,  $\psi_n^k$ . Частные производные запишем следующим образом:

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)_n^k &= \frac{\varphi_n^{k+1} - \varphi_n^k}{\tau}, \quad \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)_n^k = \frac{\varphi_n^k - \varphi_{n-1}^k}{h}, \\ \left( \frac{\partial \psi}{\partial t} \right)_n^k &= \frac{\psi_n^{k+1} - \psi_n^k}{\tau}, \quad \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} \right)_n^k = \frac{\psi_{n+1}^k - \psi_n^k}{h}. \end{aligned}$$

Тогда система уравнений (2) принимает вид

$$\varphi_n^{k+1} = (1-s)\varphi_n^k + s\varphi_{n-1}^k, \quad (3)$$

$$\psi_n^{k+1} = (1-s)\psi_n^k + s\psi_{n+1}^k, \quad (4)$$

где  $s = a\tau/h$  — критерий Куранта [12].

Формулы (3) и (4) позволяют определить функции  $\varphi$  и  $\psi$  на очередном временном  $(k+1)$ -слое через их известные значения на предыдущем временном слое. Выражение (3) справедливо для сечений  $n = \overline{2, N+1}$ , а выражение (4) — для  $n = \overline{1, N}$ .

Возвращаясь к переменным  $v, p$ , из уравнений (3) и (4) находим зависимости, связывающие давление и скорость на границах ( $n = 1$  и  $n = N + 1$ ) трубы:

$$a\rho v_1^{k+1} - p_1^{k+1} = (1-s)(a\rho v_1^k - p_1^k) + s(a\rho v_2^k - p_2^k), \quad (5)$$

$$a\rho v_{N+1}^{k+1} - p_{N+1}^{k+1} = (1-s)(a\rho v_{N+1}^k + p_{N+1}^k) + s(a\rho v_N^k + p_N^k), \quad (6)$$

а также в ее промежуточных ( $n = \overline{2, N}$ ) сечениях:

$$p_n^{k+1} = p_n^k(1-s) + \frac{s}{2} \left[ a\rho(v_{n-1}^k - v_{n+1}^k) + p_{n-1}^k + p_{n+1}^k \right], \quad (7)$$

$$v_n^{k+1} = v_n^k(1-s) + \frac{s}{2} \left[ v_{n-1}^k + v_{n+1}^k + \frac{1}{a\rho}(p_{n-1}^k - p_{n+1}^k) \right]. \quad (8)$$

Решение разностных уравнений (3) и (4) будет устойчивым и приближающимся к решению системы (2) при условии, что критерий Куранта  $s \leq 1$  [11].

Применим рассмотренную разностную схему решения к случаю нестационарного течения жидкости в трубе, которая на входе ( $n = 1$ ) подсоединена к емкости (трубопровод акустически открыт — давление  $p_1 = 0$ ), а на выходе у нее ( $n = N + 1$ ) находится клапан, перекрывающий проходное сечение трубы таким образом, что расход уменьшается от первоначального значения  $G_0$  до нуля в соответствии с известным линейным законом. Тогда из выражений (5) и (6) для крайних сечений трубы

$$G_1^{k+1} = (1-s)G_1^k + s \left( G_2^k - \frac{F}{a} p_2^k \right),$$

$$p_{N+1}^{k+1} = (1-s) \left( \frac{a}{F} G_{N+1}^k + p_{N+1}^k \right) + s \left( \frac{a}{F} G_N^k + p_N^k \right) - \frac{a}{F} G_{N+1}^{k+1},$$

а из уравнений (7) и (8) для внутренних сечений ( $n = \overline{2, N}$ )

$$p_n^{k+1} = (1-s)p_n^k + \frac{s}{2} \left[ \frac{a}{F} (G_{n-1}^k - G_{n+1}^k) + p_{n-1}^k + p_{n+1}^k \right],$$

$$G_n^{k+1} = (1-s)G_n^k + \frac{s}{2} \left[ \frac{F}{a} (p_{n-1}^k - p_{n+1}^k) + G_{n-1}^k + G_{n+1}^k \right].$$

Для акустически открытой трубы фаза гидравлического удара  $\beta = 2l/a$  [10], а период колебаний потока по низшему тону  $T = 4l/a = 2\beta$  [5]. Если время  $t_{\text{п}}$  перекрытия выходного сечения трубы  $t_{\text{п}} \leq \beta$ , максимальное давление гидроудара в этом сечении определяется формулой Жуковского [4, 7]:

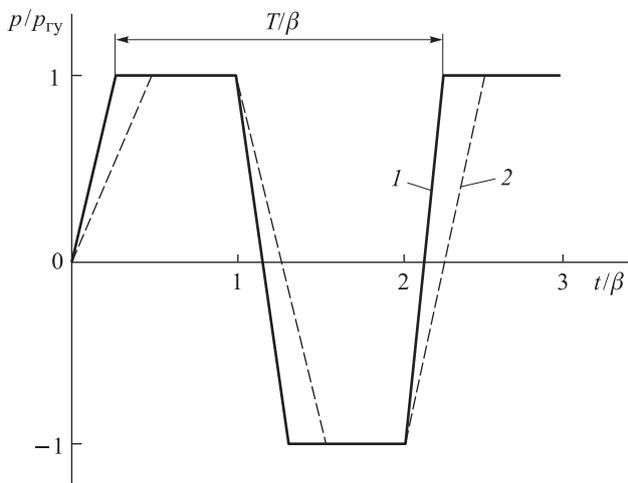
$$p_{\text{гв}} = \rho v_0 a = \frac{G_0 a}{F}. \quad (9)$$

Если  $t_{\text{п}} > \beta$  и торможение жидкости происходит в соответствии с линейным законом, максимальное давление определяется формулой Мишо [2, 7]:

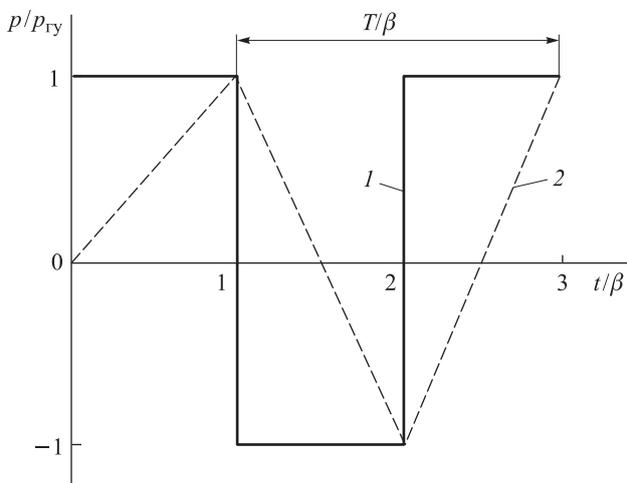
$$p = \rho v_0 a \beta / t_{\text{п}} = p_{\text{гв}} \beta / t_{\text{п}}. \quad (10)$$

Для проверки предлагаемой модели выполнены расчеты давления в выходном сечении трубопровода при различных значениях  $t_{\text{п}}$  и  $s = 1$ . Если  $0 < t_{\text{п}} < \beta$ , давление гидроудара изменяется следующим образом (рис. 1). За время  $t_{\text{п}}$  оно повышается, согласно линейному закону, от нуля до максимального значения  $p_{\text{гв}}$ , определяемого формулой (9), и остается неизменным до момента времени  $t = \beta$  — фазы гидравлического удара. Затем за время  $\Delta t = t_{\text{п}}$  оно снижается, согласно линейному закону, до величины  $-p_{\text{гв}}$  и остается постоянным до момента времени  $t = 2\beta$ . Далее за время  $\Delta t$  давление повышается в соответствии с линейным законом до значения  $p_{\text{гв}}$ . После того процесс, реализуемый на временном отрезке  $t_{\text{п}} \leq t \leq (t_{\text{п}} + 2\beta)$ , повторяется с периодом  $T = 2\beta$ , равным периоду колебаний потока в акустически открытой трубе.

Очевидно, что при  $t_{\text{п}} = 0$  (мгновенное перекрытие) график изменения давления соответствует представленному на рис. 2 (кривая 1). Этот график обычно и приводят в учебной литературе по гидромеханике [10]. Для времени перекрытия  $t_{\text{п}} = \beta$  график изменения давления от времени показан на рис. 2 (кривая 2).



**Рис. 1.** Зависимость давления в конце трубы от времени при  $t_n = \beta/4$  (1) и  $\beta/2$  (2)

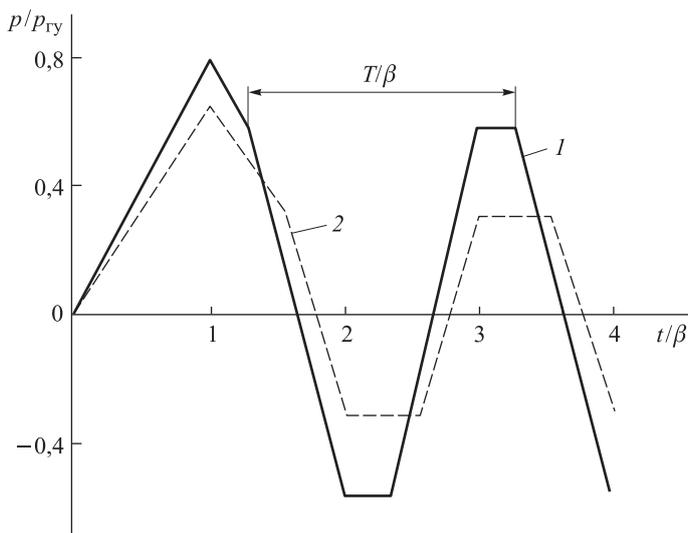


**Рис. 2.** Зависимость давления в конце трубы от времени при  $t_n = 0$  (1) и  $t_n = \beta$  (2)

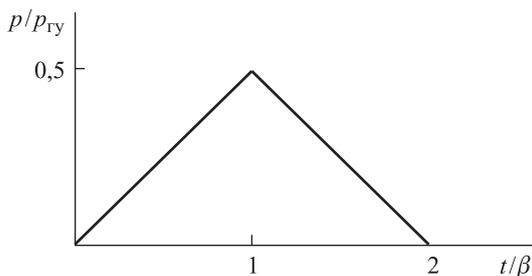
Теперь рассмотрим случаи, когда  $\beta < t_n < 2\beta$ . Как следует из рис. 3, давление достигает максимума в момент времени  $t = \beta$ , причем его значение точно совпадает с вычисленным по формуле (10). Так, при  $t_n = 1,25\beta$  давление  $p = 0,8p_{ry}$ , а при  $t_n = 1,5\beta$   $p = 0,6p_{ry}$ .

После достижения максимального значения и до момента времени  $t_n$  давление снижается в соответствии с линейным законом, график изменения которого симметричен относительно вертикали при  $t = \beta$  соответствующему графику изменения давления на участке  $0 \leq t \leq \beta$ . При  $t = t_n$  давление  $p = p_n = (2\beta/t_n - 1)p_{ry}$ . При  $t > t_n$  давление изменяет-

ся следующим образом: на временном отрезке  $t_{\text{п}} \leq t \leq 2\beta$  оно снижается, согласно линейному закону, до значения  $-p_{\text{п}}$  и остается постоянным в течение времени  $\Delta t = t_{\text{п}} - \beta$ . Далее оно повышается, согласно линейному закону, достигая при  $t = 3\beta$  значения  $p_{\text{п}}$ , которое сохраняется в течение времени  $\Delta t$ . Затем процесс, реализуемый на временном отрезке  $t_{\text{п}} \leq t \leq (t_3 + 2\beta)$ , повторяется с периодом  $T$ . Следует отметить, что при  $t_{\text{п}} \rightarrow 2\beta$  давление  $p_{\text{п}} \rightarrow 0$ , а  $\Delta t \rightarrow \beta$ . В предельном случае ( $t_{\text{п}} = 2\beta$ ) график изменения давления показан на рис. 4.



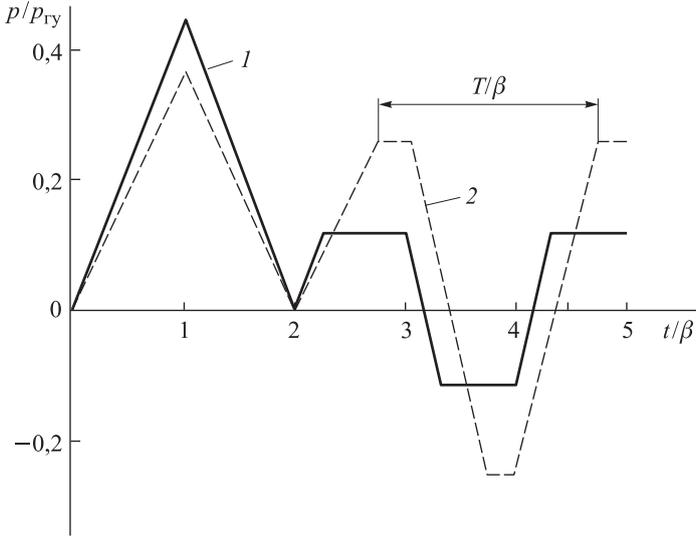
**Рис. 3.** Зависимость давления в конце трубы от времени при  $t_{\text{п}} = 125\beta$  (1) и  $1,5\beta$  (2)



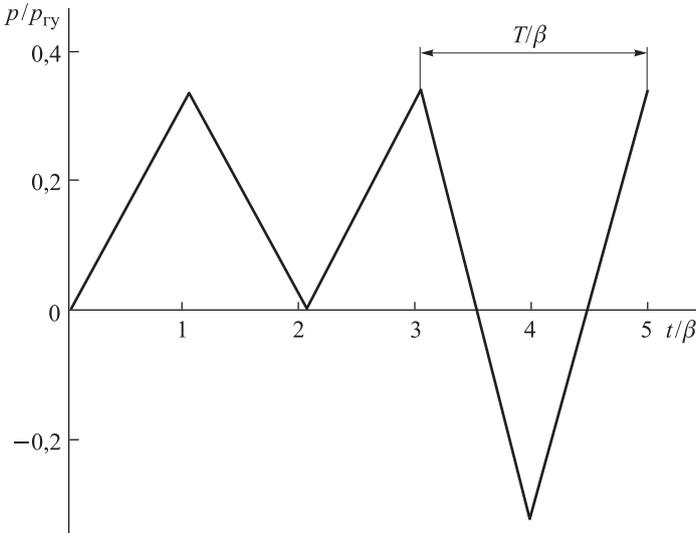
**Рис. 4.** Зависимость давления в конце трубы от времени при  $t_{\text{п}} = 2\beta$

На рис. 5 представлены графики изменения давления для случаев  $2\beta < t_{\text{п}} < 3\beta$ . Ясно, что здесь давление достигает максимального значения при  $t = \beta$ . Его значение точно соответствует значению, вычисленному по формуле (10). В момент полного перекрытия трубы давление

$p = p_{\pi} = (1 - 2\beta / t_{\pi}) p_{\text{гн}}$ . Для времени перекрытия трубы  $t_{\pi} = 3\beta$  график изменения давления показан на рис. 6. В этом случае максимальное значение давления, определяемое по формуле (10) и реализуемое первый раз в момент времени  $t = \beta$ , с течением времени при  $t \geq 3\beta$  многократно повторяется, принимая при  $t = i\beta$  положительные ( $i = 3, 5, 7, \dots$ ) и отрицательные ( $i = 4, 6, 8, \dots$ ) значения.

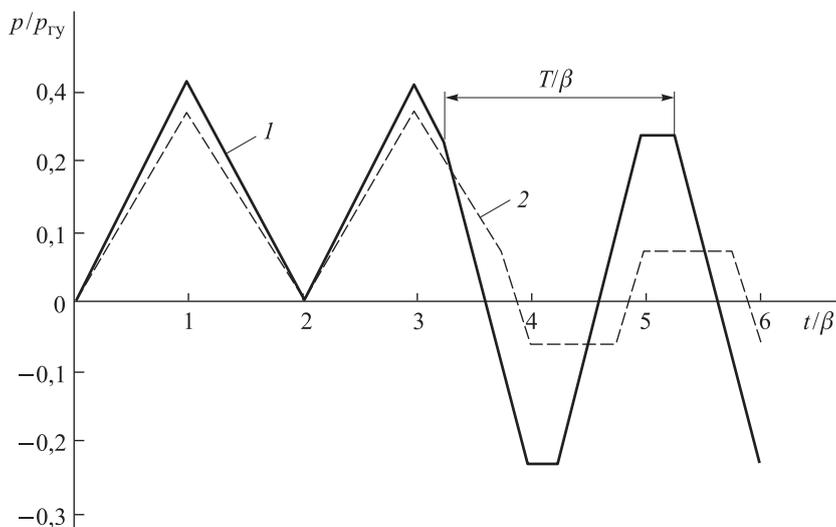


**Рис. 5.** Зависимость давления в конце трубы от времени при  $t_{\pi} = 225\beta$  (1) и  $2,75\beta$  (2)

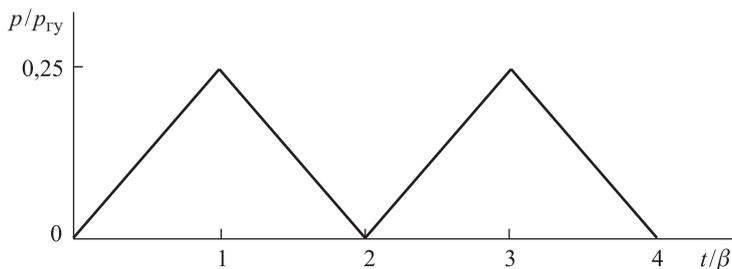


**Рис. 6.** Зависимость давления в конце трубы от времени при  $t_{\pi} = 3\beta$

На рис. 7 представлены графики изменения давления для случаев  $3\beta < t_{\text{п}} < 4\beta$ , а на рис. 8 — в предельном случае  $t_{\text{п}} = 4\beta$ .



**Рис. 7.** Зависимость давления в конце трубы от времени при  $t_{\text{п}} = 3,25\beta$  (1) и  $3,75\beta$  (2)

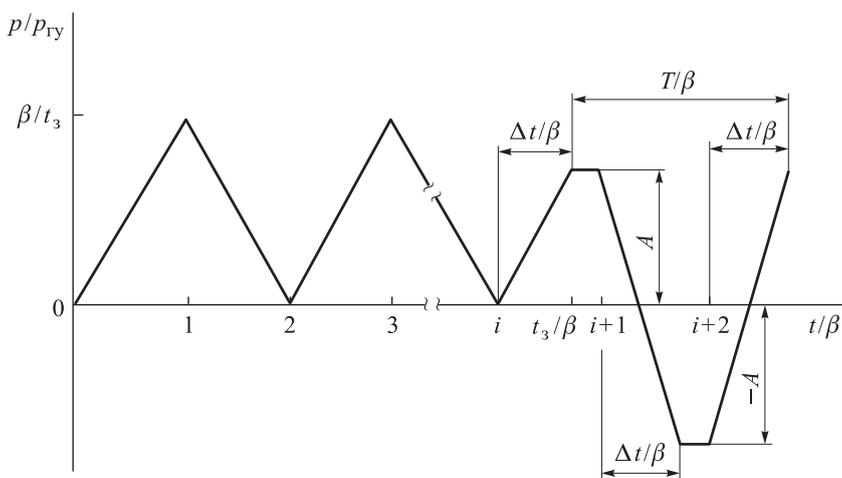


**Рис. 8.** Зависимость давления в конце трубы от времени при  $t_{\text{п}} = 4\beta$

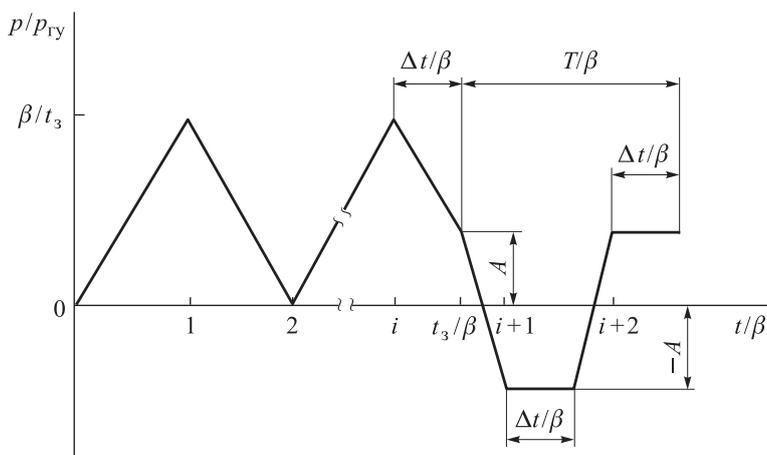
Анализ этих и других результатов расчетов свидетельствует, что если расход жидкости на выходе трубы уменьшается до нуля, согласно линейному закону, и время полного перекрытия трубы  $t_{\text{п}} = i\beta + \Delta t$ , где  $0 \leq \Delta t \leq \beta$ ,  $i = 0, 1, 2, 3, \dots$ , то для определения отклонения давления от стационарного значения в этом сечении в любой момент времени достаточно воспользоваться одним из двух графиков, показанных на рис. 9, 10.

1. При  $i = 0, 2, 4, 6, \dots$  график изменения давления от времени имеет вид, как на рис. 9. В зависимости от значений  $i, \Delta t$  указанный график соответствует графикам на следующих рисунках:  $i = 0, t_{\text{п}} = \Delta t < \beta$  — рис. 1;  $i = 0, \Delta t = 0$ , при этом величину  $i\beta/t_{\text{п}}$  следует

считать равной нулю,— рис. 2, кривая 1;  $\Delta t = 0$ , время  $t_{\text{п}}$  равно четному числу фаз гидравлического удара — рис. 4, 8;  $i = 2, 0 < \Delta t < \beta$  — рис. 5;  $i = 0, \Delta t = \beta$  — рис. 2, кривая 2;  $i = 2, \Delta t = \beta$  — рис. 6.



**Рис. 9.** Зависимость давления в конце трубы от времени при  $t_{\text{п}} = i\beta + \Delta t$ ,  $i = 0, 2, 4, 6, \dots$ ,  $A = 1 - i\beta / t_{\text{п}}$



**Рис. 10.** Зависимость давления в конце трубы от времени при  $t_{\text{п}} = i\beta + \Delta t$ ,  $i = 1, 3, 5, \dots$ ,  $A = (1 + i)\beta / t_{\text{п}} - 1$

2. При  $i = 1, 3, 5, \dots$  обобщенный график изменения давления имеет вид, как на рис. 10. В зависимости от значений  $i, \Delta t$  он соответствует графикам на следующих рисунках:  $i = 0, 0 < \Delta t < \beta$  — рис. 3, 7;  $\Delta t = 0$  — рис. 2, кривая 2;  $i = 1, \Delta t = \beta$  — рис. 4;  $i = 3, \Delta t = \beta$  — рис. 8.

Таким образом, представлена методика определения параметров потока сжимаемой жидкости при отсутствии гидравлического сопротивления в однородном прямом трубопроводе с известным законом изменения расхода в его выходном сечении. Для случая уменьшения расхода в соответствии с линейным законом до нуля предложен способ оперативного получения графика зависимости давления на выходе трубы от времени, который можно использовать для расчетов динамических нагрузок на опоры и другие элементы конструкции трубопровода.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гладкий В.Ф. Динамика конструкции летательного аппарата. М.: Наука, 1969.
2. Бержерон Л. От гидравлического удара в трубах до разряда в электрической сети. М.: Машгиз, 1962.
3. Жмудь А.Е. Гидравлический удар в гидротурбинных установках. Элементы теории и расчет. М.: Госэнергоиздат, 1953.
4. Жуковский Н.Е. О гидравлическом ударе в трубах: полн. собр. соч. Т. VII. М.: ОНТИ, 1937.
5. Колесников К.С. Продольные колебания ракет с жидкостным ракетным двигателем. М.: Машиностроение, 1971.
6. Колесников К.С., Джикаев Б.Л. Нестационарные процессы в простом трубопроводе при быстром срабатывании отсечных устройств // Изв. АН СССР. Энергетика и транспорт. 1975. № 1. С.174—176.
7. Колесников К.С., Рыбак С.А., Самойлов Е.А. Динамика топливных систем ЖРД. М.: Машиностроение, 1975.
8. Натанзон М.С. Продольные автоколебания жидкостной ракеты. М.: Машиностроение, 1977.
9. Попов Д.Н., Орлов А.Е. Математическая модель неустановившегося движения реальной жидкости в цилиндрической трубе с круглым сечением и упругими стенками // Изв. вузов. Машиностроение. 1988. № 4. С. 60—63.
10. Попов Д.Н., Панаиотти С.С., Рябинкин М.В. Гидромеханика. М.: Изд-во МГТУ им Н.Э.Баумана, 2002.
11. Чарный И.А. Неустановившееся движение реальной жидкости в трубах. М.: Недра, 1975.
12. Самарский А.А., Попов Ю.П. Разностные методы решения задач газовой динамики. М.: Едиториал УРСС, 2004.

Статья поступила в редакцию 14.09.2012