

А.М. Гуськов, Г.Я. Пановко, А.Е. Шохин

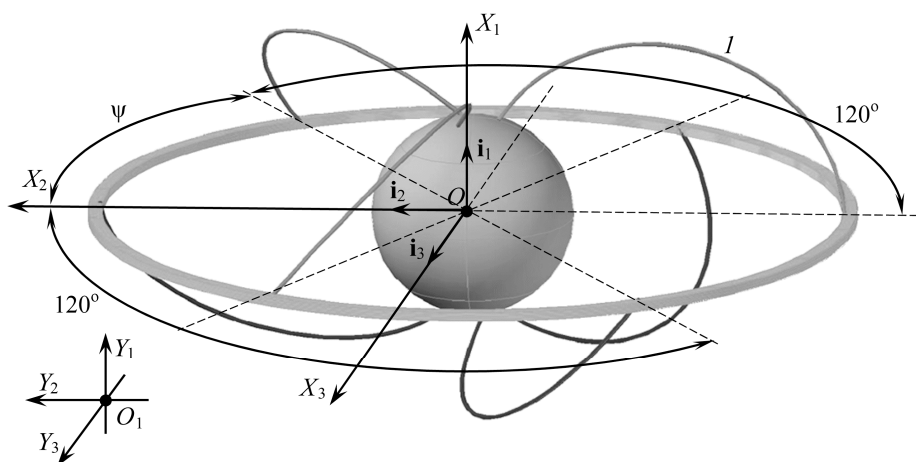
## ВЫБОР РАЦИОНАЛЬНЫХ ПАРАМЕТРОВ СТЕРЖНЕВЫХ ЭЛЕМЕНТОВ СИСТЕМЫ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ВИБРОИЗОЛЯЦИИ ПРИБОРОВ

*Рассмотрена задача выбора рациональных параметров, характеризующих геометрию и пространственное расположение упругих элементов стержневой системы виброизоляции. Проанализировано влияние на механические свойства подвески условий закрепления упругих элементов на вибрирующем основании.*

**E-mail:** gouskov\_am@mail.ru; gpanovko@yandex.ru

**Ключевые слова:** механическая система, пространственная вибрация, виброизоляция, упругая подвеска, криволинейный стержень, механические свойства, собственные частоты.

Одна из важных проблем современной техники заключается в обеспечении работоспособности и требуемого функционирования приборов и аппаратуры, находящихся под действием пространственной вибрации. Характерные задачи часто возникают в транспортных системах, например в авиационном, космическом, водном и наземном транспорте, где приборы могут подвергаться одновременному воздействию пространственной вибрации и постоянных или медленно изменяющихся во времени ускорений [1—4]. Для виброзащиты приборов в таких условиях применяют различные системы виброизоляции пассивного или активного принципа действия.



**Рис. 1. Конструкция системы пространственной виброизоляции**

В работах авторов данной статьи [5—7] для защиты прецизионных приборов от пространственной вибрации предложено использовать упругую подвеску (рис. 1), выполненную на основе системы из шести гибких криволинейных стержней, с помощью которых защищаемый объект в форме шара связан с вибрирующим основанием (в рассматриваемом случае он имеет форму жесткого кольца).

Упругий элемент в исходном состоянии представляет собой плоский криволинейный упругий стержень постоянного по длине круглого поперечного сечения, осевая линия которого является дугой окружности радиусом  $R$  (рис. 2). Один конец стержня закрепляют на жестком кольце (точка  $A$  на рис. 2), а другой — на объекте виброзащиты (точка  $B$ ), причем точка крепления к объекту лежит в плоскости  $OX_1X_2$  (плоскость  $\alpha$ ). Положение точки  $B$  определяется углом  $\varphi_0$  между прямыми  $OA$  и  $OB$  и радиусом шара  $R_0$ . В общем случае плоскость  $\beta$ , в которой лежит продольная ось стержня, пересекает плоскость  $\alpha$  по прямой  $AB$  и составляет с этой плоскостью некоторый угол  $\varphi_1$ .

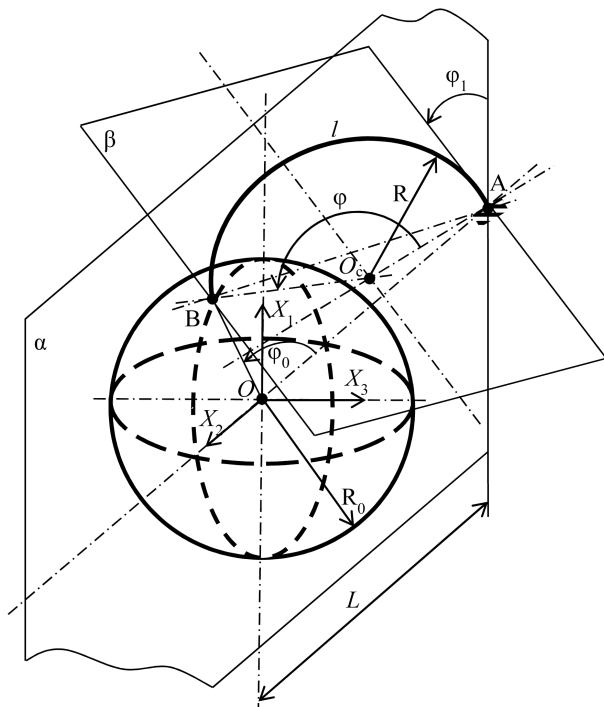


Рис. 2. Схема пространственного расположения отдельного стержня

Для исследования виброзащитных свойств подвески ее движение рассматриваем в подвижной системе координат  $OX_1X_2X_3$  (см. рис. 1) с единичными векторами  $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$ , жестко связанной с вибрирующим основанием, движение которого описывается в неподвижной системе

координат  $O_1Y_1Y_2Y_3$ . При формировании расчетной модели подвески массу упругих элементов не учитываем ввиду ее малости по сравнению с массой шара, поэтому движение всей системы полностью определяется перемещениями шара. Особенность расчетной модели заключается в том, что поведение каждого отдельного упругого элемента описывается системой дифференциально-алгебраических уравнений механики гибких стержней [8]. Это позволяет учитывать геометрическую нелинейность при деформации подвески. Линеаризованное уравнение, описывающее малые колебания системы относительно положения равновесия, которое определяется медленно меняющейся нагрузкой  $\mathbf{P}^c$ , запишем в виде [5]

$$\mathbf{G}\ddot{\mathbf{X}}(t) + \mathbf{D}(\mathbf{P}^c)\dot{\mathbf{X}}(t) + \mathbf{C}(\mathbf{P}^c)\mathbf{X}(t) = \mathbf{Q}(\omega t),$$

где  $\mathbf{X}(t)$  — вектор положения шара;  $\mathbf{G}$  — матрица параметров инерции системы;  $\mathbf{Q}(\omega t)$  — вектор вибрационной нагрузки;  $\mathbf{D}(\mathbf{P}^c)$  и  $\mathbf{C}(\mathbf{P}^c)$  — матрицы демпфирования и жесткости системы, компоненты которых зависят от положения равновесия системы и определяются из решения задачи статики гибких криволинейных стержней [8].

При проектировании подвесок такого типа возникает ряд специфических вопросов, связанных с выбором рациональных конструктивных параметров системы при заданных ограничениях, а именно: расположения упругих элементов в пространстве, а также зон и условий закрепления на объекте виброизоляции и вибрирующем основании.

В работах [5, 7] показано, что при заданных ограничениях на габариты системы размеры и расположение стержней полностью определяются углами  $\varphi_0$  и  $\varphi_1$ . Варьируя этими углами, можно получить различные значения длины естественной оси стержня и плоскости ее расположения в пространстве, и тем самым реализовать различные динамические свойства подвески. В указанных работах рассмотрен случай жесткого закрепления концов стержней. Очевидно, что введение податливости в узлы крепления стержней может привести к заметному снижению собственных частот подвески, а это представляется особенно важным для защиты от низкочастотной вибрации.

В данной работе дано обоснование выбору рациональных параметров  $\varphi_0$  и  $\varphi_1$ , исследованы механические характеристики подвески с шарнирным закреплением стержней на вибрирующем основании в сопоставлении со случаем их жесткого закрепления.

С учетом основных требований к системе виброизоляции рациональные значения параметров  $\varphi_0$  и  $\varphi_1$  должны удовлетворять следующим критериям:

• минимуму максимального значения собственной частоты  $p$  подвески

$$\Phi_1(\varphi_0, \varphi_1) = \min \max(p(\varphi_0, \varphi_1)); \quad (1)$$

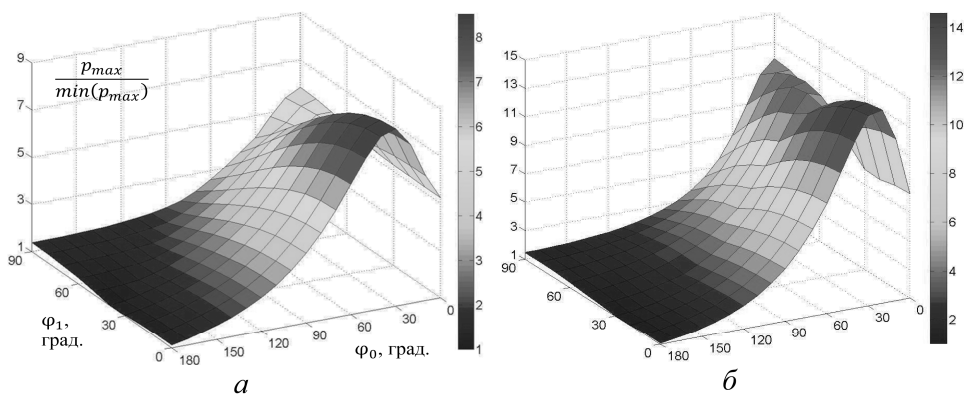
• инвариантности динамических свойств подвески относительно вектора возмущения, т. е. различие в значениях собственных частот системы не должно превышать некоторого, априори заданного значения  $\lambda$

$$\Phi_2(\varphi_0, \varphi_1) = \frac{\max(p(\varphi_0, \varphi_1))}{\min(p(\varphi_0, \varphi_1))} \leq \lambda. \quad (2)$$

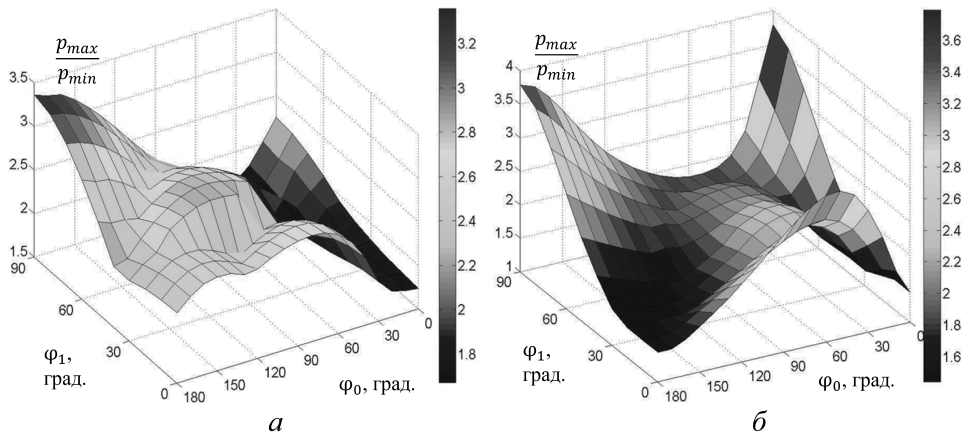
Выбираем рациональные параметры  $\varphi_0$  и  $\varphi_1$  для исходного недеформированного состояния системы. Естественно, что получаемые при этом рациональные значения параметров  $\varphi_0$  и  $\varphi_1$  могут изменяться при других состояниях статического равновесия системы вследствие ее геометрической нелинейности, поэтому в дальнейшем проведем оценку такого изменения.

Расчет собственных частот системы выполнен при различных значениях углов в диапазоне  $\varphi_0 = [0^\circ, 180^\circ]$  и  $\varphi_1 = [0^\circ, 90^\circ]$ . Для определенности значение критерия (2) принято  $\lambda = 1,1$ .

В результате расчета получены графики изменения значения верхней собственной частоты подвески (рис. 3) и графики изменения отношения значения верхней частоты к нижней (рис. 4) в зависимости от углов  $\varphi_0$  и  $\varphi_1$  при жестком и шарнирном закреплении стержней.



**Рис. 3.** Изменение значения верхней собственной частоты в зависимости от углов  $\varphi_0$  и  $\varphi_1$  при жестком (а) и шарнирном (б) закреплении стержней



**Рис. 4. Изменение отношения верхней и нижней собственных частот в зависимости от углов  $\varphi_0$  и  $\varphi_1$  при жестком (а) и шарнирном (б) закреплении стержней**

На рис. 3 видно, что в обоих рассматриваемых случаях закрепления стержней наблюдается монотонное снижение значений верхней собственной частоты подвески при увеличении параметра  $\varphi_0$ , за исключением некоторой относительно малой области вблизи нулевых значений параметров  $\varphi_0$  и  $\varphi_1$ . Это объясняется увеличением длины осевой линии стержня за счет удаления друг от друга точек его закрепления на кольце и на шаре, что приводит к уменьшению жесткости стержня и, как следствие, снижению жесткости всей подвески. Влияние параметра  $\varphi_1$  на значение верхней собственной частоты имеет немонотонный характер, который в значительной степени зависит от величины параметра  $\varphi_0$ . Минимальное значение верхней собственной частоты подвески при жестком закреплении достигают при  $\varphi_0 = 180^\circ$  и  $\varphi_1 \approx 40^\circ$ , а при шарнирном — при  $\varphi_0 = 180^\circ$  и  $\varphi_1 \approx 30^\circ$ .

При жестком закреплении стержней (рис. 4, а) наименьшее значение отношения верхней собственной частоты к нижней достигают при  $\varphi_0 = 30^\circ$  и  $\varphi_1 \approx 90^\circ$ , оно составляет 1,4. При изменении этих параметров наблюдается немонотонное (с выраженными локальными экстремумами) изменение отношения частот с общей тенденцией к его увеличению.

При шарнирном закреплении стержней (рис. 4, б) величина отношения верхней собственной частоты к нижней изменяется немонотонно при изменении параметров  $\varphi_0$  и  $\varphi_1$ . Наблюдаются две области локализации минимальных значений отношения с одинаковой величиной, равной 1,54: первая — вблизи нулевых значений параметров, вторая — в окрестности  $\varphi_0 = 180^\circ$  и  $\varphi_1 \approx 0^\circ$ .

Таким образом, при заданных массовых и габаритных параметрах системы не удается одновременно удовлетворить критериям (1) и (2). Для эффективной виброзащиты в низкочастотной области в первую очередь наиболее важно соответствие критерию (1) минимума верхней собственной частоты. Согласно этому критерию, установлены следующие рациональные значения параметров стержней: при жестком закреплении  $\varphi_0 = 180^\circ$  и  $\varphi_1 \approx 40^\circ$ , а при шарнирном закреплении  $\varphi_0 = 180^\circ$  и  $\varphi_1 \approx 30^\circ$ . При выбранных значениях  $\varphi_0$  и  $\varphi_1$  отношение верхней собственной частоты подвески к нижней составляет: при жестком закреплении — 2,05, при шарнирном закреплении — 1,54. Значения безразмерных собственных частот и собственные векторы представлены в таблице, из данных которой следует, что применение шарнирного закрепления стержней по сравнению с жестким закреплением позволяет при прочих равных условиях добиться существенно меньших собственных частот системы и уменьшить их относительный разброс. Снижение верхней собственной частоты достигает 38 %, а отношение верхней и нижней собственных частот уменьшается на 25 %.

### Собственные частоты и векторы системы

Направление соб- ствен- ного вектора	Жесткое закрепление $\varphi_0 = 180^\circ, \varphi_1 \approx 40^\circ$						Шарнирное закрепление $\varphi_0 = 180^\circ, \varphi_1 \approx 30^\circ$					
	Порядковый номер частоты											
	1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5	6
	Частота $\tilde{\nu}$											
	10,25	19,03	19,03	20,25	20,25	21,05	8,40	12,13	12,13	12,20	12,20	12,93
$X_1$	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
$X_2$	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
$X_3$	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0
$\vartheta_1$	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0
$\vartheta_2$	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1
$\vartheta_3$	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0

Для нормального функционирования системы виброизоляции важно обеспечить необходимую прочность упругих элементов, а также исключить возможные соударения элементов системы. С этой целью необходимо знать предельно допустимые перемещения шара, предельные значения внешних нагрузок и максимальные уровни напряжений, возникающих в стержнях. Следует отметить, что реше-

ние этих трех взаимосвязанных задач проведено по единому алгоритму. В процессе поиска решения также найдены упругие характеристики системы.

Предельно допустимые перемещения шара  $\Gamma_0 = F_0(x, y, z)$  определяем из условия исключения соударения элементов системы и заданных ограничений на перемещения, обеспечивающих отсутствие соударения элементов системы между собой и с внешними ограничителями; они определяются радиус-вектором  $\mathbf{R}_{\text{вн}} = \mathbf{R}_{\text{вн}}(x, y, z)$ . Для этого к центру шара прикладываем силу  $\mathbf{P}^c$ , действующую в заданном направлении, которое определяется углами  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  (рис. 5). Постепенно увеличивая ее величину, находим «критическое» положение шара, при котором выполняется равенство  $\mathbf{r}_{\text{ш}} = \mathbf{R}_{\text{вн}}$  или  $\mathbf{r}_i(s) = \mathbf{R}_{\text{вн}}$ , где  $\mathbf{r}_{\text{ш}}$  — радиус-вектор положения точки на внешней поверхности шара;  $\mathbf{r}_i(s)$  — радиус-вектор точки осевой линии  $i$ -го стержня. Таким образом, прикладывая силу в различных направлениях, определяем пространственную границу области  $\Gamma_0$ , а также соответствующие ей значения предельных нагрузок.

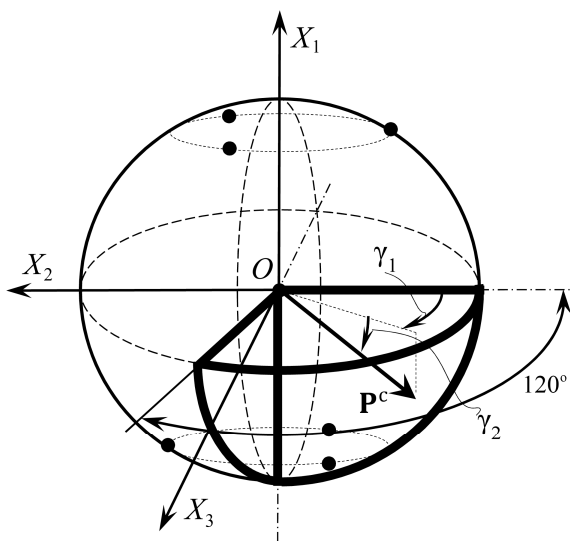


Рис. 5. Область изменения направления силы

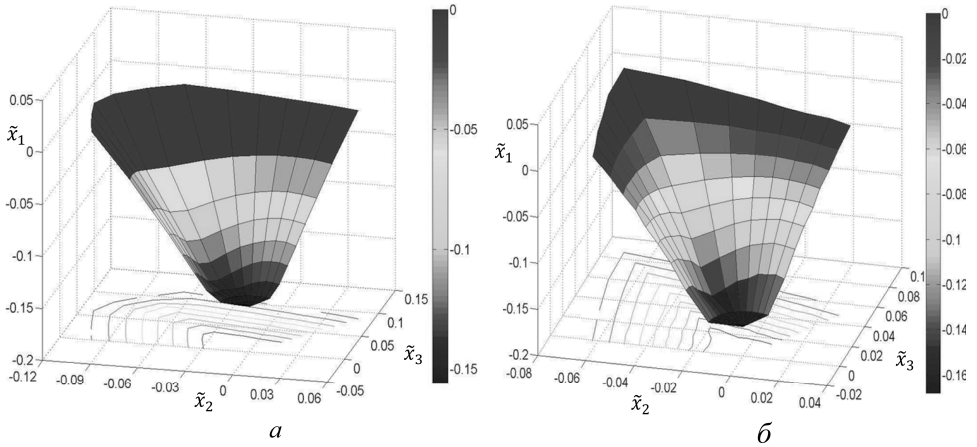
При найденных предельных перемещениях системы определяем максимальные эквивалентные напряжения в стержнях, например, согласно теории максимальных касательных напряжений,  $\sigma_{\text{экр}} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}$ , где  $\sigma = M_{\text{изг}}/W_{\text{изг}}$  и  $\tau = M_{\text{кр}}/W_{\text{кр}}$  — соответственно максимальные нормальные и касательные напряжения в сечении;

$M_{\text{изг}}$  и  $M_{\text{кр}}$  — изгибающий и крутящий моменты в сечении стержня;  
 $W_{\text{изг}}$  и  $W_{\text{кр}}$  — моменты сопротивления сечения изгибу и кручению.

Вследствие симметрии конструкции достаточно исследовать только часть пространства возможных смещений шара, а именно: достаточно задавать направление силы в пределах сегмента  $\gamma_1 = [0; 120^\circ]$  и  $\gamma_2 = [0; 90^\circ]$ , представляющего одну шестую часть сферы (границы указанного сегмента выделены жирными линиями на рис. 5) относительно точки центра масс шара в исходном положении.

При проведении расчетов и представлении результатов использованы следующие безразмерные параметры:  $\tilde{x} = x/l$ ,  $\tilde{\mathbf{r}} = \mathbf{r}/l$ ,  $\tilde{\mathbf{P}} = \mathbf{P}l^2/EJ$ ,  $\tilde{\mathbf{M}} = \mathbf{M}l/EJ$ ,  $\tilde{\sigma}_{\text{экр}} = 2l\sigma_{\text{экр}}/Ed$ , где  $l$  — длина осевой линии стержня;  $d$  — диаметр поперечного сечения;  $J$  — момент инерции сечения при изгибе;  $E$  — модуль упругости материала стержня.

На рис. 6 представлены пространственные границы области допустимых перемещений шара для случаев жесткого (рис. 6, а) и шарнирного (рис. 6, б) закрепления стержней, рассчитанные при заданных размерах шара и внешнего корпуса.

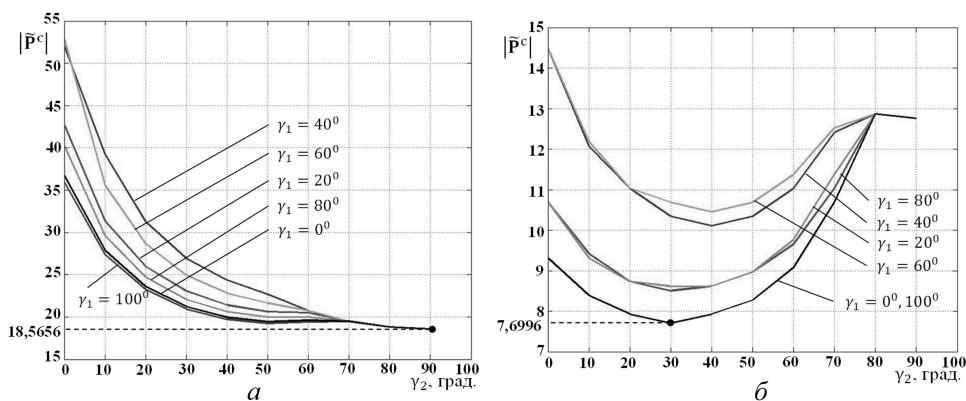


**Рис. 6. Пространственная граница области допустимых перемещений шара при жестком (а) и шарнирном (б) закреплении стержней**

Независимо от условий закрепления стержней допустимые перемещения в направлении оси  $OX_1$  существенно больше, чем в направлениях осей  $OX_2$  и  $OX_3$ . При этом допустимые перемещения в направлениях, параллельных плоскости  $OX_2X_3$ , при жестком закреплении стержней значительно больше, чем при шарнирном, а в направлении  $OX_1$  — немного меньше.



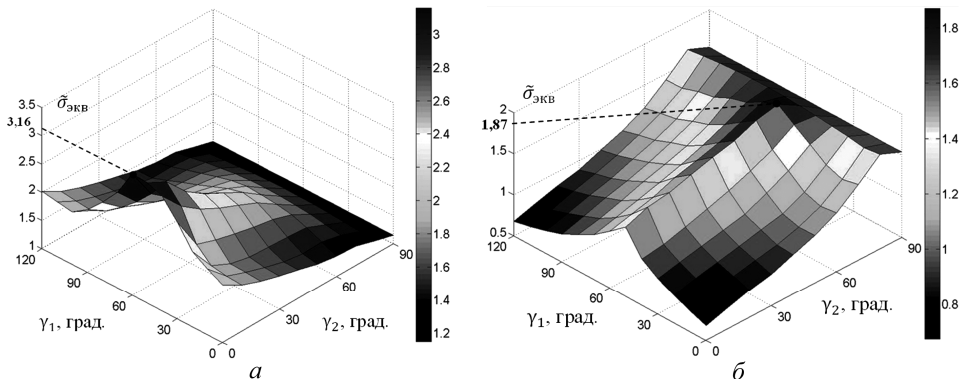
На величину силы (предельной нагрузки), соответствующей предельно допустимому перемещению шара, влияет направление ее действия. Графики зависимостей при жестком и шарнирном закреплении стержней приведены на рис. 7, *а* и *б*, на которых видно, что минимальное значение силы при жестком закреплении стержней соответствует направлению ее действия вдоль вертикальной оси  $OX_1$ . В этом случае, как следует из данных рис. 6, *а*, перемещения шара максимальны, а значит, система имеет наименьшую жесткость в данном направлении. При шарнирном закреплении стержней минимальное значение силы соответствует направлению ее действия  $\gamma_1 = 0^\circ, 100^\circ$  и  $\gamma_2 = 30^\circ$ . Максимальная величина силы в обоих случаях закрепления стержней отмечается в направлении  $\gamma_1 = 60^\circ$  и  $\gamma_2 = 0^\circ$ , при этом ее значение в случае шарнирного закрепления примерно в 3,6 раза меньше, чем при жестком.



**Рис. 7. Предельная нагрузка при жестком (а) и шарнирном (б) закреплении стержней**

На безразмерное максимальное эквивалентное напряжение, возникающее в стержнях при смещении шара в предельно допустимое положение, влияет направление действия силы (рис. 8). В случае жесткого закрепления стержней величина эквивалентных напряжений достигает максимума при  $\gamma_1 = 50^\circ$  и  $\gamma_2 = 0^\circ$  и составляет  $\max(\tilde{\sigma}_{\text{экв}}) = 3,1586$ ; в случае шарнирного закрепления стержней — при  $\gamma_1 = 50^\circ$  и  $\gamma_2 = 70^\circ$  составляет  $\max(\tilde{\sigma}_{\text{экв}}) = 1,8705$ .

Таким образом, применение шарнирного закрепления стержней на корпусе, в сопоставлении с жестким закреплением, позволяет при прочих равных условиях снизить на 40 % уровень максимальных эквивалентных напряжений в упругих стержнях.



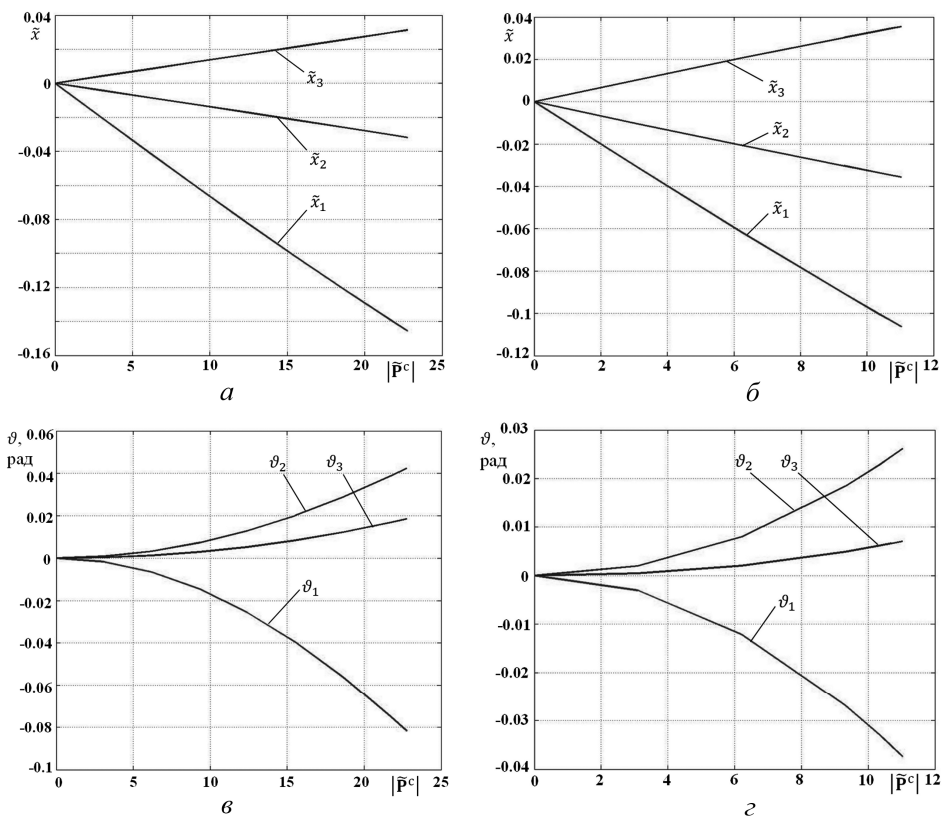
**Рис. 8.** Эквивалентные напряжения при максимально допустимых перемещениях шара при жестком (а) и шарнирном (б) закреплении стержней

Анализ перемещений и углов поворота шара в зависимости от величины статической силы при различном направлении ее действия показал, что независимо от способа закрепления стержней перемещения шара практически линейно обусловлены величиной силы во всей области допустимых перемещений при любом направлении действия силы. При этом помимо линейных перемещений возникают также связанные с ними угловые перемещения, зависимость которых от величины силы имеет нелинейный характер. На рис. 9 представлены графики перемещений и углов поворота шара в зависимости от величины силы при  $\gamma_1 = \gamma_2 = 45^\circ$  для различных условий закрепления стержней. При других значениях  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  были получены аналогичные графики.

Вследствие нелинейности упругих характеристик системы ее собственные частоты могут изменяться в зависимости от статического положения равновесия.

Изменение верхней и нижней собственных частот системы зависит от величины и направления действия постоянной силы, определяющей положение статического равновесия (рис. 10, 11). При жестком закреплении стержней (рис. 10, а) с ростом силы значение верхней собственной частоты сначала уменьшается, а достигнув минимума, увеличивается. При заданной силе величина угла  $\gamma_2$  изменяется от нуля до  $90^\circ$ , что приводит к росту верхней собственной частоты, а увеличение угла  $\gamma_1$  от нуля до  $90^\circ$  приводит сначала к повышению, а затем к снижению верхней собственной частоты. Максимальное изменение верхней собственной частоты не превышает 5,7 %.

При шарнирном закреплении стержней (рис. 10, б) по мере увеличения силы величина верхней собственной частоты монотонно

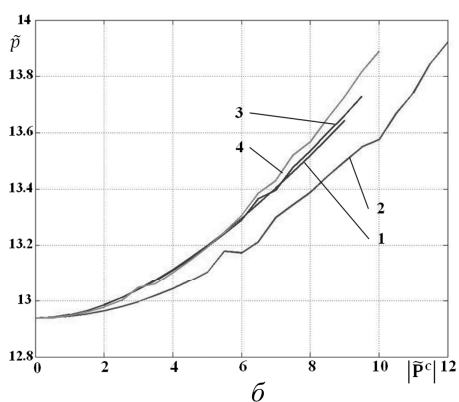
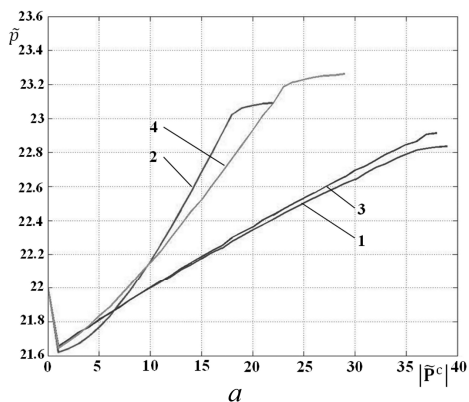


**Рис. 9. Перемещения и углы поворота шара в зависимости от величины силы при  $\gamma_1 = 45^\circ$  и  $\gamma_2 = 45^\circ$ :**

*a* — перемещения при жестком закреплении стержней; *б* — перемещения при шарнирном закреплении стержней; *в* — углы поворота при жестком закреплении стержней; *г* — углы поворота при шарнирном закреплении стержней

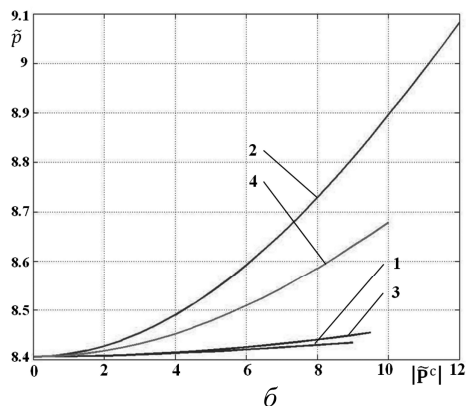
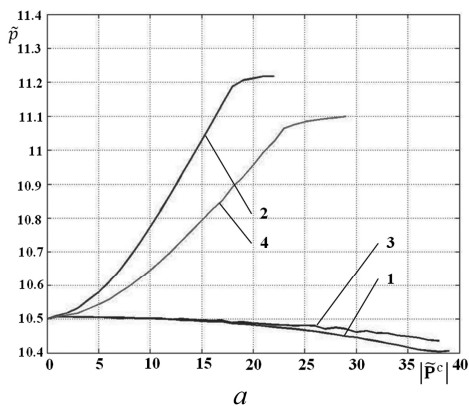
растет. При заданной силе изменение угла  $\gamma_2$  от нуля до  $90^\circ$  приводит сначала к повышению, а затем к снижению верхней собственной частоты. Изменение угла  $\gamma_1$  не оказывает существенного влияния на значение верхней собственной частоты. Максимальное изменение верхней собственной частоты не превышает 7,6 %.

В случае жесткого закрепления стержней характер изменения нижней собственной частоты в значительной степени зависит от направления действия силы (рис. 11, *a*). При действии силы в направлениях, параллельных плоскости  $OX_2X_3$ , наблюдается монотонное уменьшение нижней собственной частоты по мере увеличения силы. При действии силы в направлениях, не параллельных указанной плоскости, по мере ее роста происходит монотонное повышение нижней собственной частоты. Максимальное относительное изменение нижней собственной частоты не превышает 6,8 %.



**Рис. 10. Изменение верхней собственной частоты в зависимости от направления действия силы при жестком (а) и шарнирном (б) закреплении стержней:**

1 — при  $\gamma_1 = 0^\circ$ ,  $\gamma_2 = 0^\circ$ ; 2 — при  $\gamma_1 = 0^\circ$ ,  $\gamma_2 = 90^\circ$ ; 3 — при  $\gamma_1 = 90^\circ$ ,  $\gamma_2 = 0^\circ$ ; 4 — при  $\gamma_1 = 45^\circ$ ,  $\gamma_2 = 45^\circ$



**Рис. 11. Изменение нижней собственной частоты в зависимости от направления действия силы при жестком (а) и шарнирном (б) закреплении стержней:**

1 — при  $\gamma_1 = 0^\circ$ ,  $\gamma_2 = 0^\circ$ ; 2 — при  $\gamma_1 = 0^\circ$ ,  $\gamma_2 = 90^\circ$ ; 3 — при  $\gamma_1 = 90^\circ$ ,  $\gamma_2 = 0^\circ$ ; 4 — при  $\gamma_1 = 45^\circ$ ,  $\gamma_2 = 45^\circ$

При шарнирном закреплении стержней по мере увеличения силы (рис. 11, б) наблюдается монотонное повышение значения нижней собственной частоты. Увеличение любого из углов  $\gamma_1$  или  $\gamma_2$  от нуля до  $90^\circ$  при заданной силе приводит к росту значения верхней собственной частоты. Максимальное относительное изменение нижней собственной частоты не превышает 8,1 %.

В результате выполненных расчетов установлено, что шарнирное закрепление стержней на корпусе, по сравнению с жестким, позволяет при прочих равных условиях:

- обеспечить снижение собственных частот системы до 38,5 %;
- уменьшить относительный разброс собственных частот на 25 %;
- уменьшить уровни максимальных эквивалентных напряжений в упругих стержнях на 40 %.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Вибрации в технике: Справочник: в 6 т. – Т. 6: Защита от вибрации и ударов / под ред. К.В. Фролова. – М.: Машиностроение, 1981. – 456 с.
2. Ганиев Р.Ф., Кононенко В.О. Колебания твердых тел. – М.: Наука, 1976. – 432 с.
3. Исследование влияния внешнего вибрационного поля на динамику кварцевого генератора / А.М. Гуськов, Е.А. Коровайцева, Г.Я. Пановко, А.Е. Шохин // Машиностроение и инженерное образование. – 2011. – № 3. – С. 37–43.
4. Crede Ch.E. Vibration and isolation. – N.Y.: John Willy and Sons, 1963. – 156 p.
5. Гуськов А.М., Пановко Г.Я., Шохин А.Е. Расчет стержневой пространственной системы виброизоляции твердого тела при транспортной вибрации // Проблемы машиностроения и надежности машин. – 2012. – № 2. – С. 17–24.
6. Parametric synthesis of rod spatial vibroisolation system under arbitrarily directed external disturbance / A.M. Gouskov, E.A. Korovaytseva, G.Ya. Panovko, A.E. Shokhin // J. of Vibroengineering. – 2011. – Vol. 13. – Issue 4. – P. 621–628.
7. Патент 2447336 РФ, МПК F16F 3/02, F16F 15/00. Пространственная виброизолирующая подвеска / А.М. Гуськов, Г.Я. Пановко, А.Е. Шохин, Е.А. Коровайцева, А.М. Васильев, О.В. Бармина; Учреждение Российской академии наук Институт машиноведения им. А.А. Благонравова РАН. – Заявка № 2010108319; Заяв. 05.03.2010; Опубл. 10.04.2012, Бюл. № 10.
8. Светлицкий В.А. Механика стержней: учеб. для втузов: в 2 ч. – М.: Высш. шк., 1987. – Ч. 1. Статика. – 320 с.

Статья поступила в редакцию 28.09.2012