

А.М. Гуськов, Г.Я. Пановко

НЕЛИНЕЙНЫЕ ЭФФЕКТЫ ПРИ КОЛЕБАНИЯХ ЛИНЕЙНЫХ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ЦЕНТРОБЕЖНЫМ ВОЗБУДИТЕЛЕМ ОГРАНИЧЕННОЙ МОЩНОСТИ

Рассмотрена задача о взаимодействии линейной колебательной системы с центробежным возбудителем ограниченной мощности. Проанализированы периодические режимы колебаний и их устойчивость в зависимости от напряжения в цепи возбуждения электродвигателя с неуравновешенным ротором. Приведены результаты численного моделирования колебаний рассматриваемой системы.

E-mail: gouskov_am@mail.ru; gpanovko@yandex.ru

Ключевые слова: колебания, механическая система, неуравновешенный ротор, периодические режимы, устойчивость, бифуркация, управляющий параметр.

Динамика разнообразных технических объектов с вращающимся ротором, таких как вибрационные технологические машины и вибрационные роботы с дебалансным приводом, компрессорные и насосные агрегаты, электросиловые приводы, вентиляторные установки и т. п., в ряде случаев может быть проанализирована на основе расчетной схемы, представленной на рис. 1 [1—5]. Твердое тело (платформа) с упруговязким закреплением может колебаться относительно неподвижных идеальных (без трения и натяга) горизонтальных направляющих. На платформе установлен электродвигатель с неуравновешенным ротором.

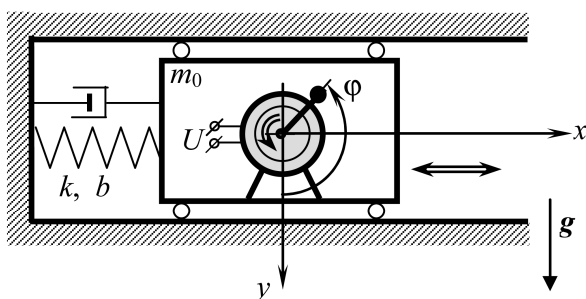


Рис. 1. Расчетная схема

Расчетная модель. Движение системы будем рассматривать относительно неподвижной системы координат Oxy (см. рис. 1), начало которой совмещено с положением статического равновесия общего

центра масс платформы и электродвигателя, причем вертикальная ось Oy совпадает с направлением вектора силы тяжести. Горизонтальное смещение платформы описывается координатой x , а угол φ поворота ротора электродвигателя отсчитываем против хода часовой стрелки от положительного направления вертикальной оси Oy (см. рис. 1).

Движущий (вращающий) момент $M_e(i)$ электродвигателя (постоянного тока) зависит от силы тока i в обмотке якоря, который определяется законом Кирхгофа [2, 5].

С учетом сделанных предположений полная система уравнений, описывающих движение системы и силу тока в цепи обмотки якоря электродвигателя, может быть представлена в виде

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = -m_e e [\ddot{\varphi} \cos \varphi - (\dot{\varphi})^2 \sin \varphi];$$

$$(J + m_e e^2) \ddot{\varphi} + m_e e (\ddot{x} \cos \varphi + g \sin \varphi) = M_e(i) - M_c; \quad (1)$$

$$L \frac{di}{dt} + iR + K\dot{\varphi} = U,$$

где $m = m_0 + m_e$ — полная масса системы; m_0 — масса платформы с электродвигателем; m_e — масса ротора; b и k — коэффициенты демпфирования и жесткости упруговязкой опоры; e — расстояние от оси вращения ротора до его центра масс (эксцентриситет); J — центральный момент инерции ротора; $M_e = Ki$ — движущий момент электродвигателя; K — постоянная ЭДС двигателя; U — напряжение, приложенное к обмотке якоря; L и R — индуктивность и сопротивление обмотки якоря; M_c — момент сопротивления вращению ротора двигателя; g — ускорение силы тяжести.

Отметим одну важную особенность системы уравнений (1): ее решения зависят от напряжения U , подаваемого на электродвигатель, которое является *управляющим воздействием (параметром)*, причем горизонтальные колебания платформы можно рассматривать как *параметрическое возбуждение* колебаний угловой скорости ротора, считая ее независимой переменной.

В *нерезонансных* областях амплитуды колебаний твердого тела (платформы) незначительны и их воздействие на угловую скорость ротора также мало. В *резонансной* области картина развития колебаний существенно меняется: амплитуды колебаний твердого тела увеличиваются, и частота вращения ротора может резко измениться. Это скачкообразное изменение частоты приводит к скачкообразному изменению амплитуды и частоты колебаний самого тела (*эффект Зоммерфельда*) [6]. Тем самым в системе проявляется *динамическая*

неустойчивость периодических режимов движения. Отметим, что в системах с ограниченным возбуждением могут наблюдаться не только скачкообразные изменения амплитуд и частот колебаний, но, в ряде случаев, и невозможность преодоления резонанса при недостаточной мощности двигателя.

При исследовании колебаний в системах с приводом ограниченной мощности свойства привода довольно часто представляют в упрощенном виде, считая в первом приближении, что $di/dt \approx 0$. Тогда из последнего уравнения системы (1) следует, что

$$i = \frac{U - K\dot{\phi}}{R}. \quad (2)$$

С учетом (2) движущий момент $M_e = Ki$ во втором уравнении системы (1) представляет собой *статическую характеристику* двигателя:

$$\begin{aligned} M_e &= M_0 - M_1\dot{\phi}; \\ M_0 &= \frac{UK}{R}; \quad M_1 = \frac{K_2}{R}, \end{aligned} \quad (3)$$

т. е. связь между моментом и угловой скоростью при отсутствии нагрузки на ротор двигателя.

Обычно решение системы (1) с учетом (3) сводят к нахождению периодических режимов движения методами возмущений в виде зависимости координаты x от средней угловой скорости $\overline{d\phi/dt}$ ротора вблизи основного резонанса и анализу их устойчивости [1—3]. Тем самым из рассмотрения «выпадает» роль *истинного управляющего параметра* — *напряжения электрического тока*, определяющего поведение фазовых переменных системы (1), что ограничивает анализ движений *всех* подсистем и устойчивость получаемых периодических решений. В результате получаемое решение обладает рядом дефектов:

создается ложное представление об угловой скорости вращения ротора как о независимой переменной;

не удастся в естественном виде представить бифуркационную картину потери устойчивости периодических движений динамической системы и выявить тип имеющих место бифуркаций.

В данной работе решение задачи о нахождении периодических движений платформы и ротора, а также анализ их устойчивости осуществляем *в зависимости от параметра управления* (напряжения U в цепи возбуждения электродвигателя) численно методом продолжения по параметру: в качестве параметра рассматриваем дугу в четы-

рехмерном пространстве — три начальных условия и управляющий параметр [7].

Приведем уравнения системы (1), учитывая статическую характеристику (3), к безразмерному виду с использованием безразмерных времени $\tau = t/T_*$ ($T_* = \sqrt{m/k}$) и перемещения $\xi = x/X_*$, $X_* = \sqrt{(J + m_e e^2)/m}$:

$$\begin{aligned} \xi'' + 2\zeta\xi' + \xi &= -E[\varphi'' \cos \varphi - (\varphi')^2 \sin \varphi]; \\ \varphi'' + E(\xi'' \cos \varphi + \beta \sin \varphi) &= \Gamma - \gamma_c, \end{aligned} \quad (4)$$

где $(...)' = d(...)/d\tau$ — производные по безразмерному времени τ ; $E = (m_e e)/(mX_*)$ — эксцентриситет ротора; $\zeta = b/(2kT_*)$ — нормированный коэффициент линейного демпфирования; $\beta = gT_*^2/X_*^2$ — вес ротора; $\Gamma = \gamma_0(u - \varphi'/\omega_0)$ — движущий момент двигателя; $(\gamma_0 u) = KU/kRX_*^2$ — максимальный момент, создаваемый электродвигателем; $\gamma_c = M_c/kX_*^2$ — постоянный момент сопротивления вращению ротора двигателя; $(u\omega_0)$ — круговая частота вращения электродвигателя без нагрузки, $\omega_0 = \Omega_0 T_*$.

Используя обозначения $\nu \doteq \xi'$, $\omega \doteq \varphi'$, решим уравнения (4) относительно переменных $\{\nu', \omega'\}$:

$$\begin{aligned} \nu' &= P_\nu, & P_\nu &= \frac{1}{D}(Q_\xi - EQ_\varphi \cos \varphi); \\ \omega' &= P_\omega, & P_\omega &= \frac{1}{D}(-EQ_\xi \cos \varphi + Q_\varphi), \end{aligned} \quad (5)$$

где $Q_\xi = -\xi - 2\zeta\nu + E\omega^2 \sin \varphi$; $Q_\varphi = -\beta E \sin \varphi + \gamma_0(u - \omega/\omega_0) - \gamma_c$; $D = 1 - E^2 \cos^2 \varphi$.

Введя обозначения

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{Bmatrix} \doteq \begin{Bmatrix} \xi \\ \varphi \\ \nu \\ \omega \end{Bmatrix} \Rightarrow \mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad (6)$$

где

$$\mathbf{x} = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}^T; \quad \mathbf{f} = \{x_3, x_4, P_v, P_\omega\}^T, \quad (7)$$

уравнения (5) приводим к нормальной форме Коши.

Уравнения (6) и (7) описывают нелинейную (автономную) динамику горизонтальных движений платформы с установленным на ней вращающимся неуравновешенным ротором, приводимым в движение электродвигателем с ограниченной мощностью. Мощность электродвигателя определяем как $N_u = \Gamma \omega = \gamma_0 (u - \omega/\omega_0) \omega$, она достигает своего максимума $N_{u \max} = (\gamma_0 u)(u\omega_0)/4$ при частоте вращения $\omega = u\omega_0/2$. Таким образом, для описания динамики платформы необходимо задать семь безразмерных параметров:

$$E, \zeta, \beta, \gamma_c, \gamma_0, \omega_0, u, \quad (8)$$

и четыре начальных условия:

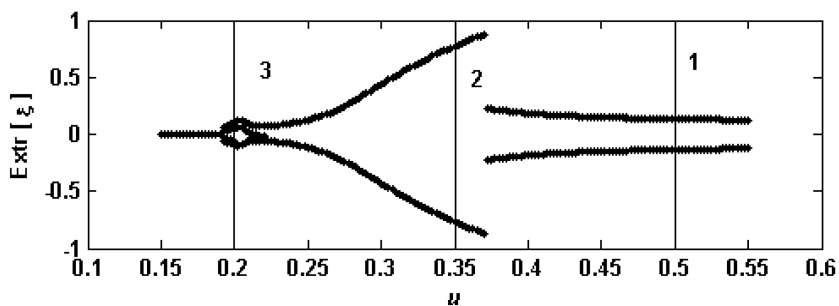
$$\xi(0), \varphi(0), \nu(0), \omega(0). \quad (9)$$

Бифуркационный анализ. Численное решение строим с помощью метода установления последовательного нагружения [7] по параметру возбуждения — напряжению тока u в обмотке якоря при $E = 0,1$; $\beta = 0,5$; $\gamma_c = 0,05$; $\gamma_0 = 0,5$; $\omega_0 = 5$ для двух различных значений параметра демпфирования ζ .

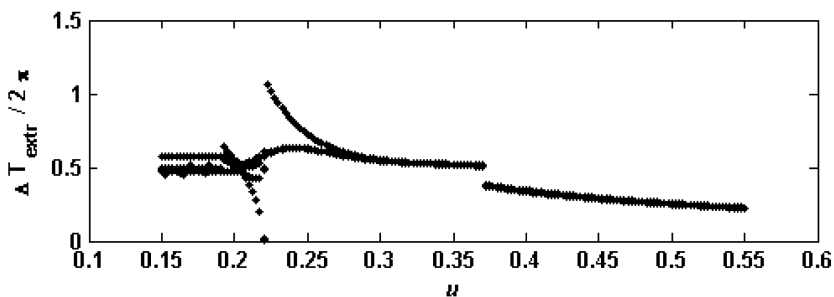
На рис. 2 показаны бифуркационные диаграммы последовательных экстремумов положения платформы $\text{Extr}[\xi]$ и угловой скорости ротора $\text{Extr}[\omega]$. На приведенных рисунках видно, что в диапазонах значений $0,1900 < u < 0,1925$ и $0,3700 < u < 0,3725$ происходит скачкообразное изменение уровня и вида вибраций платформы и угловой скорости ротора. На участке $u < 0,1900$ вибрации не возбуждаются: ротор и платформа остаются неподвижными. На участке $0,1925 < u < 0,3700$ отмечается медленный рост средней круговой частоты вращения ротора от $\bar{\omega} \approx 0,5$ до $\bar{\omega} \approx 1$. При $u > 0,3725$ частота вращения ротора растет пропорционально уровню возбуждения.

Анализ 2л-периодических движений. Для вычисления периодических движений системы за один полный оборот ротора двигателя (при его вращении без остановок) целесообразно от безразмерного времени τ перейти к новой независимой переменной — углу поворота ротора φ . Тогда при замене $\tau \rightarrow \varphi$

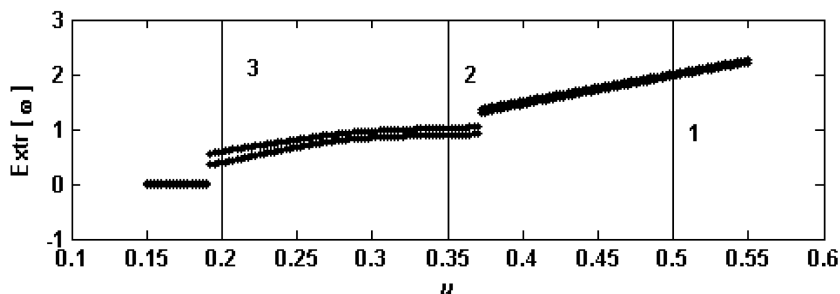
$$\frac{d(\dots)}{d\tau} = \frac{d\varphi}{d\tau} \frac{d(\dots)}{d\varphi}; \quad \omega = \frac{d\varphi}{d\tau}. \quad (10)$$



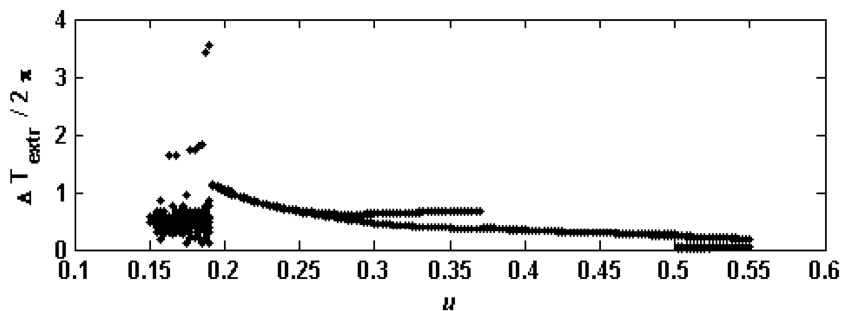
a



б



в



г

Рис. 2. Бифуркационные диаграммы последовательных экстремумов положения платформы и угловой скорости ротора:

a, в — отображение Пуанкаре; *б, г* — промежутки времени между последовательными экстремумами

Используя обозначения $y_1 \doteq x_1 = \nu$, $y_2 \doteq x_2 = \xi$, $y_3 \doteq x_3 = \omega$, уравнения движения принимают вид

$$\begin{aligned} \mathbf{y}^\bullet &= \mathbf{R}(\varphi, \mathbf{y}, u, \dots); \quad \varphi \in (0, \infty); \quad \mathbf{y} \in \mathfrak{R}^3; \\ \tau^\bullet &= y_3^{-1}; \\ \mathbf{y}(0) &= \mathbf{y}_0; \quad \tau(0) = 0, \end{aligned} \quad (11)$$

где

$$(\dots)^\bullet = \frac{d(\dots)}{d\varphi}; \quad \mathbf{y} = \{y_1 \ y_2 \ y_3\}^\top; \quad \mathbf{R} = \frac{1}{y_3} \{P_\nu \ y_1 \ P_\omega\}^\top. \quad (12)$$

При этом на правые части $\mathbf{R}(\varphi, \mathbf{y}; u, \dots)$ явным образом влияет независимая переменная φ через 2π -периодические тригонометрические функции $\cos \varphi$, $\sin \varphi$, которые в соответствии с (5) будут иметь следующий вид:

$$\begin{aligned} P_\nu &= \frac{1}{D} (Q_\xi - EQ_\varphi \cos \varphi); \quad P_\omega = \frac{1}{D} (-EQ_\xi \cos \varphi + Q_\varphi); \\ Q_\xi &= -y_2 - 2\zeta y_1 + E y_3^2 \sin \varphi; \quad Q_\varphi = -\beta E \sin \varphi + \gamma_0 (u - y_3 / \omega_0) - \gamma_c; \end{aligned} \quad (13)$$

$$D = 1 - E^2 \cos^2 \varphi.$$

Выбор новой независимой переменной позволяет сократить размерность задачи при вычислении периодических движений.

Устойчивость 2π -периодических движений. Пусть для некоторых начальных условий $\mathbf{y}_0 = \mathbf{a}$ существует частное периодическое решение системы (11), которое запишем в виде

$$\begin{aligned} \Psi(\varphi, \mathbf{a}, u): \\ \Psi(0, \mathbf{a}, u) = \mathbf{a}; \quad \Psi(\varphi, \mathbf{a}, u)^\bullet = \mathbf{R}(\varphi, \Psi(\varphi; \mathbf{a}; u), u, \dots); \quad \Psi(2\pi, \mathbf{a}, u) = \mathbf{a}. \end{aligned} \quad (14)$$

Устойчивость периодических движений исследуем методом Флорке — Ляпунова для уравнений в вариациях

$$\mathbf{y} = \Psi + \delta \mathbf{y}; \quad \delta \mathbf{y}^\bullet = \mathbf{A}(\varphi, \Psi; u) \delta \mathbf{y}, \quad \delta \mathbf{y}(0) = \delta \mathbf{y}_0;$$

$$\mathbf{A}(\varphi, \Psi; u) = \frac{1}{D\psi_3} \begin{vmatrix} -2\zeta & -1 & (2E\psi_3 \sin \varphi + E \frac{\gamma_0}{\omega_0} \cos \varphi) - \frac{S_\nu}{\psi_3} \\ D & 0 & -D \frac{\psi_1}{\psi_3} \\ 2\zeta E \cos \varphi & E \cos \varphi & (-2E^2 \psi_3 \cos \varphi \sin \varphi - \frac{\gamma_0}{\omega_0}) - \frac{S_\omega}{\psi_3} \end{vmatrix};$$

$$S_v = Q_\xi - EQ_\varphi \cos \varphi ; \quad S_\omega = -EQ_\xi \cos \varphi + Q_\varphi ;$$

$$Q_\xi = -\psi_2 - 2\zeta\psi_1 + E\psi_3^2 \sin \varphi ; \quad Q_\varphi = -\beta E \sin \varphi + \gamma_0(u - \psi_3 / \omega_0) - \gamma_c .$$

Приведенный алгоритм положен в основу численного расчета амплитудных и частотных зависимостей от напряжения u постоянного тока (рис. 3—6).

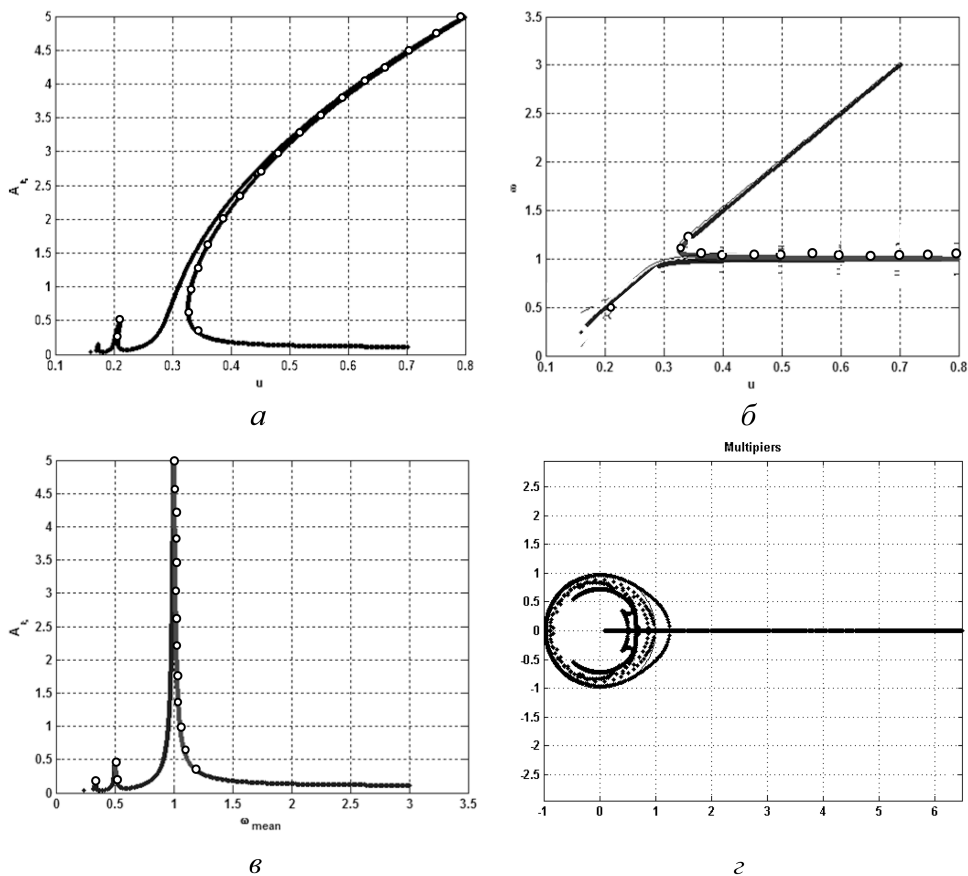


Рис. 3. Результаты численного расчета при $\zeta = 0,01$

Анализ полученных результатов. На всех амплитудных (для платформы) кривых $A_\xi(u)$ наблюдается несколько (три — при заданных параметрах и выбранном разрешении) резонансных состояний, соответствующих основному резонансу $\omega \approx \omega_\xi = 1$ и субгармоническим колебаниям системы с частотой $\omega \approx \omega_\xi/k$, $k = 2, 3$ (здесь ω_ξ означает собственную частоту платформы при невращающемся роторе).

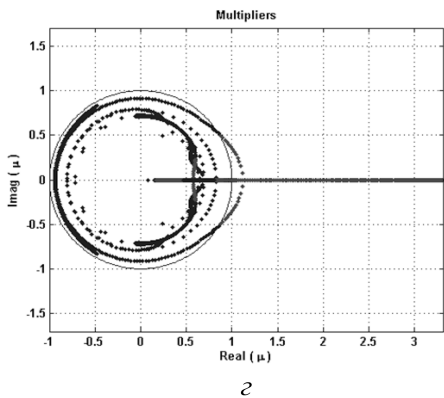
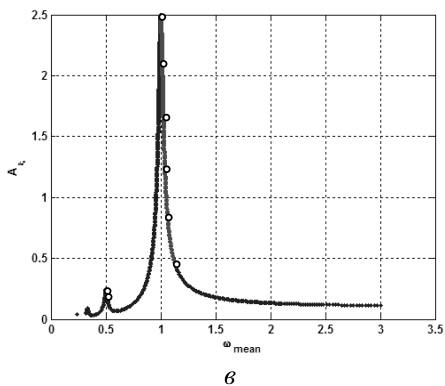
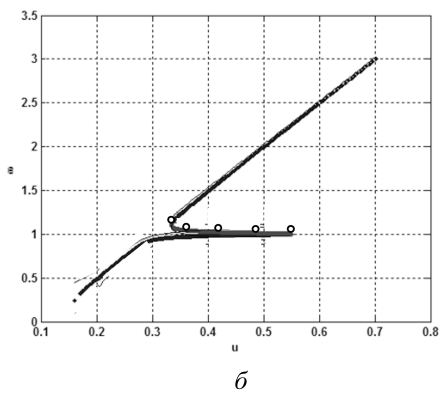
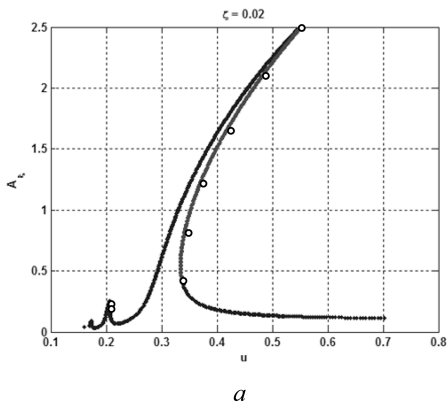


Рис. 4. Результаты численного расчета при $\zeta = 0,02$

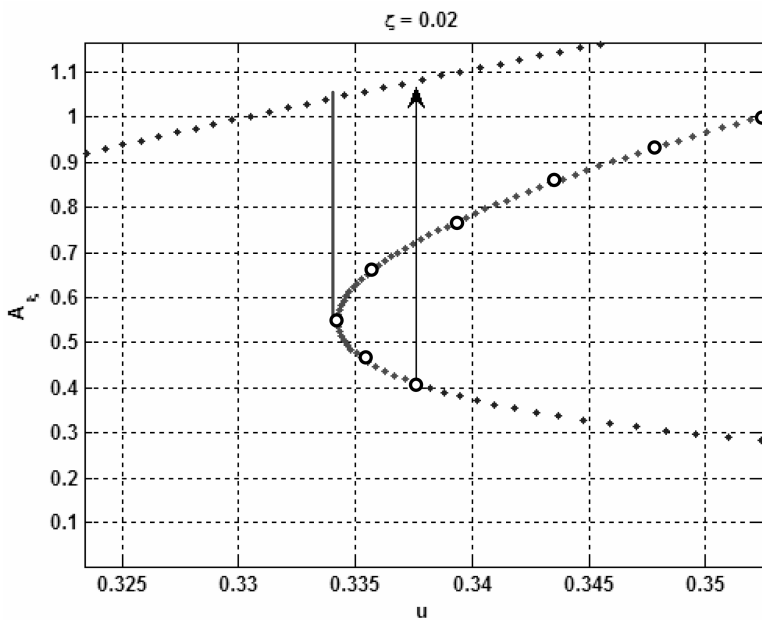


Рис. 5. Резонансные области амплитудных зависимостей, соответствующих случаю $\zeta = 0,02$ (масштаб увеличен)

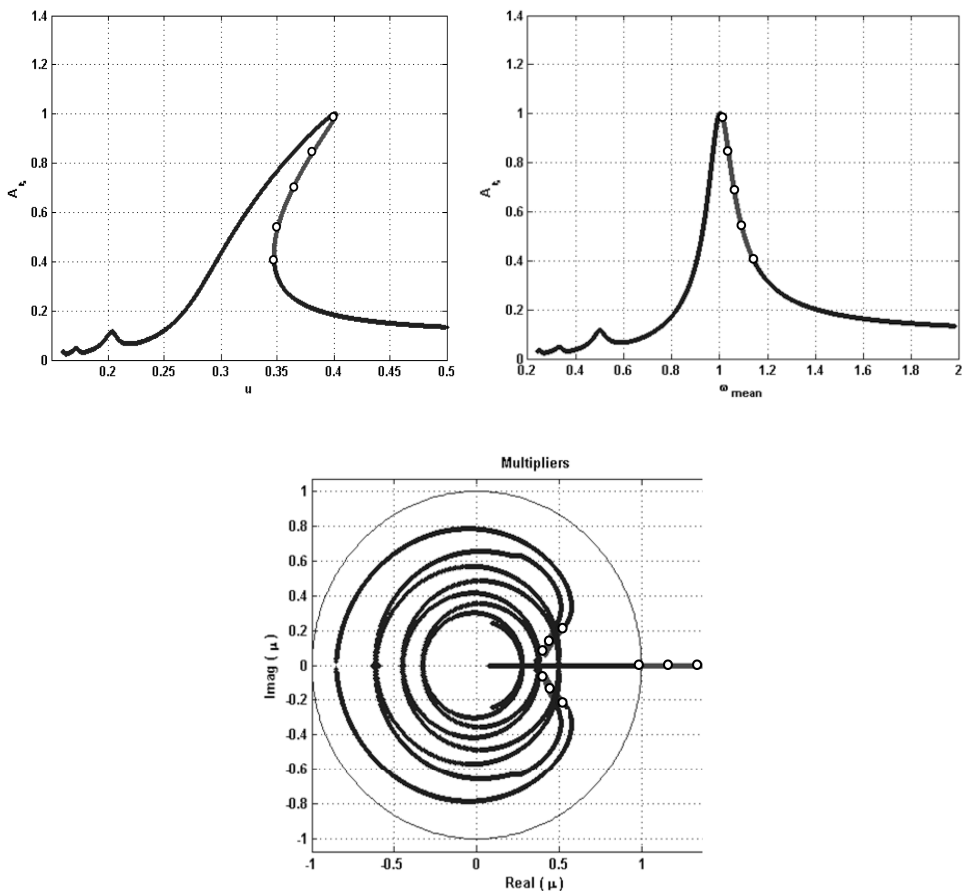


Рис. 6. Результаты численного расчета при $\zeta = 0,05$

На частотных зависимостях (рис. 3, *a, б* и 4, *a, б*) видны гистерезисы, соответствующие скачкам угловой скорости ротора вблизи основного резонанса $\omega_{\xi} = 1$ и дополнительных — $\omega = 1/2$, $\omega = 1/3$.

В резонансных областях амплитудных и частотных зависимостей наблюдаются неустойчивые режимы (участки ветвей, выделенные кружками). Две резонансные области амплитудных зависимостей, соответствующих случаю $\zeta = 0,02$, в увеличенном масштабе показаны на рис. 5. В диапазонах изменения значений напряжения, ограниченных вертикальными прямыми, возникают два неустойчивых состояния (см. рис. 5). Полученный результат принципиально отличается от традиционных решений, при которых выявляется существование двух устойчивых и только одного неустойчивого режима. Это связано с тем, что в данной системе реализуется не только бифуркация типа предельная точка, когда наибольший по модулю мультипликатор $\mu = +1$ ($|\mu_k| < 1, k = 2, 3$), но также реализуется

субкритическая бифуркация Неймарка — Саккера, при которой появляются два комплексно сопряженных мультипликатора $\mu_{1,2} = \exp(\pm i\Theta)$, $\Theta \in (0, \pi)$, $\mu_3 \in (-1, +1)$. Отметим, что с увеличением демпфирования область существования двух неустойчивых режимов уменьшается и имеется «критическое по устойчивости» значение параметра демпфирования, при котором бифуркация Неймарка — Саккера исчезает, что соответствует слиянию двух комплексно сопряженных мультипликаторов в точке $+1$.

На зависимостях амплитуды колебаний платформы от усредненной угловой скорости ω_{mean} ротора (рис. 3, в и 4, в) также обнаруживаются субрезонансы $1:n$ ($n=1, 2, \dots$). В данной системе резонансы типа $\omega = \omega_{\zeta}/n$ можно трактовать как параметрические резонансы (так как в коэффициенты системы уравнений (11) независимая переменная φ входит в виде $\cos 2\varphi$, $\sin 2\varphi$).

Поведение мультипликаторов (рис. 3, г и 4, г) показывает переход мультипликаторов за единичную окружность не только в точке $\mu = +1$, но и в точках $\mu = \exp(\pm i\Theta)$.

На рис. 6 приведены аналогичные графики для случая «большого» демпфирования ($\zeta = 0,05$), при котором наблюдается только один тип бифуркации $\mu = +1$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Блехман И.И. Вибрационная механика. — М.: ФИЗМАЛИТ, 1994. — 400 с.
2. Кононенко В.О. Колебательные системы с ограниченным возбуждением. — М.: Наука, 1964. — 324 с.
3. Пановко Г.Я. Лекции по основам теории вибрационных машин и технологий: учеб. пособие для вузов. — М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2008. — 192 с.
4. Пановко Я.Г., Губанова И.И. Устойчивость и колебания упругих систем. — М.: Наука, 1979. — 384 с.
5. Исследование динамики вибрационного инструмента при его взаимодействии с обрабатываемой средой / Л.Ю. Волкова, И.В. Лупехина, Г.Я. Пановко, С.Ф. Яцун // Машиностроение и инженерное образование. — 2010. — № 4(25). — С. 43–52.
6. Sommerfeld A. Zur Hydrodynamischen Theorie der Schmiermittelreibung // Zeitschrift für Mathematik und Physik. — 1904. — Vol. 50. — S. 97–155.
7. Seydel R. Practical bifurcation and stability analysis. — New York: Springer Verlag, Ink, 1994. — 407 p.

Статья поступила в редакцию 28.09.2012