

А.А. Герасименко, А.М. Гуськов,
М.А. Гуськов, Ф. Лоронг

ОПРЕДЕЛЕНИЕ СОБСТВЕННЫХ ЧАСТОТ ВРАЩАЮЩЕЙСЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ

Численно разработан аналитический алгоритм расчета динамики вращающихся цилиндрических оболочек для использования в моделировании процессов резания при точении тонкостенных элементов конструкции. Алгоритм основан на методе Галеркина в сочетании с разложением поля перемещений в тригонометрические и балочные функции. Получена зависимость собственных частот оболочки от частоты вращения конструкции.

E-mail: gouskov_am@mail.ru

Ключевые слова: цилиндрическая оболочка, собственные частоты, модальный анализ, диаграмма Кэмпбелла.

Проектирование изделий многих отраслей современного машиностроения сопряжено с обеспечением минимальной массы при максимальной прочности под механическими и тепловыми нагрузками. В данном контексте некоторые крупные конструкции (например, барабаны роторов турбореактивных авиадвигателей) получают точением из цельной заготовки [1, 2]. В ходе завершающих операций обработки таких деталей, представляющих собой относительно податливые тонкостенные конструкции, появляются предпосылки к возникновению автоколебаний под воздействием процесса резания. Данные вибрации приводят к ускоренному износу инструмента и узлов станков, а также к ухудшению свойств поверхности детали [3, 4].

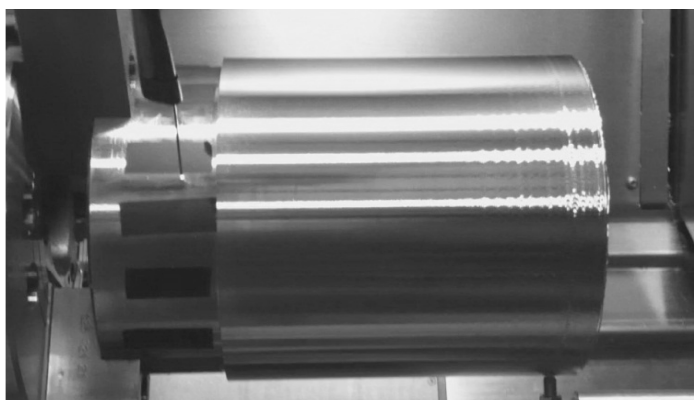


Рис. 1. Цилиндрическая оболочка после процесса обработки точением с вибрациями

Высокая стоимость материалов, деталей и оснастки приводит к необходимости разрабатывать способы оценки устойчивости процесса резания на стадии проектирования техпроцесса. Сегодня существуют методы проверки устойчивости стационарного процесса резания, основанные на анализе характеристического уравнения линеаризованной системы [3] или на прямом интегрировании уравнений движения. Последний подход позволяет более полно представить силы взаимодействия в зоне резания, однако он либо ограничивается исследованием простых динамических систем, таких как эквивалентный брус [5], либо, как в случае применения конечно-элементных моделей сложных конструкций, связан с проблемой учета смещения зоны резания по поверхности детали, что значительно усложняет расчет [1, 6, 7]. В работе [1] данная проблематика исследуется на модельной задаче точения тонкостенной цилиндрической оболочки. На рис. 1 показана деталь с дефектами, появившимися в ходе эксперимента по точению оболочки с вибрациями, аналогичному эксперименту, приведенному в работе [1].

В целях дальнейшего исследования операции точения цилиндрической оболочки необходимо разработать численно-аналитическую модель оболочки, основанную на представлении поля перемещений в конструкции через тригонометрические и балочные функции [8, 9], чему и посвящена данная работа. Такая модель позволила бы представить сложное деформированное состояние детали в рамках компактной системы, доступной для исследований динамики резания.

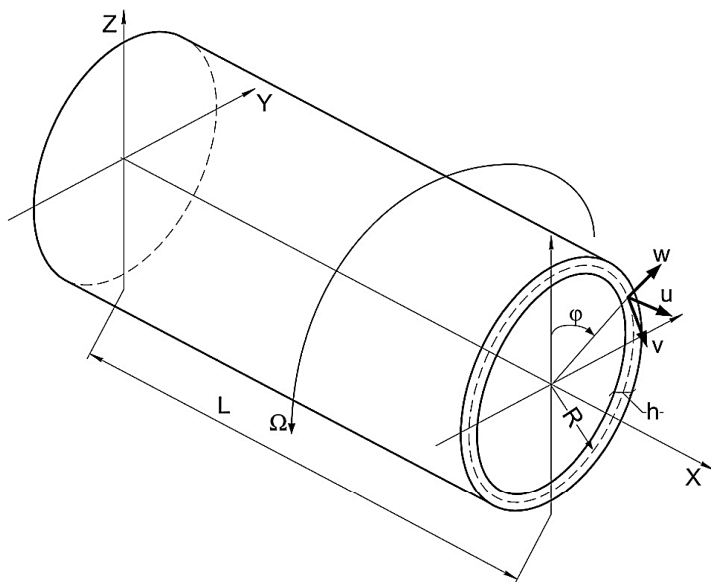


Рис. 2. Вращающаяся цилиндрическая оболочка:

Ω — угловая скорость вращения оболочки вокруг продольной оси; R — радиус срединной поверхности оболочки; L — длина оболочки; h — толщина оболочки

При постановке задачи рассматривается тонкостенная вращающаяся вокруг собственной оси цилиндрическая оболочка (рис. 2). Требуется получить систему уравнений движения конструкции, найти собственные частоты и построить диаграмму зависимости собственных частот конструкции от частоты вращения. На рис. 2 изображена схема задачи. Согласно принятым допущениям, основные соотношения теории оболочек были записаны в рамках классической теории Кирхгофа — Лява (см., например, [10]).

1. Материальный элемент, нормальный к срединной поверхности оболочки, и после деформации последней остается нормальным к изогнутой срединной поверхности.

2. Изменением длины этого элемента пренебрегают.

3. Нормальные напряжения в площадках, параллельных срединной поверхности, не учитываются.

Вывод основных соотношений и уравнений. Запишем выражение для кинетической энергии вращающейся цилиндрической оболочки:

$$K = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^L \rho_h \left[\partial_t^2 u^2 + (\partial_t v - \Omega(R+w))^2 + (\partial_t w - \Omega v)^2 \right] R dx d\varphi, \quad (1)$$

где $\rho_h = \int_{-h/2}^{h/2} \rho dz$ — поверхностная плотность материала; u, v, w — осевое, окружное и радиальное перемещения точки срединной поверхности оболочки. Частные производные указываем в следующем виде: $\partial_t u = \partial u / \partial t$.

Выражение для потенциальной энергии оболочки вращения имеет вид

$$\Pi = \frac{R}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^L \left[N_x \varepsilon_1 + N_\varphi \varepsilon_2 + N_{x\varphi} \gamma + M_x \chi_1 + M_\varphi \chi_2 + 2M_{x\varphi} \tau \right] dx d\varphi. \quad (2)$$

Здесь внутренние силы и моменты

$$\begin{aligned} N_x &= B(\varepsilon_1 + \mu\varepsilon_2), & M_x &= D(\chi_1 + \mu\chi_2); \\ N_\varphi &= B(\varepsilon_2 + \mu\varepsilon_1), & M_\varphi &= D(\chi_2 + \mu\chi_1); \\ N_{x\varphi} &= B\varepsilon_{12} \frac{1-\mu}{2}, & M_{x\varphi} &= D(1-\mu)\tau, \end{aligned}$$

где $B = \frac{Eh}{1-\mu^2}$; $D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}$; E — модуль упругости; μ — коэффициент Пуассона.

Компоненты деформаций и кривизн в уравнении (2) связаны с полем перемещений:

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &= \partial_x u, & \chi_1 &= -\partial_x^2 w; \\ \varepsilon_2 &= (\partial_\varphi v + w)/R, & \chi_2 &= -(\partial_\varphi^2 w - \partial_\varphi v)/R^2; \\ \varepsilon_{12} &= (\partial_x v + \partial_\varphi u/R), & \tau &= -(\partial_\varphi \partial_x w - \partial_x v)/R.\end{aligned}$$

Для вывода системы уравнений тонкостенной цилиндрической оболочки вращения используем метод Остроградского — Гамильтона:

$$\delta(K - \Pi) = 0. \quad (3)$$

После варьирования в уравнении (3) получим систему уравнений движения тонкостенной цилиндрической оболочки вращения во вращающейся системе отсчета:

$$\begin{aligned}L_{11}u + L_{12}v + L_{13}w &= \rho_h B^{-1} \partial_t^2 u; \\ L_{21}u + L_{22}v + L_{23}w &= \rho_h B^{-1} (\partial_t^2 v + 2\Omega \partial_t w - \Omega^2 v); \\ L_{31}u + L_{32}v + L_{33}w &= -\rho_h B^{-1} (\partial_t^2 w - 2\Omega \partial_t v - \Omega^2 w - 2R\Omega^2),\end{aligned} \quad (4)$$

где использованы следующие обозначения для симметричной матрицы дифференциальных операторов L_{ij} :

$$\begin{aligned}L_{11} &= \partial_x^2 + \frac{(1-\mu)}{2R^2} \partial_\varphi^2; \\ L_{22} &= \frac{(1-\mu)}{2} \partial_x^2 + \frac{1}{R^2} \partial_\varphi^2 + \frac{h^2}{12R^2} \left[\frac{1}{R^2} \partial_\varphi^2 + 2(1-\mu) \partial_x^2 \right]; \\ L_{33} &= \frac{1}{R^2} + \frac{h^2}{12R^2} \left[R^2 \partial_x^4 + 2\partial_x^2 \partial_\varphi^2 + \frac{1}{R^2} \partial_\varphi^4 \right]; \\ L_{12} &= \frac{(1+\mu)}{2R} \partial_x \partial_\varphi, & L_{13} &= \frac{\mu}{R} \partial_x; \\ L_{23} &= \frac{1}{R^2} \partial_\varphi - \frac{h^2}{12R^2} \left[(2-\mu) \partial_\varphi \partial_x^2 + \frac{1}{R^2} \partial_\varphi^3 \right].\end{aligned}$$

Дискретизация системы. Учитывая замкнутость оболочки по окружной координате φ , решение системы уравнений (4) будем искать в виде тригонометрических рядов:

$$\begin{aligned}\mathbf{y}(t, x, \varphi) &= \mathbf{p}_0(t, x) + \sum_1^\infty [\mathbf{p}_k(t, x) \cos(k\varphi) + \mathbf{q}_k(t, x) \sin(k\varphi)]; \\ \mathbf{y}(t, x, \varphi) &= \{u(t, x, \varphi), v(t, x, \varphi), w(t, x, \varphi)\}^T.\end{aligned} \quad (5)$$

Однородную систему уравнений (4) можно представить в следующем операторном виде:

$$\left[\mathbf{D}_0 (\partial_\varphi)^0 + \mathbf{D}_1 (\partial_\varphi)^1 + \mathbf{D}_2 (\partial_\varphi)^2 + \mathbf{D}_3 (\partial_\varphi)^3 + \mathbf{D}_4 (\partial_\varphi)^4 \right] \mathbf{y}(t, x, \varphi) = \mathbf{h};$$

$$\mathbf{h} = \{0 \quad 0 \quad \rho_h B^{-1} 2R\Omega^2\}^T, \quad (6)$$

где операторы \mathbf{D}_j симметричны

$$(\mathbf{D}_0)_{11} = \partial_x^2 - \rho_h B^{-1} \partial_t^2, \quad (\mathbf{D}_0)_{12} = 0, \quad (\mathbf{D}_0)_{13} = \frac{\mu}{R} \partial_x;$$

$$(\mathbf{D}_0)_{22} = \frac{(1-\mu)}{2} \partial_x^2 + \frac{h^2(1-\mu)}{6R^2} \partial_x^2 - \rho_h B^{-1} (\partial_t^2 - \Omega^2);$$

$$(\mathbf{D}_0)_{23} = -\rho_h B^{-1} 2\Omega \partial_t, \quad (\mathbf{D}_0)_{33} = \frac{1}{R^2} + \frac{h^2}{12} \partial_x^4 - \rho_h B^{-1} \Omega^2;$$

$$\mathbf{D}_1 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1+\mu}{2R} \partial_x & 0 \\ \frac{1+\mu}{2R} \partial_x & 0 & \frac{1}{R^2} - \frac{h^2(2-\mu)}{12R^2} \partial_x^2 \\ 0 & \frac{1}{R^2} - \frac{h^2(2-\mu)}{12R^2} \partial_x^2 & 0 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{D}_2 = \begin{bmatrix} \frac{1-\mu}{2R^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{R^2} + \frac{h^2}{12R^4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{R^2} + \frac{h^2}{6R^2} \partial_x^2 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{D}_3 = -\frac{h^2}{12R^4} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{D}_4 = \frac{h^2}{12R^4} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (7)$$

После подстановки соотношений (5) в (4) можно сгруппировать слагаемые с одинаковыми гармониками в виде

$$\mathbf{P}_0(t, x) + \sum_1^\infty [\mathbf{P}_k(t, x) \cos(k\varphi) + \mathbf{Q}_k(t, x) \sin(k\varphi)] = \mathbf{0}, \quad (8)$$

откуда получаем бесконечную систему уравнений

$$\mathbf{P}_0(t, x) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{P}_k(t, x) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{Q}_k(t, x) = \mathbf{0}, \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (9)$$

Компоненты векторов $\mathbf{P}_0(t, x)$, $\mathbf{P}_k(t, x)$, $\mathbf{Q}_k(t, x)$ соответствуют порядку систем (4). Редукция системы уравнений в частных производных (8) к системе обыкновенных уравнений по времени осуществим с помощью метода Галеркина. В качестве координатных функций по пространственной координате x используем балочные функции в виде

$$\psi_m(x) = C_1 [\cos(\lambda_m s) + \operatorname{ch}(\lambda_m s)] + C_2 [\cos(\lambda_m s) - \operatorname{ch}(\lambda_m s)] + C_3 [\sin(\lambda_m s) + \operatorname{sh}(\lambda_m s)] + C_4 [\sin(\lambda_m s) - \operatorname{sh}(\lambda_m s)], \quad s = x/L, \quad (10)$$

где C_1, C_2, C_3, C_4 — константы, которые находят из граничных условий. Координатные функции для различных граничных условий представлены в табл. 1, соотношения для λ_m, σ_m приведены в табл. 2.

В данной работе рассмотрены несколько типов граничных условий: Свободный — Свободный (С — С), Заделка — Свободный (З — С), Свободно опертый — Свободно опертый (СО — СО), Заделка — Свободно опертый (З — СО), Заделка — Заделка (З — З).

Таблица 1

Балочные функции для различных граничных условий

Тип граничных условий	Координатная функция
С — С	$\operatorname{ch}(\lambda_m s) + \cos(\lambda_m s) - \sigma_m [\operatorname{sh}(\lambda_m s) + \sin(\lambda_m s)]$
З — С	$\operatorname{ch}(\lambda_m s) - \cos(\lambda_m s) - \sigma_m [\operatorname{sh}(\lambda_m s) - \sin(\lambda_m s)]$
СО — СО	$\sin(m\pi s)$
З — СО	$\operatorname{ch}(\lambda_m s) - \cos(\lambda_m s) - \sigma_m [\operatorname{sh}(\lambda_m s) - \sin(\lambda_m s)]$
З — З	$\operatorname{ch}(\lambda_m s) - \cos(\lambda_m s) - \sigma_m [\operatorname{sh}(\lambda_m s) - \sin(\lambda_m s)]$

Таблица 2

Параметры для вычисления балочной функции

Граничные условия	Трансцендентное уравнение λ	Формула для вычисления σ_m
С — С	$\cos \lambda \operatorname{ch} \lambda = 1$	$\frac{\operatorname{ch} \lambda_m - \cos \lambda_m}{\operatorname{sh} \lambda_m - \sin \lambda_m}$
З — С	$\cos \lambda \operatorname{ch} \lambda + 1 = 0$	$\frac{\operatorname{sh} \lambda_m - \sin \lambda_m}{\operatorname{ch} \lambda_m + \cos \lambda_m}$
З — СО	$\operatorname{tg} \lambda = \operatorname{th} \lambda$	$\frac{\operatorname{ch} \lambda_m - \cos \lambda_m}{\operatorname{sh} \lambda_m - \sin \lambda_m}$
З — З	$\cos \lambda \operatorname{ch} \lambda = 1$	$\frac{\operatorname{ch} \lambda_m - \cos \lambda_m}{\operatorname{sh} \lambda_m - \sin \lambda_m}$

В результате поля перемещений в (5) и соответственно в (9) можно представить в виде конечных рядов:

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_l(t, x) &\approx \sum_{m=1}^n \mathbf{F}_m(x) \mathbf{r}_{l,m}(t), \quad l = 0, 1, 2, \dots; \\ \mathbf{q}_k(t, x) &\approx \sum_{m=1}^n \mathbf{F}_m(x) \mathbf{s}_{k,m}(t), \quad k = 1, 2, 3, \dots; \\ \mathbf{F}_m(x) &= \begin{bmatrix} \partial_x \psi_m(x) & 0 & 0 \\ 0 & \psi_m(x) & 0 \\ 0 & 0 & \psi_m(x) \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (11)$$

где $\mathbf{r}_{l,m}(t)$, $\mathbf{s}_{k,m}(t)$ — неизвестные амплитудные функции.

После подстановки (11), (5) в уравнение (6) соотношениям (9) можно придать вид

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_0(t, x) &\approx \sum_{m=1}^n \mathbf{D}_0 \mathbf{F}_m(x) \mathbf{r}_{0,m}(t) = \Delta_0^{(n)}; \\ \mathbf{P}_k(t, x) &\approx \sum_{m=1}^n (k^4 \mathbf{D}_4 - k^2 \mathbf{D}_2 + \mathbf{D}_0) \mathbf{F}_m(x) \mathbf{r}_{k,m}(t) + \\ &+ \sum_{m=1}^n (k \mathbf{D}_1 - k^3 \mathbf{D}_3) \mathbf{F}_m(x) \mathbf{s}_{k,m}(t) = \Delta_{k,c}^{(n)}; \\ \mathbf{Q}_k(t, x) &\approx \sum_{m=1}^n (-k \mathbf{D}_1 + k^3 \mathbf{D}_3) \mathbf{F}_m(x) \mathbf{r}_{k,m}(t) + \\ &+ \sum_{m=1}^n (k^4 \mathbf{D}_4 - k^2 \mathbf{D}_2 + \mathbf{D}_0) \mathbf{F}_m(x) \mathbf{s}_{k,m}(t) = \Delta_{k,s}^{(n)}. \end{aligned} \quad (12)$$

Соответствующую систему уравнений относительно амплитудных функций $\mathbf{r}_{l,m}(t)$, $\mathbf{s}_{k,m}(t)$ получаем с помощью ортогонализации уравнений невязок (12) $\Delta_0^{(n)}$, $\Delta_{k,c}^{(n)}$, $\Delta_{k,s}^{(n)}$ к координатным блокам $\mathbf{F}_h(x)$:

$$\begin{aligned} \int_0^L \mathbf{F}_h(x) \Delta_0^{(n)}(t, x) dx &= \mathbf{0}, \quad h = 1, 2, \dots, n; \\ \int_0^L \mathbf{F}_h(x) \Delta_{k,c}^{(n)}(t, x) dx &= \mathbf{0}, \quad h = 1, 2, \dots, n, \quad k = 1, 2, 3, \dots; \\ \int_0^L \mathbf{F}_h(x) \Delta_{k,s}^{(n)}(t, x) dx &= \mathbf{0}, \quad h = 1, 2, \dots, n, \quad k = 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (13)$$

В результате записывают две системы уравнений: систему для нулевой окружной гармоники

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{0,n} \mathbf{f}_{0,n}'' + \mathbf{B}_{0,n} \mathbf{f}_{0,n}' + \mathbf{C}_{0,n} \mathbf{f}_{0,n} &= 0; \\ \mathbf{f}_{0,n} &= \{\mathbf{r}_{0,1} \quad \mathbf{r}_{0,2} \quad \dots \quad \mathbf{r}_{0,n}\}^T \end{aligned} \quad (14)$$

и систему для k -й гармоники

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{k,n} \mathbf{g}_{k,n}'' + \mathbf{B}_{k,n} \mathbf{g}_{k,n}' + \mathbf{C}_{k,n} \mathbf{g}_{k,n} &= 0; \\ \mathbf{g}_{k,n} &= \{\mathbf{r}_{k,1} \quad \mathbf{s}_{k,1} \quad \mathbf{r}_{k,2} \quad \mathbf{s}_{k,2} \quad \dots \quad \mathbf{r}_{k,n} \quad \mathbf{s}_{k,n}\}^T. \end{aligned} \quad (15)$$

Оператор $\mathbf{A}_{0,n} d_t^2 + \mathbf{B}_{0,n} d_t + \mathbf{C}_{0,n}$ имеет блочную структуру 3×3 , каждый блок, согласно (14), (13), (12), имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} (\mathbf{A}_{0,n} d_t^2 + \mathbf{B}_{0,n} d_t + \mathbf{C}_{0,n})_{i,j} &= \int_0^L \mathbf{F}_i(x) \mathbf{D}_0 \mathbf{F}_j(x) dx, \quad i, j = 1, \dots, n, \Rightarrow \\ \sum_{j=1}^n (\mathbf{A}_{0,n} d_t^2 + \mathbf{B}_{0,n} d_t + \mathbf{C}_{0,n})_{i,j} \mathbf{r}_{0,j}(t) &= 0, \quad i = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (16)$$

Для ненулевых гармоник оператор $\mathbf{A}_{k,n} d_t^2 + \mathbf{B}_{k,n} d_t + \mathbf{C}_{k,n}$ также имеет блочную структуру с размером блоков 6×6 :

$$\begin{aligned} &(\mathbf{A}_{k,n} d_t^2 + \mathbf{B}_{k,n} d_t + \mathbf{C}_{k,n})_{i,j} = \\ &= \begin{bmatrix} \int_0^L \mathbf{F}_i(x) \mathbf{X} \mathbf{F}_j(x) dx & \int_0^L \mathbf{F}_i(x) \mathbf{Y} \mathbf{F}_j(x) dx \\ -\int_0^L \mathbf{F}_i(x) \mathbf{Y} \mathbf{F}_j(x) dx & \int_0^L \mathbf{F}_i(x) \mathbf{X} \mathbf{F}_j(x) dx \end{bmatrix}, \quad i, j = 1, \dots, n, \Rightarrow \\ &\sum_{j=1}^n (\mathbf{A}_{k,n} d_t^2 + \mathbf{B}_{k,n} d_t + \mathbf{C}_{k,n})_{i,j} \begin{Bmatrix} \mathbf{r}_{k,j}(t) \\ \mathbf{s}_{k,j}(t) \end{Bmatrix} = 0, \quad i = 1, \dots, n, \\ &\mathbf{X} = k^4 \mathbf{D}_4 - k^2 \mathbf{D}_2 + \mathbf{D}_0, \quad \mathbf{Y} = k \mathbf{D}_1 - k^3 \mathbf{D}_3. \end{aligned} \quad (17)$$

Решением уравнений (16), (17) являются амплитудные функции $\mathbf{r}_{0,j}(t)$ и $\mathbf{r}_{k,j}(t)$, $\mathbf{s}_{k,j}(t)$. Восстановление вектора $\mathbf{y}(t, x, \varphi)$ происходит по следующим соотношениям:

$$\mathbf{y}(t, x, \varphi) \approx \sum_{j=1}^n \mathbf{F}_j(x) \mathbf{r}_{0,j}(t) + \sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^n \mathbf{F}_j(x) \mathbf{r}_{k,j}(t) \cos(k\varphi) +$$

$$+ \sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^n \mathbf{F}_j(x) \mathbf{s}_{k,j}(t) \sin(k\varphi). \quad (18)$$

Таким образом, получаем деформированное поле перемещений цилиндрической оболочки, представленное в виде суммы рядов до m -й окружной и до n -й осевой гармоники.

Результаты разработки. Для проверки точности результатов данного подхода проведено сравнение значений собственных частот с результатами, опубликованными в открытой печати. Проверку проводили путем сопоставлений безразмерного частотного параметра

$\omega = \Omega_{kj}^* R \sqrt{\rho \frac{1-\mu^2}{E}}$ (где ρ — плотность материала; Ω_{kj}^* — частота для k -й окружной и j -й осевой гармоники) для случая собственных колебаний цилиндрической оболочки с различными граничными условиями с данными из литературы [8, 9, 11—14].

В табл. 3 представлены безразмерные частотные параметры для геометрических соотношений $h/R = 0,002$; $L/R = 20$ и для граничных условий Заделка — Заделка. Расхождение текущих результатов с результатами, опубликованными в источниках [8, 11], находится в пределах 0,1 %.

Таблица 3

Безразмерная частота цилиндрической оболочки для граничных условий 3 — 3 ($h/R = 0,002$; $L/R = 20$; $\mu = 0,3$)

m	k	Данные из [8]	Данные из [11]	Текущие результаты	[8]/Текущие результаты, %	[11]/Текущие результаты, %
1	1	0,03440	0,03440	0,034395	0,0145	0,0145
	2	0,01204	0,01203	0,012034	0,0499	0,0332
	3	0,007222	0,007222	0,00722185	0,0021	0,0021
	4	0,009048	0,009047	0,009047	0,0111	0
	5	0,01377	0,01377	0,013772	0,0145	0,0145
2	1	0,08484	0,08484	0,084835	0,0059	0,0059
	2	0,03162	0,03162	0,031617	0,0095	0,0095
	3	0,01603	0,01603	0,016033	0,0187	0,0187
	4	0,01233	0,01233	0,012331	0,0081	0,0081
	5	0,01484	0,01484	0,014844	0,0269	0,0269

В табл. 4 и 5 для сравнения приведены безразмерные частотные параметры цилиндрической оболочки со свободно опертыми концами для различных геометрических параметров. Расхождение резуль-

татов, полученных в рамках данной работы, с результатами из [11—13] не превышает 0,08 %.

Таблица 4

**Безразмерная частота цилиндрической оболочки
для граничных условий СО — СО ($j = 1$; $h/R = 0,01$; $L/R = 20$; $\mu = 0,3$)**

k	Данные из [12]	Данные из [13]	Текущий результат	[12]/Текущий результат, %	[13]/Текущий результат, %
1	0,016101	0,016101	0,016101	0	0
2	0,009382	0,009382	0,009377	0,053	0,05329
3	0,022105	0,022105	0,022103	0,009	0,00905
4	0,042095	0,042095	0,042094	0,0024	0,00238
5	0,068008	0,068008	0,068007	0,0015	0,00147
6	0,099730	0,099731	0,099729	0,001	0,002
7	0,137239	0,137240	0,137238	0,0007	0,00146
8	0,180527	0,180527	0,180527	0	0
9	0,229594	0,229596	0,229593	0,00044	0,00131
10	0,284435	0,284438	0,284435	0	0,0011

Таблица 5

**Безразмерная частота цилиндрической оболочки
для граничных условий СО — СО ($j = 1$; $L/R = 20$; $\mu = 0,3$)**

h/R	k	Данные из [11]	Данные из [13]	Текущий результат	[11]/Текущий результат, %	[13]/Текущий результат, %
0,05	0	0,0929682	0,0929586	0,92968276	8,2e-05	0,01
	1	0,0161029	0,0161065	0,0161029	0	0,022
	2	0,0392710	0,0393038	0,0392710	0	0,084
	3	0,1098113	0,1098527	0,1098115	0,0002	0,04
	4	0,2102770	0,2103446	0,2102772	9,5e-05	0,03
0,002	0	0,0929298	0,0929296	0,092929626	0,0002	2,8e-05
	1	0,0161011	0,0161011	0,0161011	0	0
	2	0,00515297	0,0054532	0,00545297	0	0,004
	3	0,00504148	0,0050418	0,00504148	0	0,0064
	4	0,00853383	0,0085340	0,008533822	9,4e-05	0,0021

В табл. 6 включены результаты вычисления безразмерного частотного параметра для различных граничных условий, таких как За-

делка — Заделка и Заделка — Свободно опертый край. Результат сравнения полученных значений с данными из литературы [8] показывает, что имеется процентное расхождение в пределах 0,2 %. В табл. 7 для сравнения показаны параметры собственной частоты цилиндрической оболочки для условий закрепления Заделка — Свободный конец (см. табл. 2). Сравнение проводили с экспериментальными данными, которые опубликованы в [14], а также с аналитическим результатом [9]. Расчет выполнен для первой гармоники $n = 1$ в (18) при следующих значениях параметров: $L = 502$ мм; $R = 63,5$ мм; $h = 1,63$ мм; $\mu = 0,28$; $\rho = 7,8 \cdot 10^3$ кг · м⁻³; $E = 2,1 \cdot 10^{11}$ Па. Процентное расхождение с опубликованными в литературе результатами находится в пределах 1,3 %.

Таблица 6

Безразмерная частота цилиндрической оболочки с различными граничными условиями ($j = 1$; $h/R = 0,01$; $L/R = 20$; $\mu = 0,3$)

k	Заделка — Заделка			Заделка — Свободно опертый		
	Данные из [8]	Текущий результат	Погрешность, %	Данные из [8]	Текущий результат	Погрешность, %
1	0,034387	0,034395	0,023	0,02487	0,024830	0,18
2	0,0143	0,014256	0,055	0,01137	0,011360	0,071
3	0,0227	0,022713	0,022	0,02233	0,022323	0,022
4	0,0422	0,042216	0,008	0,04215	0,042141	0,008
5	0,0681	0,068051	0,004	0,06803	0,068027	0,004
6	0,0998	0,099755	0,003	0,09975	0,099743	0,003
7	0,1373	0,137259	0,002	0,13725	0,137251	0,003
8	0,1806	0,180546	0,002	0,18054	0,180539	0,002
9	0,2297	0,229611	0,002	0,22961	0,229605	0,002
10	0,2845	0,284453	0,002	0,28445	0,284447	0,002

Таблица 7

Собственные частоты оболочки для граничных условий 3 — С ($j = 1$; $h/R = 0,0257$; $L/R = 7,91$; $\mu = 0,3$)

k	Данные из [14], Гц	Данные из [9], Гц	Текущий результат, Гц	Текущий результат ω_{kj}	Погрешность, %, [14] / [9]	Погрешность, %, [14] / Текущий результат	Погрешность, %, [9] / Текущий результат
3	760,0	769,9	759,94	0,0561	1,3	0,008	1,3
4	1451,0	1459,7	1459,3	0,1077	0,6	0,6	0,03
5	2336,0	2366,9	2360,9	0,1743	1,3	1,0	0,25
6	3429,0	3470,0	3463,9	0,2557	1,8	1,0	0,18

На рис. 3 и 4 показаны зависимости собственных частот от окружных гармоник для различных условий закреплений. Можем убедиться, что влияние граничных условий является существенным только на первых частотах [15]. В работе [16] приведены обширные числовые данные определения частот при различных параметрах для невращающихся оболочек.

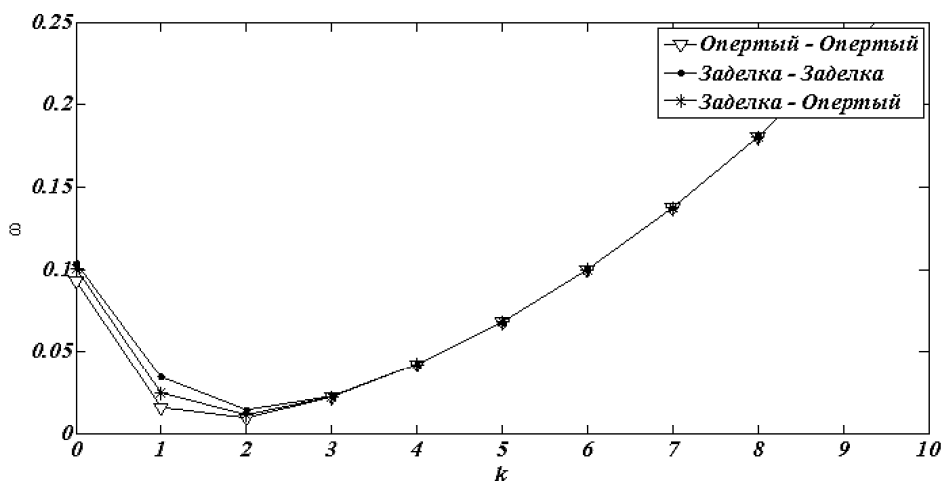


Рис. 3. Зависимость нижней частоты цилиндрической оболочки от окружных гармоник при $j = 1$; $h/R = 0,01$; $L/R = 20$; $\mu = 0,3$

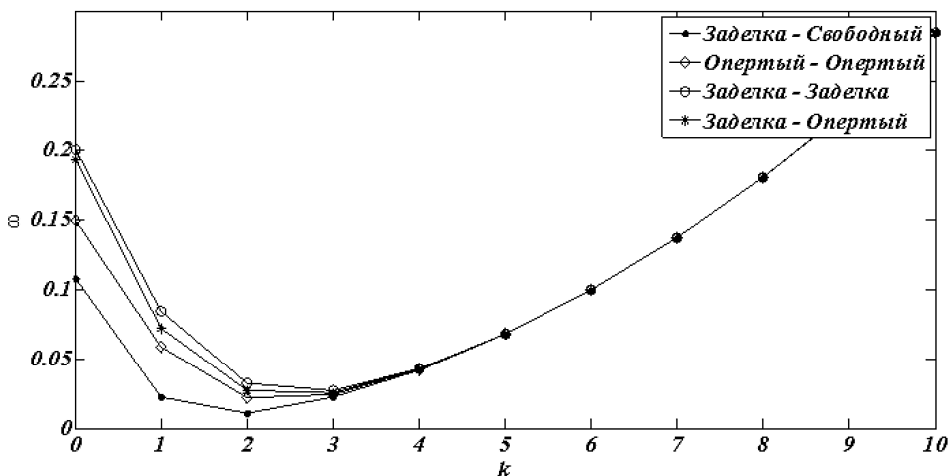


Рис. 4. Зависимость безразмерного частотного параметра от окружных гармоник при $j = 2$; $h/R = 0,01$; $L/R = 20$; $\mu = 0,3$

Зависимость собственных частот от частоты вращения тонкостенной конструкции $f = \Omega/(2\pi)$ представлена на диаграмме Кэмпбелла (рис. 5), построенной для случая Заделка — Свободный край,

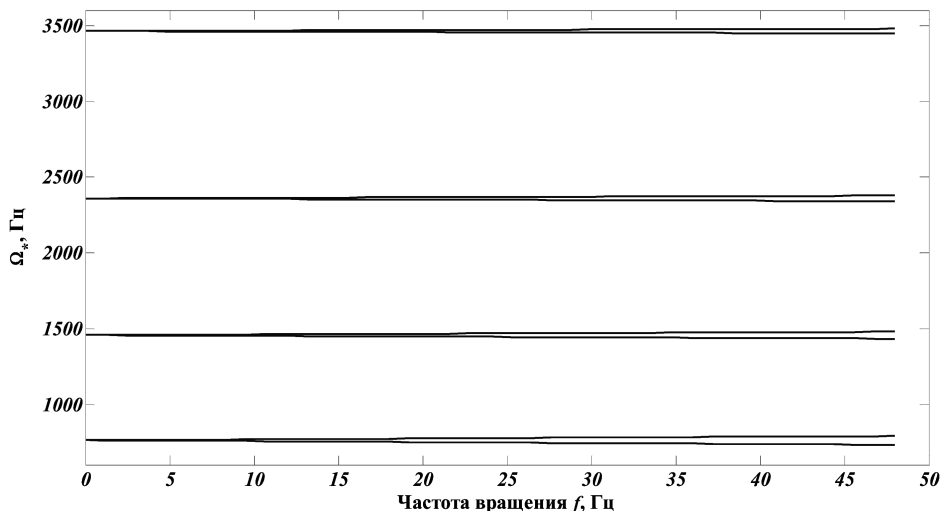


Рис. 5. Диаграмма Кэмпбелла

частоты которого приведены в табл. 7. Как показано на диаграмме, при увеличении частоты вращения происходит расщепление собственных частот.

Согласно проведенному анализу на собственные частоты, можно сделать вывод о том, что предложенный подход к моделированию тонкостенной вращающейся оболочки может быть использован в дальнейших исследованиях при изучении процесса течения тонкостенных конструкций. Следующим этапом работы станет усложнение модели путем добавления двигающейся точечной силы, а также учет динамики процесса течения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Lorong P., Larue A., Duarte A.P. Dynamic materials research // *Advanced Materials Research*. – 2011. – No. 223. – P. 591–599.
2. Pièces aéronautiques: Techniques d'usinage modernes et outil // *Tramétal, Spécial Aéronautique*. – 2005. – Juin.
3. Altintas Y. Manufacturing automation. Metal cutting mechanics, machine tool vibrations, and CNC design. – Cambridge: Cambridge University Press, 2000. – 286 p.
4. Болотин В.В. Вибрации в технике. – М: Машиностроение, 1978. – 352 с.
5. Жарков И.Г. Вибрации при обработке резанием. – Л.: Машиностроение, 1986. – 179 с.
6. Гуськов А.М. Разработка методов построения и анализа динамических моделей технологических процессов при механической обработке: дис... д-ра техн. наук: 01.02.06. – М., 1997.

7. Voronov S.A., Kiselev I.A. Dynamics of flexible detail milling // Proc. of the Institution of Mechanical Engineers. Part K: J. of Multi-body Dynamics. – Vol. 225, no. 4 (September 23, 2011). – P. 299–309.
8. Blevins R.D. Formulas for natural frequency and mode shape. – New York: Van Nostrand Reinhold, 1979. – 492 с.
9. Hua Li, Shin-Yong Lam. Rotating shell dynamic // Studies in Applied Mechanics. – 2005. – No. 50. – 263 с.
10. Бидерман В.Л. Механика тонкостенных конструкций. – М.: Машиностроение, 1977. – 487 с.
11. Lam K.Y., Loy C.T. Effects of boundary conditions on frequencies of a multi-layered cylindrical shell // J. of Sound and Vibration. – 1995. – No. 188. – P. 363–384.
12. Loy C.T., Lam K.Y. Analysis of cylindrical shells using generalized differential quadrature // Shock and Vibrations. – 1997. – No. 4. – P. 193–198.
13. Zhang X.M. Vibration Analysis of thin cylindrical shells using wave propagation approach // J. of Sound and Vibration. – 2001. – No. 239 (3). – P. 397–403.
14. Sharma C.B. Frequencies of clamped-free circular cylindrical shell // J. of Sound and Vibration. – 1973. – No. 30. – P. 525–528.
15. Forsberg K. Influence of boundary conditions on modal characteristics of cylindrical shells // AIAA J. – 1964. – No. 2. – P. 182–189.
16. Пановко Я.Г., Биргер И.А. Прочность, устойчивость, колебания: Справочник: в 3 т. – М.: Машиностроение, 1968. – Т. 1. – 831 с.; т. 2. – 463 с.; т. 3. – 567 с.

Статья поступила в редакцию 28.09.2012