

А.Е. Белкин, И.З. Даштиев, Д.С. Хоминич

## АНАЛИЗ СТАТИЧЕСКОГО НАГРУЖЕНИЯ АМОРТИЗАТОРА СПЕЦИАЛЬНОГО НАЗНАЧЕНИЯ ИЗ ПОЛИУРЕТАНА

*Представлены теория и результаты расчета больших деформаций полиуретанового амортизатора сжатия новой конструкции. Расчеты выполнены методом конечных элементов в смешанной форме с независимо варьируемыми перемещениями и гидростатическим давлением. Приведена система линеаризованных уравнений метода последовательных нагружений, использованного для решения нелинейной задачи. Выбор упругого потенциала для полиуретана СКУ-ПФЛ-100 осуществлен на основе результатов испытаний образцов на растяжение и сжатие. В качестве результатов расчета приведены нагрузочные характеристики и характеристики энергоемкости амортизаторов с различными значениями геометрических параметров; исследовано напряженное состояние амортизаторов.*

**E-mail:** a\_belkin@newmail.ru

**Ключевые слова:** полиуретановый амортизатор, расчет, большие деформации, слабосжимаемый материал, упругий потенциал, смешанная формулировка, инкрементальный метод, нагрузочные характеристики.

Амортизаторы из литьевого полиуретана, характеризующего высокими показателями эластичности и прочности, находят применение в специальном машиностроении. Данные амортизаторы обладают значительно большей жесткостью в сопоставлении с резиновыми амортизаторами, они предназначены для изоляции крупных объектов, испытывающих большие нагрузки. Ввиду сравнительно короткого опыта проектирования и эксплуатации полиуретановых амортизаторов их рабочие характеристики изучены недостаточно.

В данной статье приведены результаты расчетного исследования напряженно-деформированного состояния, нагрузочных характеристик и энергоемкости полиуретанового амортизатора сжатия, проектируемого под нагрузку порядка 300 кН при ходе 80...100 мм. Амортизатор представляет собой толстую разрезную оболочку вращения цилиндрической и конической формы, разделенную в окружном направлении на три сектора (рис. 1).

**Формулировка задачи расчета больших упругих деформаций эластомерной конструкции с учетом объемной сжимаемости материала.** Для описания деформированного состояния использованы градиент вектора места ( $\mathbf{F}$ ) с компонентами

$$F_{ij} = \delta_{ij} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j},$$

тензор меры деформации Коши — Грина

$$(\mathbf{C}) = (\mathbf{F})^T \cdot (\mathbf{F}),$$

тензор деформации

$$(\boldsymbol{\varepsilon}) = \frac{1}{2} [ (\mathbf{F})^T \cdot (\mathbf{F}) - (\mathbf{I}) ],$$

мера объемной деформации

$$J = \det(\mathbf{F}),$$

где  $\delta_{ij}$  — компоненты единичного тензора  $(\mathbf{I})$ ;  $x_j$  — декартовы координаты материальной точки в недеформированном состоянии;  $u_i$  — компоненты вектора перемещения точки.

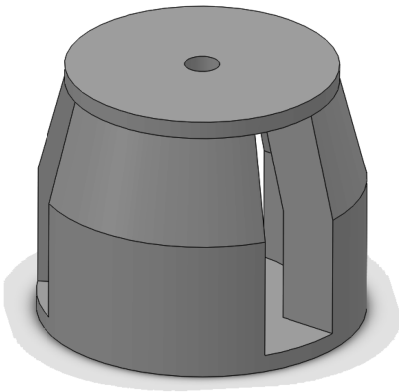
Так же как в линейной теории упругости, удельная потенциальная энергия деформации материала представлена в виде суммы энергии изменения объема  $U_1$  и энергии «формозменения»  $U_2$ . Для реализации такого разделения введены меры изохорической деформации [1]

$$(\hat{\mathbf{F}}) = J^{-1/3} (\mathbf{F}), \quad (\hat{\mathbf{C}}) = J^{-2/3} (\mathbf{C}),$$

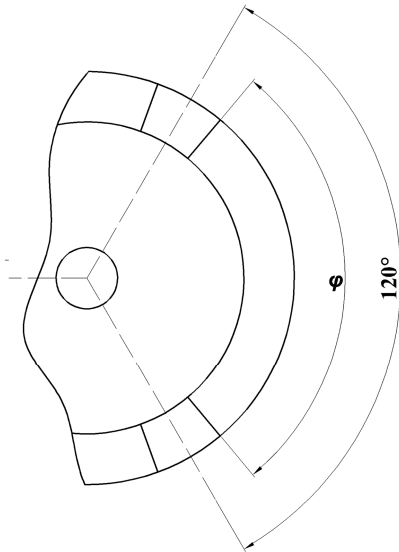
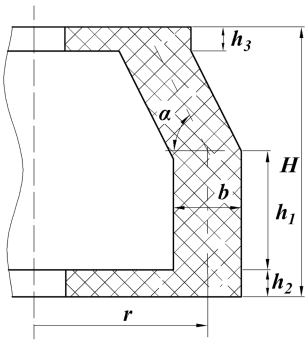
т. е. деформации, происходящей без изменения объема при  $\det(\hat{\mathbf{F}}) = 1$ . Первая часть удельной энергии зависит только от меры объемной деформации

$$U_1 = U_1(J), \quad (1)$$

вторая часть — от первого и второго инвариантов тензора изохорической деформации



а



б

Рис. 1. Общий вид (а) и параметрический чертеж (б) аморфизатора

$$U_2 = U_2(\hat{I}_{1c}, \hat{I}_{2c}), \quad (2)$$

где  $\hat{I}_{1c} = J^{-2/3} I_{1c}$ ,  $I_{1c} = C_{11} + C_{22} + C_{33}$ ;

$$\hat{I}_{2c} = J^{-4/3} I_{2c}, \quad I_{2c} = \begin{vmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} C_{22} & C_{23} \\ C_{32} & C_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} C_{33} & C_{13} \\ C_{31} & C_{11} \end{vmatrix}.$$

Исходя из функции удельной энергии  $U = U_1 + U_2$ , определяем тензор напряжений Пиолы — Кирхгофа:

$$(\mathbf{S}) = 2 \frac{\partial U}{\partial (\mathbf{C})} = 2 \left( p \frac{\partial J}{\partial (\mathbf{C})} + \alpha_1 \frac{\partial \hat{I}_{1c}}{\partial (\mathbf{C})} + \alpha_2 \frac{\partial \hat{I}_{2c}}{\partial (\mathbf{C})} \right), \quad (3)$$

где  $p(J) = \frac{\partial U_1}{\partial J}$  — гидростатическое давление;  $\alpha_1(\hat{I}_{1c}, \hat{I}_{2c}) = \frac{\partial U_2}{\partial \hat{I}_{1c}}$ ;

$$\alpha_2(\hat{I}_{1c}, \hat{I}_{2c}) = \frac{\partial U_2}{\partial \hat{I}_{2c}}.$$

Входящие в соотношения упругости (3) производные инвариантов тензора деформации вычисляем по следующим формулам [1]:

$$\frac{\partial J}{\partial (\mathbf{C})} = \frac{1}{2} J(\mathbf{C})^{-1}; \quad (4)$$

$$\frac{\partial \hat{I}_{1c}}{\partial (\mathbf{C})} = \frac{\partial (J^{-2/3} I_{1c})}{\partial (\mathbf{C})} = J^{-2/3} \left( (\mathbf{I}) - \frac{1}{3} I_{1c}(\mathbf{C})^{-1} \right); \quad (5)$$

$$\frac{\partial \hat{I}_{2c}}{\partial (\mathbf{C})} = \frac{\partial (J^{-4/3} I_{2c})}{\partial (\mathbf{C})} = J^{-4/3} \left( I_{1c}(\mathbf{I}) - (\mathbf{C}) - \frac{2}{3} I_{2c}(\mathbf{C})^{-1} \right). \quad (6)$$

При написании формул (4)—(6) учтена симметрия тензора  $(\mathbf{C})$ .

В результате подстановки выражений для производных (4)—(6) в соотношения упругости (3) последние получают вид

$$(\mathbf{S}) = (\mathbf{S}_p) + (\mathbf{S}_d); \quad (\mathbf{S}_p) = p J(\mathbf{C})^{-1}; \quad (7)$$

$$(\mathbf{S}_d) = 2 \alpha_1 J^{-2/3} \left( (\mathbf{I}) - \frac{1}{3} I_{1c}(\mathbf{C})^{-1} \right) + 2 \alpha_2 J^{-4/3} \left( I_{1c}(\mathbf{I}) - (\mathbf{C}) - \frac{2}{3} I_{2c}(\mathbf{C})^{-1} \right), \quad (8)$$

где  $(\mathbf{S}_p)$ ,  $(\mathbf{S}_d)$  — части тензора напряжений Пиолы — Кирхгофа, связанные с энергией изменения объема и энергией изохорических деформаций соответственно.

Дальнейшая конкретизация закона упругости связана с выбором потенциалов (1), (2). Для материалов с малой объемной деформацией (значение  $J$  очень близко к единице) весьма часто применяют простейший квадратичный закон сжимаемости:

$$U_1(J) = \frac{1}{2} k (J - 1)^2,$$

где  $k$  — модуль объемного сжатия материала.

В этом случае

$$p = k (J - 1). \quad (9)$$

Как известно из [2], в задачах со слабосжимаемым материалом применение метода конечных элементов (МКЭ) в формулировке метода перемещений сопровождается так называемым эффектом объемного заклинивания решения. Для того чтобы преодолеть этот эффект, переходят к смешанной формулировке задачи с независимо варьируемыми перемещениями и гидростатическим давлением. Энергию изменения объема записывают в виде

$$U_1(J, p) = p (J - 1) - \frac{p^2}{2k}.$$

Для обоснованного выбора функции энергии изохорических деформаций (2) проведены установочные эксперименты на образцах полиуретана СКУ-ПФЛ-100. Не останавливаясь на результатах испытаний, которые будут описаны далее, предположим, что выбор функции  $U_2$  сделан. Выразим вариацию удельной энергии деформации материала

$$\begin{aligned} \delta U &= \delta \left[ p (J - 1) - \frac{p^2}{2k} + U_2(\hat{I}_{1c}, \hat{I}_{2c}) \right] = \\ &= \left[ p J (\mathbf{C})^{-1} + (\mathbf{S}_d) \right] : \frac{1}{2} \delta(\mathbf{C}) + (J - 1 - k^{-1} p) \delta p. \end{aligned}$$

Из уравнения виртуальных работ

$$\int_{\circ V} \delta U d^{\circ}V = \delta W_{\text{ext}}$$

при независимых вариациях перемещений и давления следуют вариационные уравнения смешанного метода

$$\int_{\circ V} \left[ p J (\mathbf{C})^{-1} + (\mathbf{S}_d) \right] : \frac{1}{2} \delta(\mathbf{C}) d^{\circ}V = \delta W_{\text{ext}}; \quad (10)$$

$$\int_{\circ V} (J - 1 - k^{-1} p) \delta p d\circ V = 0, \quad (11)$$

где  $\circ V$  — объем тела в недеформированном состоянии;  $\delta W_{\text{ext}}$  — виртуальная работа внешних сил.

Для решения системы уравнений (10) и (11) применяем метод последовательных нагружений. После определения напряжений Пиолы — Кирхгофа ( $\mathbf{S}$ ) осуществляем переход к истинным напряжениям Коши ( $\boldsymbol{\sigma}$ ) по формуле

$$(\boldsymbol{\sigma}) = J^{-1} (\mathbf{F}) \cdot (\mathbf{S}) \cdot (\mathbf{F})^T.$$

**Уравнения инкрементального метода расчета больших деформаций.** Процесс деформирования конструкции рассматриваем как последовательность равновесных состояний, отвечающих возрастающим уровням нагрузки. Определим изменения характеристик напряженно-деформированного состояния, возникающие на малом шаге приращения нагрузки.

Тензор приращений деформации состоит из двух частей: линейной

$$(\Delta \mathbf{e}) = \frac{1}{2} \left[ (\Delta \mathbf{F})^T \cdot (\mathbf{F}) + (\mathbf{F})^T \cdot (\Delta \mathbf{F}) \right]$$

и квадратичной

$$(\Delta \boldsymbol{\eta}) = \frac{1}{2} (\Delta \mathbf{F})^T \cdot (\Delta \mathbf{F})$$

относительно приращений перемещений  $\Delta u_i$ , т. е.

$$(\Delta \boldsymbol{\varepsilon}) = (\Delta \mathbf{e}) + (\Delta \boldsymbol{\eta}).$$

Приращения напряжений  $(\Delta \mathbf{S}_p)$ ,  $(\Delta \mathbf{S}_d)$  вычисляем путем линеаризации законов упругости (7)—(9) в окрестности достигнутого деформированного состояния. Учитывая, что в линейном приближении  $(\Delta \mathbf{C}) = 2(\Delta \mathbf{e})$ , получаем

$$(\Delta \mathbf{S}_p) = J(\mathbf{C})^{-1} \Delta p + (\mathbf{E}_p) : (\Delta \mathbf{e}), \quad \Delta p = k J(\mathbf{C})^{-1} : (\Delta \mathbf{e}),$$

$$(\Delta \mathbf{S}_d) = (\mathbf{E}_d) : (\Delta \mathbf{e}),$$

где  $(\mathbf{E}_p) = 2p \frac{\partial (J(\mathbf{C})^{-1})}{\partial (\mathbf{C})}$ ,  $(\mathbf{E}_d) = 2 \frac{\partial (\mathbf{S}_d)}{\partial (\mathbf{C})}$  — четырехвалентные тензоры модулей упругости для шаровой и девиаторной составляющих тензора напряжений.

В соответствии с принятым законом деформирования в форме (3) или, что то же самое, в форме (7), (8) можно получить следующие выражения для модулей упругости:

$$(\mathbf{E}_p) = pJ \left( (\mathbf{C})^{-1} \otimes (\mathbf{C})^{-1} + 2 \frac{\partial(\mathbf{C})^{-1}}{\partial(\mathbf{C})} \right);$$

$$(\mathbf{E}_d) = 4\alpha_{11} \frac{\partial \hat{I}_{1c}}{\partial(\mathbf{C})} \otimes \frac{\partial \hat{I}_{1c}}{\partial(\mathbf{C})} + 4\alpha_{12} \left( \frac{\partial \hat{I}_{1c}}{\partial(\mathbf{C})} \otimes \frac{\partial \hat{I}_{2c}}{\partial(\mathbf{C})} + \frac{\partial \hat{I}_{2c}}{\partial(\mathbf{C})} \otimes \frac{\partial \hat{I}_{1c}}{\partial(\mathbf{C})} \right) +$$

$$+ 4\alpha_{22} \frac{\partial \hat{I}_{2c}}{\partial(\mathbf{C})} \otimes \frac{\partial \hat{I}_{2c}}{\partial(\mathbf{C})} + 4\alpha_1 \frac{\partial^2 \hat{I}_{1c}}{\partial(\mathbf{C})\partial(\mathbf{C})} + 4\alpha_2 \frac{\partial^2 \hat{I}_{2c}}{\partial(\mathbf{C})\partial(\mathbf{C})}, \quad (12)$$

где  $\alpha_{11} = \frac{\partial^2 U_2}{\partial \hat{I}_{1c}^2}$ ;  $\alpha_{12} = \frac{\partial^2 U_2}{\partial \hat{I}_{1c} \partial \hat{I}_{2c}}$ ;  $\alpha_{22} = \frac{\partial^2 U_2}{\partial \hat{I}_{2c}^2}$ ;  $\otimes$  — знак тензорного произведения.

Для краткости представления производных инвариантов (5), (6) введем тензоры

$$(\mathbf{A}) = (\mathbf{I}) - \frac{1}{3} I_{1c} (\mathbf{C})^{-1}, \quad (\mathbf{B}) = I_{1c} (\mathbf{I}) - (\mathbf{C}) - \frac{2}{3} I_{2c} (\mathbf{C})^{-1},$$

тогда

$$\frac{\partial \hat{I}_{1c}}{\partial(\mathbf{C})} = J^{-2/3} (\mathbf{A}), \quad \frac{\partial \hat{I}_{2c}}{\partial(\mathbf{C})} = J^{-4/3} (\mathbf{B}).$$

С учетом этих обозначений выражение для тензора модулей упругости (12) приводим к виду

$$(\mathbf{E}_d) = 4\alpha_{11} J^{-4/3} (\mathbf{A}) \otimes (\mathbf{A}) + 4\alpha_{12} J^{-2} [(\mathbf{A}) \otimes (\mathbf{B}) + (\mathbf{B}) \otimes (\mathbf{A})] +$$

$$+ 4\alpha_{22} J^{-8/3} (\mathbf{B}) \otimes (\mathbf{B}) - \frac{4}{3} \alpha_1 J^{-2/3} \left[ (\mathbf{I}) \otimes (\mathbf{C})^{-1} + (\mathbf{C})^{-1} \otimes (\mathbf{I}) + \right.$$

$$+ I_{1c} \frac{\partial(\mathbf{C})^{-1}}{\partial(\mathbf{C})} - \frac{1}{3} I_{1c} (\mathbf{C})^{-1} \otimes (\mathbf{C})^{-1} \left. \right] - \frac{8}{3} \alpha_2 J^{-4/3} \left[ (\mathbf{B}) \otimes (\mathbf{C})^{-1} + \right.$$

$$+ (\mathbf{C})^{-1} \otimes (\mathbf{B}) + I_{2c} \frac{\partial(\mathbf{C})^{-1}}{\partial(\mathbf{C})} + \frac{2}{3} I_{2c} (\mathbf{C})^{-1} \otimes (\mathbf{C})^{-1} \left. \right] +$$

$$+ 4\alpha_2 J^{-4/3} \left[ (\mathbf{I}) \otimes (\mathbf{I}) - \frac{\partial(\mathbf{C})}{\partial(\mathbf{C})} \right]. \quad (13)$$

В расчетах конструкций из эластомерных материалов весьма часто используют потенциал Трелоара

$$U_2 = D_{10} (\hat{I}_{1c} - 3) \quad (14)$$

и потенциал Муни — Ривлина

$$U_2 = D_{10} (\hat{I}_{1c} - 3) + D_{01} (\hat{I}_{2c} - 3). \quad (15)$$

В этих случаях определение модулей упругости по формуле (13) заметно упрощается, так как коэффициенты  $\alpha_{11}$ ,  $\alpha_{12}$ ,  $\alpha_{22}$  обращаются в ноль, причем при потенциале Трелоара и коэффициент  $\alpha_2 = 0$ .

Рассматривая вариационные уравнения (10), (11) на шаге нагружения, сохраняем в них слагаемые не выше квадратичных относительно приращений искомым переменных:

$$\begin{aligned} & \int_{\circ V} \left[ (\mathbf{E}_d) : (\Delta \mathbf{e}) + (\mathbf{E}_p) : (\Delta \mathbf{e}) + J(\mathbf{C})^{-1} \Delta p \right] : \delta(\Delta \mathbf{e}) d^\circ V + \\ & + \int_{\circ V} \left[ (\mathbf{S}_d) + p J(\mathbf{C})^{-1} \right] : \delta(\Delta \boldsymbol{\eta}) d^\circ V = \delta \Delta W_{\text{ext}} - \delta R_1, \\ & \int_{\circ V} \left[ J(\mathbf{C})^{-1} : (\Delta \mathbf{e}) - k^{-1} \Delta p \right] \delta \Delta p d^\circ V = -\delta R_2, \end{aligned}$$

где  $\delta R_1$ ,  $\delta R_2$  — невязки уравнений (10), (11) в начале шага нагружения,

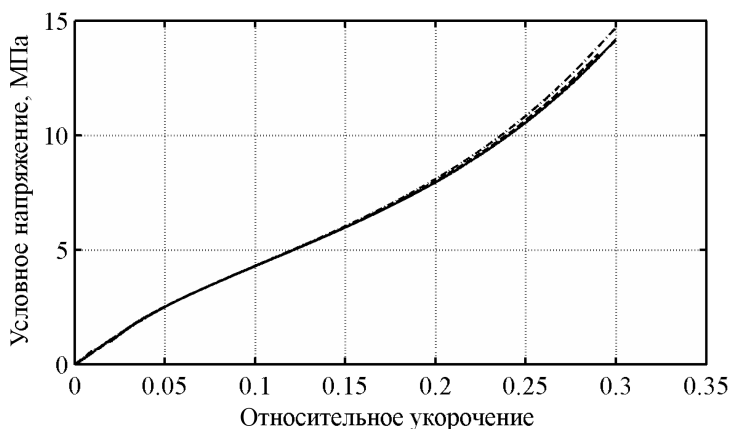
$$\begin{aligned} \delta R_1 &= \int_{\circ V} \left[ (\mathbf{S}_d) + p J(\mathbf{C})^{-1} \right] : \delta(\Delta \mathbf{e}) d^\circ V - \delta W_{\text{ext}}, \\ \delta R_2 &= \int_{\circ V} (J - 1 - k^{-1} p) \delta \Delta p d^\circ V. \end{aligned}$$

Формально невязки  $\delta R_1$ ,  $\delta R_2$  должны отсутствовать, поскольку исходное состояние предполагается равновесным. Однако ввиду приближенного характера решения уравнений невязки отличны от нуля, поэтому целесообразно сохранять их в разрешающих уравнениях на шаге нагружения для повышения точности расчетов.

**Результаты испытаний образцов полиуретана SKU-ПФЛ-100 на сжатие и растяжение. Выбор упругого потенциала.** В лаборатории кафедры «Прикладная механика» МГТУ им. Н.Э. Баумана проведена серия испытаний коротких цилиндрических образцов на сжатие на машине Zwick и образцов в форме плоских «лопаток» на рас-

тяжение на машине Instron ElectroPulse. В экспериментах соблюдены общие требования, предъявляемые к проведению физико-механических испытаний резины (ГОСТ 269–66, ГОСТ 265–77).

При испытаниях на сжатие применялась смазка ОКБ-122-7 для снижения трения между торцами образцов и плитами испытательной машины. Перед контрольным нагружением проведены тренировочные циклы, в которых образцы нагружали до степени сжатия 30 % со скоростью движения траверсы 20 мм/мин. Интервал отдыха между тренировочными циклами не превышал 10 с. При контрольном испытании условия нагружения были такие же. На рис. 2 показаны диаграммы сжатия полиуретана в координатах условное напряжение — относительное укорочение, полученные на нескольких образцах.



**Рис. 2. Диаграммы сжатия полиуретана СКУ-ПФЛ-100**

При испытаниях на растяжение образцы также подвергали предварительным тренировкам с двукратным удлинением. После трех циклов нагружения и разгрузки упругая характеристика образцов стабилизировалась и далее осуществляли испытания с замерах растягивающей силы и удлинения. На рис. 3 приведены диаграммы растяжения образцов, доведенных до разрушения. Согласно данным этих диаграмм, испытуемый полиуретан может претерпевать более чем четырехкратное удлинение и выдерживать условные напряжения растяжения до 35 МПа и более.

На основе экспериментально полученных диаграмм сжатия и растяжения подбирали упругий потенциал для полиуретана. Как варианты рассматривали одноконстантный потенциал Трелоара (14), двухконстантный потенциал Муни — Ривлина (15) и четырехконстантный потенциал Бидермана

$$U_2 = D_{10} (\hat{I}_{1c} - 3) + D_{20} (\hat{I}_{1c} - 3)^2 + D_{30} (\hat{I}_{1c} - 3)^3 + D_{01} (\hat{I}_{2c} - 3). \quad (16)$$



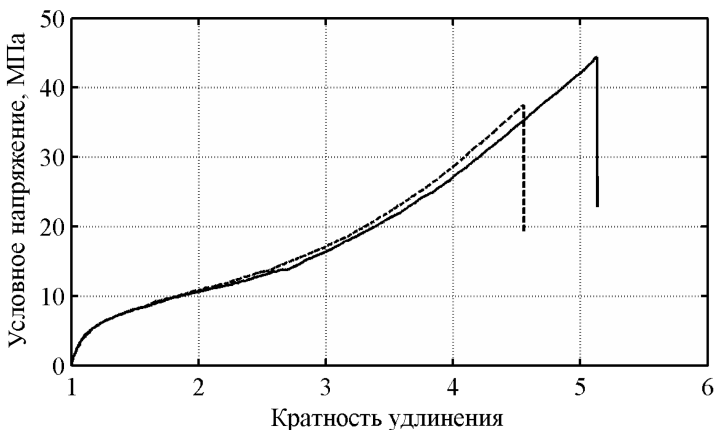


Рис. 3. Диаграммы растяжения полиуретана SKU-ПФЛ-100

Отметим, что перечисленные потенциалы содержатся в едином выражении

$$U_2 = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m D_{ij} (\hat{I}_{1c} - 3)^i (\hat{I}_{2c} - 3)^j.$$

При одноосном напряженном состоянии малая объемная сжимаемость материала практически не влияет на податливость образца. Поэтому при описании экспериментальных диаграмм полиуретан рассматриваем как несжимаемый материал.

Обозначив главные кратности удлинений  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ , выразим через них сначала инварианты тензора меры деформации

$$J = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 1, \quad \hat{I}_{1c} = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2, \quad \hat{I}_{2c} = \lambda_1^2 \lambda_2^2 + \lambda_2^2 \lambda_3^2 + \lambda_3^2 \lambda_1^2,$$

а затем главные истинные напряжения в несжимаемом материале [3]:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= 2\alpha_1 \lambda_1^2 + 2\alpha_2 \lambda_1^2 (\lambda_2^2 + \lambda_3^2) + p, \\ \sigma_2 &= 2\alpha_1 \lambda_2^2 + 2\alpha_2 \lambda_2^2 (\lambda_3^2 + \lambda_1^2) + p, \\ \sigma_3 &= 2\alpha_1 \lambda_3^2 + 2\alpha_2 \lambda_3^2 (\lambda_1^2 + \lambda_2^2) + p. \end{aligned} \quad (17)$$

Напомним, что коэффициенты  $\alpha_1 = \frac{\partial U_2}{\partial \hat{I}_{1c}}, \alpha_2 = \frac{\partial U_2}{\partial \hat{I}_{2c}}$  — функции

инвариантов  $\hat{I}_{1c}, \hat{I}_{2c}$  или постоянные величины.

В случае одноосного растяжения или сжатия по направлению 1 кратности удлинений в поперечных направлениях составляют  $\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_1^{-1/2}$ . Из формул (17) при условии  $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$  устанавли-

ваем связь между истинным напряжением растяжения и кратностью удлинения

$$\sigma_1 = 2\alpha_1 (\lambda_1^2 - \lambda_1^{-1}) + 2\alpha_2 (\lambda_1 - \lambda_1^{-2}).$$

Условное напряжение, отнесенное к начальной площади поперечного сечения образца, составляет

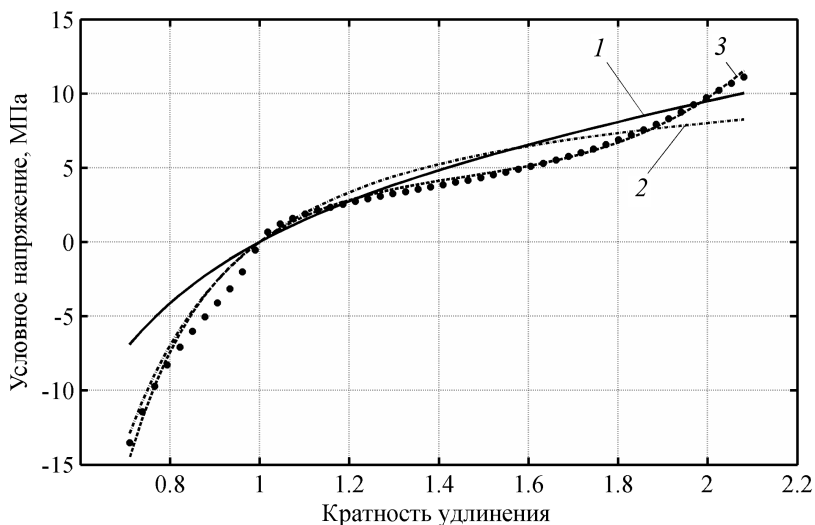
$$\sigma_1^* = \sigma_1 \lambda_2 \lambda_3 = \sigma_1 \lambda_1^{-1} = 2\alpha_1 (\lambda_1 - \lambda_1^{-2}) + 2\alpha_2 (1 - \lambda_1^{-3}). \quad (18)$$

Теоретическую зависимость (18) сопоставляли с экспериментальными диаграммами деформирования полиуретана и из условия наилучшего соответствия эксперименту определяли коэффициенты  $D_{ij}$  в выражениях упругих потенциалов (14), (15), (16). В качестве критерия соответствия приняли минимум квадрата отклонения от экспериментальной кривой:

$$\min \sum_{k=1}^N \left[ \sigma_1^*(\lambda_{1(k)})^{\text{эксперимент}} - \sigma_1^*(\lambda_{1(k)}, D_{ij})^{\text{теория}} \right]^2,$$

где  $\sigma_1^*(\lambda_{1(k)})^{\text{эксперимент}}$  — условное напряжение, полученное в эксперименте при кратности удлинения  $\lambda_{1(k)}$ ;  $\sigma_1^*(\lambda_{1(k)}, D_{ij})^{\text{теория}}$  — напряжение, рассчитанное по формуле (18);  $N$  — число точек сравнения.

Рассмотрен интервал изменения кратности удлинения от 0,7 до 2,1. В результате поиска получены следующие значения коэффициентов в выражениях потенциалов, МПа: Трелоара  $D_{10} = 2,76$ ; Муни — Ривлина  $D_{10} = 0,80$ ,  $D_{01} = 3,03$ ; Бидермана  $D_{10} = -1,22$ ,  $D_{20} = 0,09$ ,  $D_{30} = 0,10$ ,  $D_{01} = 4,79$ . Для сравнения на рис. 4 показаны диаграммы растяжения-сжатия полиуретана, построенные на основе перечисленных потенциалов при указанных значениях коэффициентов. Как и следовало ожидать, наилучшее соответствие эксперименту получено при использовании потенциала Бидермана, имеющего большее число подбираемых коэффициентов. Однако отметим, что добавление дополнительных слагаемых в выражение упругого потенциала приводит к существенному пересмотру значений коэффициентов. Этот факт является очевидным недостатком процедуры. Поэтому требуется дальнейшая отработка реализации выбора упругого потенциала для полиуретана и процедуры определения входящих в него коэффициентов. В данной работе для расчета амортизаторов использован потенциал Бидермана (16).



**Рис. 4. Теоретические и экспериментальная диаграммы растяжения-сжатия полиуретана:**

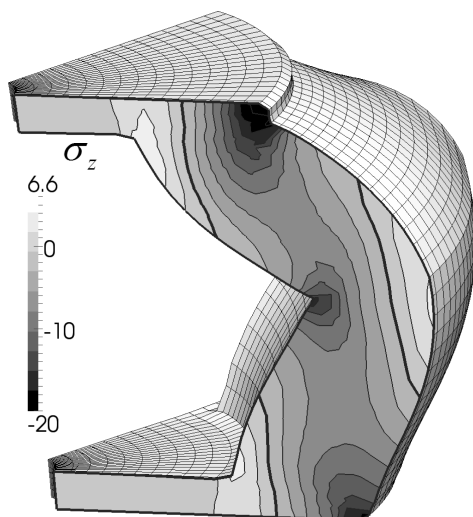
1 — потенциал Трелоара; 2 — потенциал Муни — Ривлина; 3 — потенциал Бидермана; точки — эксперимент

Результаты расчетов амортизаторов. Расчеты выполнены методом конечных элементов с использованием объемных 8-узловых элементов с трилинейной аппроксимацией перемещений и постоянным гидростатическим давлением. Конечными элементами смоделирован один из трех секторов амортизатора, при этом на границах сектора сформулированы условия циклической симметрии. На торцах амортизатора, скрепленных с жесткими пластинами, запрещены перемещения в плоскостях торцов. Сближение торцов рассматривали как параметр нагружения.

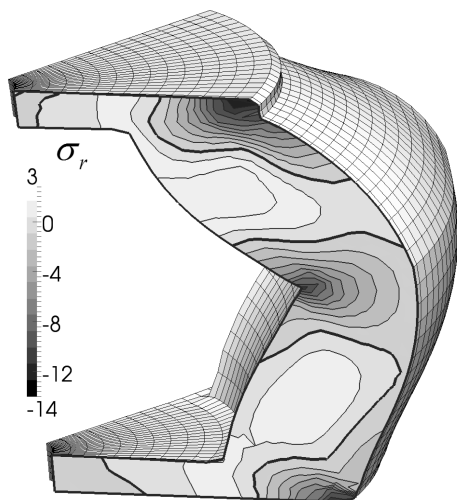
В расчетах изучали напряженно-деформированное состояние амортизаторов и влияние основных геометрических параметров амортизаторов на нагрузочные характеристики, жесткость и энергоемкость. В качестве базового проекта принят амортизатор, имеющий размеры (см. рис. 1, б):

$$H = 300 \text{ мм}, \quad h_1 = 140 \text{ мм}, \quad h_2 = h_3 = 20 \text{ мм}, \quad r = 150 \text{ мм}, \\ b = 70 \text{ мм}, \quad \alpha = 75^\circ, \quad \varphi = 110^\circ.$$

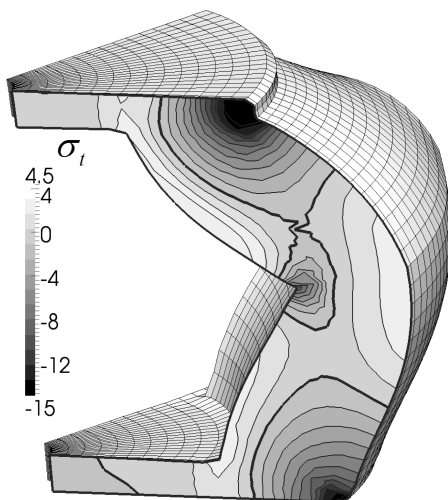
Для данного амортизатора при нагрузке 300 кН расчетное условное напряжение сжатия в цилиндрической части составляет 5 МПа. На рис. 5 показаны распределения истинных нормальных осевых, радиальных и окружных напряжений в меридиональной плоскости симметрии сектора при нагрузке 300 кН. В областях крепления торцовых поверхностей, а также в зоне излома наблюдается концентра-



*a*



*б*



*в*

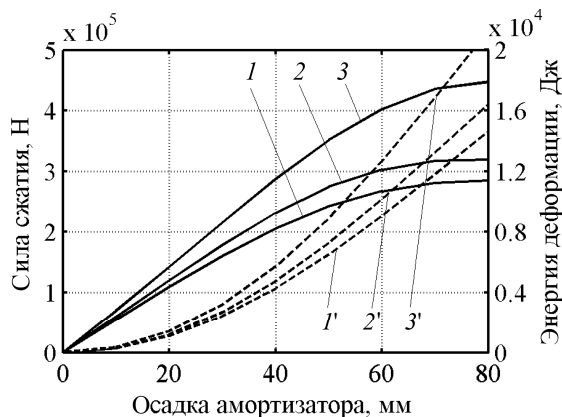
**Рис. 5. Контуры истинных нормальных напряжений в плоскости симметрии сектора:**

*a* — осевые напряжения  $\sigma_z$ ; *б* — радиальные напряжения  $\sigma_r$ ; *в* — окружные напряжения  $\sigma_t$ . Жирными линиями показаны контуры нулевых значений

ция напряжений. Однако напряжения остаются значительно ниже предела прочности.

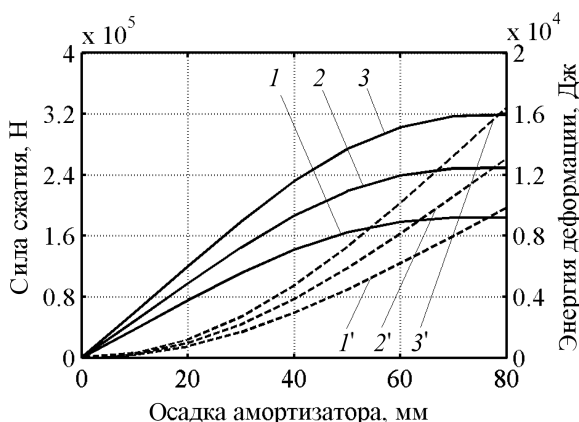
Наличие излома между конической и цилиндрической частями амортизатора является его важной конструктивной особенностью. Этот излом предопределяет характер деформации амортизатора при достижении предельной нагрузки. Изменяя угол подъема конуса  $\alpha$ ,

но оставаясь при этом в рамках заданных габаритных размеров, можно существенно изменять жесткость и энергоемкость амортизатора. На рис. 6 показаны нагрузочные характеристики и графики накопления упругой энергии в зависимости от осадки для амортизаторов с различными углами подъема.



**Рис. 6.** Нагрузочные характеристики амортизаторов с углом подъема конуса  $\alpha = 70^\circ$  (1);  $75^\circ$  (2);  $80^\circ$  (3) соответственно. Кривые 1', 2', 3' — графики накопления энергии деформации

Протяженность сектора в окружном направлении также является параметром, с помощью которого можно заметно влиять на жесткость амортизатора без изменения его габаритов. С увеличением угла сектора  $\varphi$  и, следовательно, площади поперечного сечения повышается жесткость амортизатора. Влияние угла сектора  $\varphi$  можно установить из нагрузочных характеристик (рис. 7).



**Рис. 7.** Нагрузочные характеристики амортизаторов с углом сектора  $\varphi = 70^\circ$  (1);  $90^\circ$  (2);  $110^\circ$  (3) соответственно. Кривые 1', 2', 3' — графики накопления энергии деформации

Выполненные расчеты показывают широкие возможности целенаправленного изменения характеристик амортизаторов. Исследуемые амортизаторы имеют мягкую нагрузочную характеристику с переходом к падающему участку, благодаря чему применение амортизаторов в условиях интенсивных динамических нагрузок становится эффективным. Однако требуется отдельно изучить вопрос влияния скорости нагружения на характеристики амортизаторов.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Голованов А.И., Султанов Л.У. Математические модели вычислительной нелинейной механики деформируемых тел. – Казань: Казанский гос. ун-т, 2009. – 465 с.
2. Bathе К.Ј. Finite Element Procedures. – Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1996. – 1036 p.
3. Бидерман В.Л. Вопросы расчета резиновых деталей // Расчеты на прочность: сб. ст. – М.: МАШГИЗ. – 1958. – Вып. 3. – С. 40–87.

Статья поступила в редакцию 28.09.2012