

Графическое отображение сплайнов в системах геометрического моделирования элементов конструкции летательных аппаратов

© П.М. Николаев¹, А.В. Егоров²

¹ООО «НТЦ ГЕММА», г. Жуковский, 140180, Российская Федерация

²МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Российская Федерация

Представлен алгоритм отображения криволинейных обводов летательных аппаратов на экране компьютера с максимальной точностью, соответствующей разрешению графического экрана и текущему ракурсу модели. Алгоритм, работающий в составе систем проектирования, конструирования и производства летательных аппаратов, позволяет выводить сплайны на графическое устройство в виде аппроксимирующей ломаной линии. При этом расчет отрезков аппроксимации выполняется в реальном масштабе времени. Реализация алгоритма представлена на примере составной кривой Безье третьей степени. Описанный подход может быть также применен к кривым в виде В-сплайнов и NURBS. Аппроксимация сегмента кривой Безье последовательностью отрезков выполняется путем рекурсивного деления сегмента на две части с помощью алгоритма Де-Кастильо. Процесс деления сегментов завершается при достижении заданной точности максимального расстояния от аппроксимирующего отрезка до кривой в проекции на плоскость экрана. Точность определяется размером пиксела экрана. Приведены рекомендации по дальнейшему ускорению выполнения приведенного алгоритма при его практической реализации (габаритные тесты и запоминание рассчитанных аппроксимирующих отрезков).

Ключевые слова: сплайны, визуализация, аппроксимация, геометрическое моделирование

Введение. На современных предприятиях авиастроительной отрасли повсеместно используются различные системы автоматизации проектирования, конструирования и производства летательных аппаратов — САПР специализированного и общего назначения. В основе таких систем, как правило, лежит математическое ядро, обеспечивающее работу с цифровым представлением объекта исследования — проектируемого летательного аппарата или его аэродинамической модели. Для математического описания формы изделия используются различные геометрические объекты — отрезки, дуги, сплайны, поверхности. Для описания криволинейных объектов, например, внешних обводов летательного аппарата, наиболее часто применяют сплайны — кривые и поверхности, позволяющие с помощью ограниченного набора данных представить форму объекта наглядным и интуитивно понятным способом. Основой математического построения формы аэродинамических поверхностей являются линии каркаса [1, 2].

Наибольшее распространение в системах геометрического моделирования для САПР в авиационной отрасли получили описания в виде В-сплайнов и кривых Безье. Аппарат В-сплайнов представляется хорошо разработанным и имеет множество реализаций в виде программных библиотек общего и специализированного назначения [3–6].

При моделировании объектов одним из основных отличительных свойств, имеющихся у сплайнов, является возможность создания кривых любой степени гладкости, что особенно актуально для изделий авиастроения, где обеспечение непрерывности касательной и кривизны при проектировании внешних обводов является обязательным требованием, предъявляемым специалистами по аэродинамике летательных аппаратов [7]. При соблюдении ряда условий (отсутствие кратных узлов и сдвоенных точек контрольного каркаса) можно получить кривую с непрерывной производной требуемого порядка.

Таким образом, сам факт использования сплайнов для моделирования внешних обводов летательных аппаратов или их аэродинамических моделей позволяет обеспечить заданную степень гладкости. Тем не менее остается задача отображения цифрового представления модели на экране компьютера. В настоящее время для отображения геометрических объектов сложной формы наиболее часто применяют высокопроизводительные программные графические библиотеки OpenGL [8], DirectX [9] и др.; в системах САПР чаще других — OpenGL. Выбор данного средства отображения геометрической информации обусловлен его широким распространением в среде разработчиков графических систем, активной поддержкой со стороны производителей современного компьютерного оборудования (компьютерных видеокарт, графических ускорителей), а также независимостью от операционной системы. Библиотека OpenGL характеризуется высокой скоростью отображения информации благодаря использованию аппаратных возможностей компьютерных видеосистем. Универсальность средств, предоставляемых данной библиотекой, сделало ее базовой графической системой для большинства современных систем САПР.

В указанных (а также в других) графических библиотеках, как правило, нет встроеной реализации отображения криволинейных объектов, таких как сплайны. В основном, данные библиотеки могут выводить на экран простейшие геометрические объекты: точки, отрезки, треугольники с заданным распределением их тонового заполнения. Поэтому в прикладных системах САПР для отображения сплайнов используют различные способы линейной аппроксимации — разбивают сплайн на последовательность отрезков для их дальнейшего вывода на экран компьютера. Чем выше будет точность аппроксимации, тем более гладко будет выглядеть изображение сплайна. В ряде случаев такого подхода достаточно. Однако для

авиастроительных САПР при проектировании формы изделия желательно иметь наиболее точный образ изделия на экране — представление сплайна с учетом разрешения экрана в текущих настройках масштаба и ракурса отображения детали. При этом выполнять более точно линейную аппроксимацию уже не нужно для экономии вычислительных ресурсов. Пример отображения аэродинамического профиля путем предварительной линейной аппроксимации с заданной точностью представлен на рис. 1. Кривая на рис. 1, *а*, представляется достаточно гладкой. Однако при увеличении масштаба отображения (рис. 1, *б*) в носике профиля становится видимой линейная структура аппроксимированной кривой.

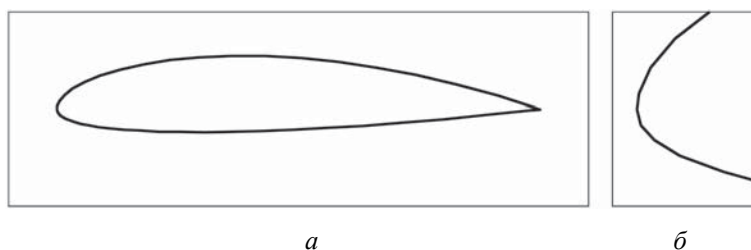


Рис. 1. Отображение сплайна с использованием линейной аппроксимации

В результате возникает задача отобразить кривую на экране с максимально возможной и при этом достаточной точностью. Один из способов её решения представлен в данной статье.

Постановка задачи. Задача ставится следующим образом. Имеется сплайн-кривая, заданная в параметрическом виде $\mathbf{r}(t)$, $t_{\min} \leq t \leq t_{\max}$, где $\mathbf{r}$ — радиус-вектор точки на кривой (рис. 2) в модельной системе координат.

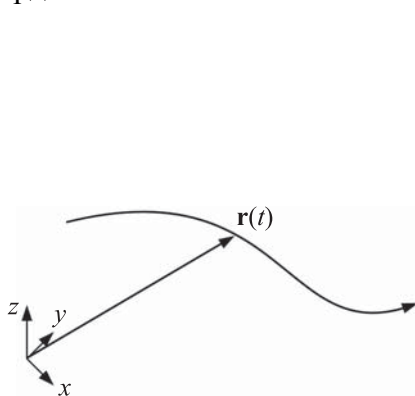


Рис. 2. Параметрическая сплайн-кривая

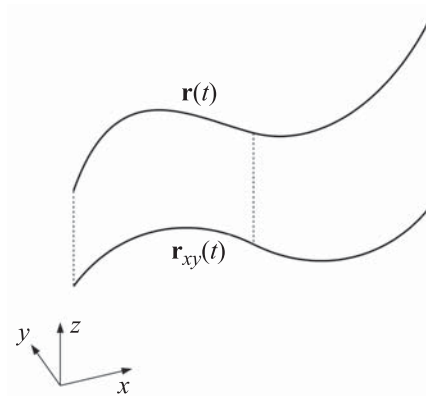


Рис. 3. Проекция кривой на плоскость экрана

При отображении кривая $\mathbf{r}(t)$ проецируется на плоскость графического окна (экрана компьютера) в соответствии с заданной матрицей преобразования (определяющей ракурс и масштаб отображения) из

модельной системы координат в систему координат экрана. На рис. 3 плоскости экрана соответствует плоскость XY , $\mathbf{r}_{xy}(t)$ — спроецированная на эту плоскость кривая.

Экран характеризуется своим разрешением (количеством пикселей по горизонтали и вертикали). Требуется разбить заданную кривую на последовательные отрезки таким образом, чтобы после проецирования на плоскость экрана максимальное расстояние s от спроецированной кривой $\mathbf{r}_{xy}(t)$ до соответствующих отрезков аппроксимирующей его ломаной не превосходило размера одного пиксела экрана d (рис. 4). Следует отметить, что в модельной системе координаты задаются числами с плавающей точкой, а в системе координат экрана — целыми числами. Размер пиксела в системе координат экрана равен единице и условием по точности становится $s \leq 1$. В результате такого разбиения должен получиться упорядоченный по длине кривой набор значений параметра t_i : $[t_0 = t_{\min}, t_1, t_2, \dots, t_n = t_{\max}]$. Данный набор значений соответствует точкам на сплайне $\mathbf{r}(t_i)$, которые отображаются средствами используемой графической библиотеки, например OpenGL.

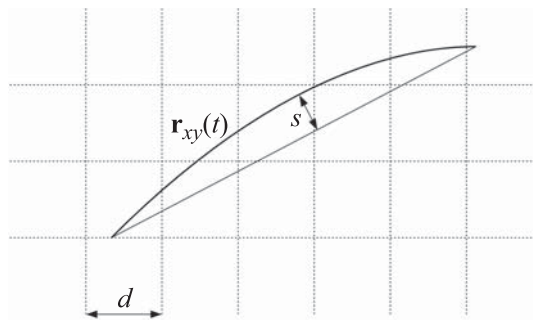


Рис. 4. Точность линейной аппроксимации в плоскости экрана

Описание алгоритма линейной аппроксимации. При описании алгоритма решения поставленной задачи используем сплайн в виде составной кривой Безье третьей степени. Третья степень является необходимым минимальным условием возможности построения составной кривой с непрерывной кривизной и касательной для выполнения требований по гладкости в авиа- и судостроительных приложениях. Представленный далее алгоритм может быть обобщен на произвольный тип сплайнов — В-сплайны, NURBS.

Сегмент кривой Безье задается с помощью характеристической ломаной, которая определяется точками положения $\mathbf{P}^i$ его вершин (рис. 5) [3–6]. Форма ломаной дает представление о форме соответствующего сегмента кривой, что послужило причиной популярности данного представления в среде разработчиков САПР.

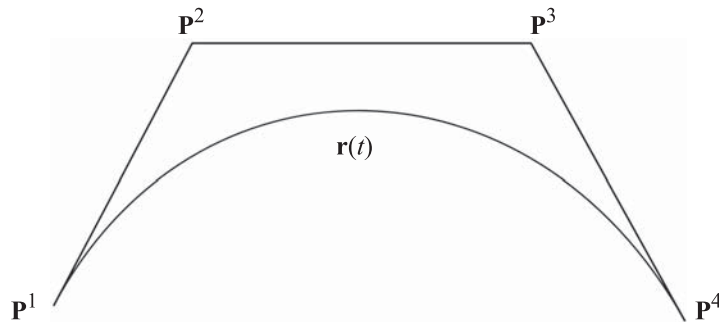


Рис. 5. Сегмент кривой Безье третьей степени

Математическое параметрическое описание сегмента кривой Безье третьей степени имеет вид

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{P}^1(1 - t)^3 + 3\mathbf{P}^2t(1 - t)^2 + 3\mathbf{P}^3t^2(1 - t) + \mathbf{P}^4t^3, \\ 0 \leq t \leq 1.$$

Рассмотрим последовательно шаги алгоритма разбиения сегмента кривой Безье на аппроксимирующие отрезки.

Трехмерная кривая Безье, заданная точками характеристической ломаной $\mathbf{P}^i$ ($i = 1, 2, 3, 4$), проецируется на плоскость графического окна (экрана компьютера). На рис. 6 плоскость экрана задана плоскостью XY . В результате проецирования получается кривая $\mathbf{r}_{xy}(t)$, заданная точками $\mathbf{P}_{xy}^i$, лежащими в плоскости экрана (XY). Данная кривая будет использоваться для определения точек разбиения на последовательность отрезков.

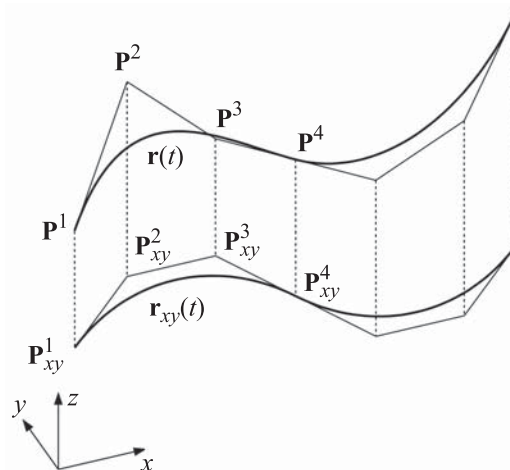


Рис. 6. Проекция характеристической ломаной на плоскость экрана

В процедуре разбиения плоской кривой, заданной точками $\mathbf{P}_{xy}^i$, воспользуемся свойством выпуклой оболочки сегмента Безье, согласно которому все точки плоской кривой лежат внутри выпуклого многоугольника, заданного вершинами характеристической ломаной [3]. Из этого следует, что расстояние s от любой точки кривой $\mathbf{r}_{xy}(t)$ до отрезка, соединяющего две крайние точки ($\mathbf{P}_{xy}^1$ и $\mathbf{P}_{xy}^4$), будет меньше, чем максимальное из расстояний $s_{\max} = \max(s^2, s^3)$ от данного отрезка до промежуточных точек $\mathbf{P}_{xy}^2$ и $\mathbf{P}_{xy}^3$ (рис. 7). Таким образом, если сегмент кривой Безье будет мал настолько, что величина $s_{\max}$ станет меньше заданного размера пикселя, то данный сегмент кривой можно отобразить отрезком, соединяющим его крайние точки $\mathbf{P}_{xy}^1$ и $\mathbf{P}_{xy}^4$.

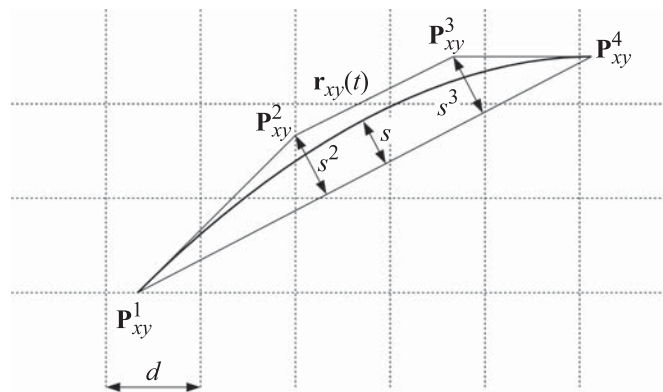


Рис. 7. Критерий точности линейной аппроксимации сегмента Безье

Для получения сегмента кривой достаточно малого размера можно воспользоваться алгоритмом Де-Кастильо, с помощью которого разбить сегмент на два [6]. Алгоритм Де-Кастильо характеризуется низкими вычислительными затратами вследствие использования только операций сложения и умножения. В данном алгоритме исходный сегмент кривой разбивается на два сегмента с помощью простого деления в требуемой пропорции (в данном случае 0,5) отрезков характеристической ломаной кривой Безье (рис. 8).

Процесс деления продолжается рекурсивно до тех пор, пока расстояние от внутренних точек ($\mathbf{P}_{xy}^2, \mathbf{P}_{xy}^3$) характеристической ломаной до отрезка, соединяющего крайние точки ($\mathbf{P}_{xy}^1, \mathbf{P}_{xy}^4$) не станет меньше размера одного пикселя графического экрана (см. рис. 7). Сегмент, полученный в результате последнего деления кривой, запоминается, и операция продолжается на следующем сегменте.

В данном процессе вместе с делением спроецированной на плоскость экрана кривой выполняется соответствующее деление трехмерной кривой. При этом полученные в результате деления крайние

точки трехмерной кривой для каждого сегмента (P^1 и P^4) используются для непосредственного отображения как входные данные для графической библиотеки (например OpenGL).

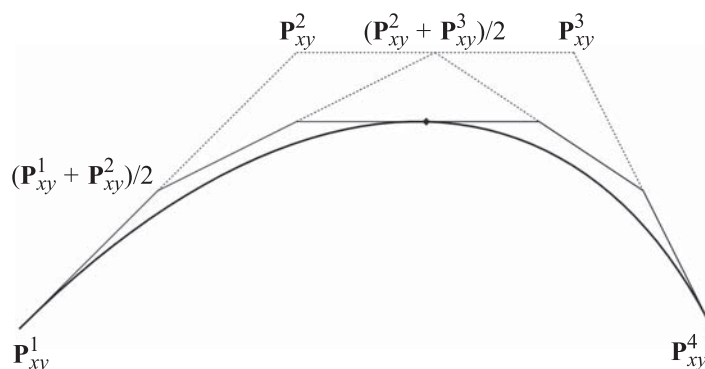


Рис. 8. Алгоритм Де-Кастильо

Таким образом, сплайны отображаются с максимальной необходимой степенью точности вне зависимости от текущего ракурса отображения и разрешения экрана компьютера.

Рекомендации по дополнительному ускорению работы алгоритма линейной аппроксимации. Представленный алгоритм позволяет выводить сплайн на экран компьютера средствами современных графических библиотек в реальном масштабе времени с максимальной необходимой точностью, определяемой текущим ракурсом отображаемой сцены и разрешением дисплея.

Для дальнейшего ускорения вывода графической информации и сокращения вычислительных ресурсов на ее подготовку можно предложить несколько дополнительных способов модификации предложенного алгоритма.

Во-первых, следует отметить, что при реальном выводе на экран компьютера графическая информация обычно составляет только некоторую часть всей математической модели. При этом, когда необходимо отобразить всю модель одновременно, относительная точность аппроксимации, обусловленная отношением разрешения экрана и размера модели, невысока. Иными словами, в результате разбиения сплайнов получается мало отрезков. В случае увеличения масштаба отображения (оператор детально рассматривает отдельную зону модели) на экране отображается только его часть. Чем больше увеличение и, соответственно, больше степень разбиения сплайнов на отрезки для их точного отображения, тем меньшее число сплайнов попадает в область изображения экрана (рис. 9). Поэтому при графическом отображении модели имеет смысл аппроксимировать и вывести только те ее части, которые реально попадают в область экрана.

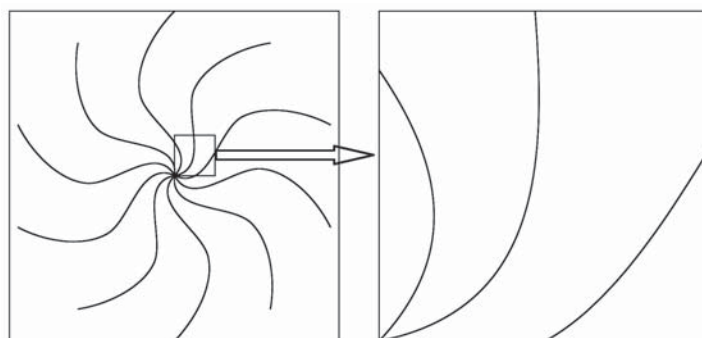


Рис. 9. Детализация при разных масштабах сцены

Такая операция выполняется посредством стандартной габаритной проверки.

Во-вторых, в процессе отображения модели ракурс при выводе графической информации на экран не всегда меняется. Например, графическое ядро операционной системы Windows устроено таким образом, что выполняется перерисовка сцены в окне отображения приложения всякий раз, когда происходит ее перекрытие окном другого приложения. В этом случае условия отображения (ракурс и масштаб) не меняются, и нет смысла выполнять повторную аппроксимацию сплайнов для их отображения. В этом случае можно запоминать рассчитанную информацию о разбиении сплайна и использовать ее напрямую для вывода на экран.

Заключение. Заданная степень гладкости — непрерывность вектора касательной и кривизны — является одним из необходимых условий, предъявляемых специалистами по аэродинамике к внешним обводам цифровых моделей летательных аппаратов. Применение параметрических сплайнов для моделирования внешних обводов летательных аппаратов или их аэродинамических моделей в современных системах автоматизированного проектирования (САПР) позволяет обеспечить заданную степень гладкости. Несмотря на развитый аппарат для работы со сплайнами, имеющийся в современных САПР, в настоящее время отсутствуют универсальные программные реализации, позволяющие отображать сплайновые кривые на экране компьютера с максимально возможной точностью, определяемой ракурсом отображения модели и разрешением экрана. Как правило, для этой цели сплайн предварительно преобразуют в ломаную линию, аппроксимирующую его с заданной точностью. Такой подход не дает полной объективной информации о реальной форме моделируемого обвода. Представленный в работе алгоритм линейной аппроксимации решает данную проблему. При этом отображение текущей сцены на экране происходит в реальном масштабе времени. Данное свойство позволяет использовать алгоритм для точного отображения формы

сплайнов, моделирующих обводы аэродинамических поверхностей, что улучшает качество восприятия при их оценке специалистом-проектировщиком и, соответственно, повышает степень объективности при визуальном анализе формы моделируемых агрегатов.

В завершении отметим, что представленный алгоритм реализован и используется для отображения сплайнов в отечественной системе САПР — ГеММа-3D [10], успешно эксплуатируемой в ряде предприятий авиационной отрасли, где показал свою полную работоспособность.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Тузов А.Д., Кил Ин Гю. Методика автоматизированного проектирования контуров сложных поверхностей ЛА с использованием сетки плоских сечений. *Прикладная геометрия: электронный журнал*, 2009, вып. 11, № 22, с. 127–142.
- [2] Осипов В.А. *Машинные методы проектирования непрерывно-каркасных поверхностей*. Москва, Машиностроение, 1979, 248 с.
- [3] Роджерс Д., Адамс Д. *Математические основы машинной графики*. Москва, Мир, 2001, 606 с.
- [4] Фокс А., Пратт М. *Вычислительная геометрия, применение в проектировании и на производстве*. Москва, Мир, 1982, 304 с.
- [5] Farin G. *Curves and surfaces for CAGD*. San Francisco, Morgan Kaufmann, 2002, 449 p.
- [6] Безье П. *Геометрические методы. Математика и САПР*. Т. 2. Москва, Мир, 1989, 264 с.
- [7] Вермель В.Д., Казимирова А.Н., Зиняев В.В., Качарава И.Н., Ларютина М.А., Николаев П.М., Шардин А.О. Выполнение требований к точности и качеству обводообразующих поверхностей агрегатов аэродинамических моделей летательных аппаратов, изготавливаемых в автоматизированных производственных технологиях. *Автоматизация в промышленности*, 2024, № 4, с. 30–36.
- [8] Minshui A., Gaster B., Mattson T., Fung J., Ginsburg D. *OpenCL programming guide*. Boston, Pearson education, Inc, 2012, 603 p.
- [9] Luna F. *Introduction to 3D Game Programming with DirectX 12*. Mercury Learning and Information, 2016, 900 p.
- [10] НТЦ ГеММа — разработчик программного обеспечения для эффективного управления обработкой на станках с ЧПУ. URL: <https://www.gemma.ru>

Статья поступила в редакцию 21.03.2026

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Николаев П.М., Егоров А.В. Графическое отображение сплайнов в системах геометрического моделирования элементов конструкции летательных аппаратов. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2026, вып. 6. EDN WNRXQB

Николаев Прокопий Михайлович — д-р техн. наук, ведущий научный сотрудник ООО «НТЦ ГЕММА». Область деятельности и научных интересов: прикладная вычислительная геометрия и компьютерная графика. e-mail: geom3d@geom3d.com

Егоров Антон Витальевич — д-р техн. наук, доцент по специальности 2.5.13, профессор кафедры «Космические аппараты и ракеты-носители», МГТУ им. Н.Э. Баумана. e-mail: av_egorov@bmstu.ru

Spline Rendering in Systems for Geometric Modeling of Aircraft Design Elements

© P.M. Nikolaev¹, A.V. Egorov²

¹NTC GEMMA LLC, Zhukovsky, 140180, Russian Federation.

²Bauman Moscow State Technical University, Moscow, 105005, Russian Federation

An algorithm for rendering aircraft curved lines on a computer screen with maximum accuracy, corresponding to the graphics display resolution and the current model angle, is presented. The algorithm, which operates within aircraft design, engineering, and manufacturing systems, enables splines to be displayed on a graphics device as an approximating polyline. The approximation segments are calculated in real time. The algorithm is implemented using a compound cubic Bezier curve as an example. The described approach can also be applied to B-spline and NURBS curves. Approximation of a Bezier curve by a sequence of segments is performed by recursively dividing the segment into two parts using the De-Castillo algorithm. Completion of the segments subdivision process is determined by achieving a specified accuracy of the maximum distance from the approximating line to the curve as projected onto the screen plane. The accuracy is determined by the screen pixel size. In conclusion, recommendations are provided for further acceleration of the presented algorithm during its practical implementation, including bound tests and storing the calculated approximating segments.

Keywords: *splines, visualization, approximation, geometric modeling*

REFERENCES

- [1] Tuzov A.D., Kil In Gyu. Metodika avtomatizirovannogo proektirovaniya konturov slozhnykh poverkhnostey LA s ispolzovaniem setki ploskikh secheniy [Method for automated design of contours of complex aircraft surfaces using a grid of plane sections]. *Prikladnaya geometriya: elektronny zhurnal — Applied Geometry: Electronic Journal*, 2009, iss. 11, no. 22, pp. 127–142. Available at: <http://www.mai.ru/~apg/Volume11/Number22/tuzv1122.pdf> (accessed March 2, 2026).
- [2] Osipov V.A. *Mashinnye metody proektirovaniya nepreryvno-karkasnykh poverkhnostey* [Machine methods for designing continuously framed surfaces]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1979, 248 p.
- [3] Rogers D., Adams D. *Mathematical Foundations of Computer Graphics*. New York, McGraw-Hill, 1989 [In Russ.: Rogers D., Adams D. Matematicheskie osnovy mashinnoy grafiki. Moscow, Mir Publ., 2001, 606 p.].
- [4] Fox A., Pratt M. *Computational Geometry: Applications in Design and Manufacturing*. Englewood Cliffs, Prentice-Hall, 1985 [In Russ.: Fox A., Pratt M. Vychislitelnaya geometriya, primeneniye v proektirovanii i na proizvodstve. Moscow, Mir Publ., 1982, 304 p.].
- [5] Farin G. *Curves and surfaces for CAGD*. San Francisco, Morgan Kaufmann, 2002, 449 p.
- [6] Bézier P. *Geometric Methods. Mathematics and CAD*. Vol. 2. Paris, Dunod, 1986 [In Russ.: Bézier P. Geometricheskie metody. Matematika i SAPR. Vol. 2. Moscow, Mir Publ., 1989, 264 p.].
- [7] Vermel V.D., Kazimirova A.N., Zinyaev V.V., Kacharava I.N., Laryutina M.A., Nikolaev P.M., Shardin A.O. Vypolneniye trebovaniy k tochnosti i kachestvu obvodobrazuyuschikh poverkhnostey agregatov aerodinamicheskikh modeley le-

- tatelnykh apparatov, izgotavlivaemykh v avtomatizirovannykh proizvodstvennykh tekhnologiyakh [Meeting the requirements for accuracy and quality of fairing surfaces of aircraft aerodynamic model assemblies manufactured using automated production technologies]. *Avtomatizatsiya v promyshlennosti — Automation in Industry*, 2024, no. 4, pp. 30–36.
- [8] Minshui A., Gaster B., Mattson T., Fung J., Ginsburg D. *OpenCL programming guide*. Boston, Pearson education, Inc, 2012, 603 p.
- [9] Luna F. *Introduction to 3D Game Programming with DirectX 12*. Mercury Learning and Information, 2016, 900 p.
- [10] *NTC GEMMA LLC — developer of software for efficient CNC machining process control*. Available at: <https://www.gemma.ru> (accessed March 2, 2026).

Nikolaev P.M., Dr. Sc. (Eng.), leading research fellow NTC GEMMA. Area of activity and scientific interests: applied computational geometry and computer graphics.
e-mail: geom3d@geom3d.com

Egorov A.V., Dr. Sc. (Eng.), Professor, Department of Spacecraft and Launch Vehicles, Bauman Moscow State Technical University. e-mail: av_egorov@bmstu.ru