

## Методика расчетно-экспериментальной оценки параметров деформирования резиновых ударников

© Д.П. Левин, А.В. Петюков, А.Э. Кудрявский

МГТУ им. Н. Э. Баумана, Москва, 105005, Российская Федерация

*Рассмотрена задача определения равновесных кривых «инженерное напряжение — инженерная деформация» для эластомеров при их динамическом нагружении в процессе ударного взаимодействия с недеформируемой стенкой. Для построения этой кривой необходимо определить параметры деформирования кинетических элементов с учетом их твердости и скорости при динамическом нагружении, но методики оценки этих параметров не существует. На основе более чем 80 экспериментов по обстрелу недеформируемой стенки резиновым кинетическим элементом, предложена методика расчетно-экспериментальной оценки параметров деформирования резиновых ударников разной твердости в диапазоне скоростей 10–120 м/с, характерных для поражающих элементов специальных средств нелетального кинетического действия. После проверки численной методики на сходимость решения проведено моделирование процесса взаимодействия резинового ударника с недеформируемой стенкой с использованием упрощенной модели резины. Осуществлен подбор равновесных кривых «инженерное напряжение — инженерная деформация» на основе экспериментально определенных параметров для ударников твердостью 55А и 80А по Шору сеточным и бессеточным методом с целью дальнейшего использования в численном моделировании ударного взаимодействия кинетических элементов с конечно-элементными моделями антропоморфных манекенов.*

**Ключевые слова:** кривая «инженерное напряжение — инженерная деформация» эластомеров, оружие нелетального действия, численное моделирование, кинетический элемент, резина, ударник, шар

**Введение.** Основная проблема при проектировании поражающих элементов специальных средств нелетального кинетического действия — выбор конструкции и материалов кинетического элемента для получения при ударе по цели травмы определенной степени тяжести [1–3]. Результаты испытаний опытных образцов на лабораторных животных, безусловно, позволяют сделать общий вывод о травмирующем действии, однако это достаточно длительный и дорогостоящий процесс. Кроме того, получить в рамках таких испытаний характеристики соударения, необходимые для определения общепринятых критериев травмы, к примеру, вязкостного критерия (VC) [4, 5] или критерия для оценки травмы головы (НІС) [6, 7], весьма сложно, а также требуется специфическое оборудование [8]. В России не используются биодоверные механические манекены, разработанные за рубежом (см. например, NATO STANDARD AEP-99 Thorax injury risk assessment of non-lethal projectiles. Edition B, Version 1, July 2021), а для их разработки «с нуля» потребуются огромные временные и денежные ресурсы.

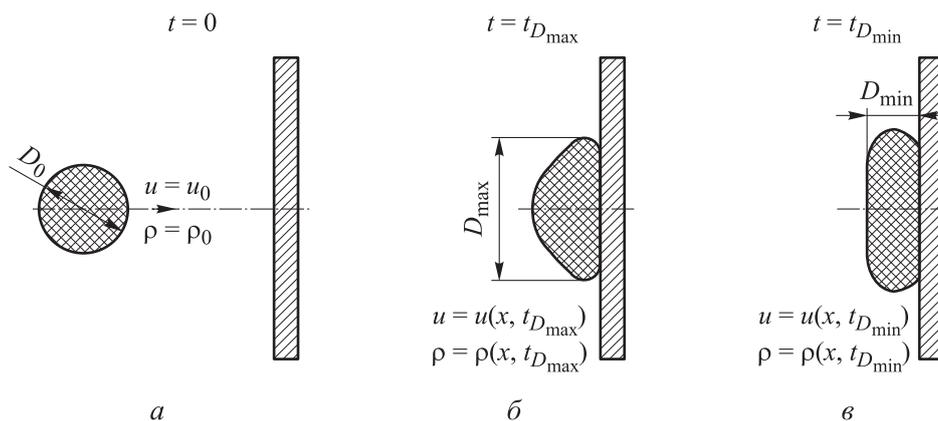
Альтернативой приведенному выше решению является численное моделирование процесса ударного взаимодействия кинетического элемента с конечно-элементными моделями биообъектов, частично, но подробно [9–16], или полностью, но упрощенно [17] описывающими тело человека. Основная проблема при использовании этого подхода — определение модели материала ударника, которая должна удовлетворительно описывать напряженно-деформированное состояние, характерное для динамического нагружения при ударе как при нагрузке, так и при разгрузке материала.

В коммерческом программном пакете LS-DYNA представлено 15 вариантов моделей материалов, которыми можно описывать поведение эластомеров. К примеру, авторы статьи [18] в своем исследовании применяли обобщенную модель сверхупругого материала. В ней для непосредственного описания поведения эластомера нужно указать до шести безразмерных констант материала, для определения которых необходимо наличие экспериментальной зависимости «напряжение — деформация», получаемой при испытаниях на одноосное растяжение резинового образца. От количества вводимых констант материала зависит то, какая конкретно модель материала будет использоваться при расчете. Например, если указать всего две константы, то материал будет вести себя согласно модели Муни — Ривлина [19, 20]. В исследованиях о взаимодействии резиновых нелетальных кинетических элементов с грудной клеткой [21] или головой [22] авторы в численном моделировании пользовались упрощенной моделью резины, в которой имеется возможность собственноручно по координатам задать кривую «напряжение — деформация» без проведения эксперимента.

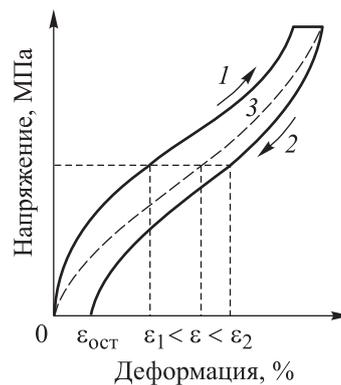
Как следует из примеров в рассмотренных работах в моделировании эластомеров при ударном взаимодействии прямо или косвенно использовалась кривая «напряжение — деформация», однако источник ее получения ни в одной из этих работ не был указан. Если эта кривая была получена при статических испытаниях на одноосное растяжение образца, то правомерность ее использования в моделировании ударного взаимодействия вызывает вопрос. Если она получена при динамических испытаниях, например, аналогичных тесту Тейлора [23], но для резиновых образцов, то не приведено никаких ссылок на их проведение, в которых данная кривая была бы получена. Конечно, существуют методы динамических испытаний резины (например, ГОСТ 23326–78), из которых можно определить упруго-гистерезисные характеристики, например, динамический модуль упругости, угол сдвига фаз, величину относительного гистерезиса, модуль внутреннего трения и т. п., но не конкретный вид кривой «напряжение — деформация». Для построения этой кривой необходимо определить параметры деформирования ударников с учетом их твердости и скорости при динамическом нагружении.

Цель данной работы — разработка методики расчетно-экспериментальной оценки параметров деформирования резиновых ударников различной твердости в диапазоне скоростей, характерных для поражающих элементов специальных средств нелетального кинетического действия.

**Формулировка физико-математической модели.** Процесс деформирования резинового ударника в форме шара при его ударном взаимодействии с недеформируемой неподвижной стенкой можно разделить на три характерных этапа (рис. 1). В начальный момент времени ударник диаметром  $D_0$  и плотностью  $\rho_0$  подлетает к стенке со скоростью  $u_0$  (рис. 1, а). После контакта со стенкой шар начинает деформироваться и по мере сжатия достигает максимального поперечного размера  $D_{\max}$  (рис. 1, б). Затем ударник начинает восстанавливать свой исходный поперечный размер, но при этом продолжает сжиматься в продольном направлении и достигает минимального продольного размера  $D_{\min}$  (рис. 1, в).



**Рис. 1.** Характерные этапы деформирования резинового ударника в форме шара при его ударном взаимодействии с недеформируемой стенкой: а — начальный момент времени ( $t = 0$ ); б — максимальный поперечный размер ударника ( $t = t_{D_{\max}}$ ); в — минимальный продольный размер ударника ( $t = t_{D_{\min}}$ ); г — вид зависимости напряжения от деформации для эластомеров (1 — кривая нагрузки, 2 — кривая разгрузки, 3 — равновесная кривая)



Замкнутая система исходных уравнений и соотношений, полностью описывающая движение и состояние сплошной среды с учетом физико-механических свойств представлена ниже. Она базируется на

законах сохранения массы, импульса и энергии (1)–(3). В эту систему также входят кинематические (4), (5) и геометрические (6) соотношения, а особенности сопротивления среды деформированию учитываются соотношениями, в общем виде задаваемые уравнением (7). В тензорных обозначениях она имеет вид

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla_i v^i = 0, \quad (1)$$

$$\rho \frac{dv_i}{dt} = \nabla_j \sigma_j^i, \quad (2)$$

$$\rho \frac{dE}{dt} = \sigma^{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}, \quad (3)$$

$$\frac{du_i}{dt} = v_i, \quad (4)$$

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2} (\nabla_i v_j + \nabla_j v_i), \quad (5)$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (\nabla_i u_j + \nabla_j u_i + \nabla_i u_k \nabla_j v^k), \quad (6)$$

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}(\varepsilon_{ij}), \quad (7)$$

где  $\rho$  — текущая плотность среды;  $t$  — время;  $v_i$  — компоненты вектора скорости индивидуальной частицы;  $\sigma_j^i$  — компоненты тензора напряжений;  $E$  — удельная (на единицу массы) внутренняя энергия;  $\dot{\varepsilon}_{ij}$  — компоненты тензора скоростей деформаций;  $u_i$  — компонента вектора перемещения индивидуальной частицы;  $\varepsilon_{ij}$  — компоненты тензора деформаций.

Начальные условия определяются путем задания в начальный момент времени распределений плотности и скорости, а компоненты тензоров напряжений и деформаций принимаются равными нулю.

Взаимодействие между ударником и недеформируемой стенкой реализовано с использованием штрафного контактного алгоритма, согласно которому при обнаружении факта проникания возникает штрафная сила отталкивания  $F$  между контактирующими ячейками. Эта сила, прямо пропорциональная глубине их взаимного проникания  $d$ , вычисляется по формуле

$$F = Kd, \quad (8)$$

где  $K$  — коэффициент пропорциональности (контактная жесткость);  $d$  — глубина проникания.

Контактная жесткость  $K$  вычисляется на основе вступающей в контакт узловой массы и общего размера шага по времени:

$$K = \alpha \frac{m}{\Delta t^2}, \quad (9)$$

где  $\alpha$  — эмпирический коэффициент;  $m$  — узловая масса;  $\Delta t$  — шаг интегрирования по времени.

Физико-математическая модель резины разной твердости задается через семейство кривых зависимости напряжений от меры деформации  $g_i(\lambda)$ . В данной работе кривая  $g(\lambda)$  подбиралась путем сравнения результатов численного моделирования с экспериментальными данными, полученными в лаборатории при обстреле недеформируемой стенки резиновыми ударниками различной твердости.

**Модель резины.** За меру деформации  $\lambda$  эластомеров обычно принимают отношение длины растянутого образца  $l$  к исходной длине  $l_0$ :

$$\lambda = l/l_0. \quad (10)$$

Отношение (10) называют кратностью растяжения (сжатия), а величины  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$ ,  $\lambda_3$  — главными кратностями растяжения (сжатия). Для цилиндрического образца диаметром  $d_0$ , высотой  $l_0$  с площадью поперечного сечения  $A_0$ , нагруженного осевой силой  $P$ :

$$g(\lambda) = \frac{P}{A_0}, \quad (11)$$

$$\lambda_1 = \frac{l}{l_0}, \quad (12)$$

$$\lambda_2 = \lambda_3 = \frac{d}{d_0}, \quad (13)$$

где  $l$  и  $d$  — текущее значение длины и диаметра образца соответственно; естественно, что при растяжении  $\lambda > 1$ , при сжатии —  $0 < \lambda < 1$ .

Для описания напряженно-деформированного состояния и динамики деформации ударника была использована упрощенная модель резины, реализованная в программе LS-DYNA. Данная модель материала представляет собой модель квазисверхупругой резины, которая определяется одной лишь кривой  $g(\lambda)$ , представляющей собой зависимость значения силы от фактического изменения длины образца (датчика). Кривая  $g(\lambda)$  получается непосредственно при испытаниях

на одноосное растяжение (ГОСТ 270–75) или сжатие (ГОСТ ISO 7743–2013). В LS-DYNA при определении модели материала необходимо задать кривую  $g(\lambda)$  в табличном виде. Если значения длины, ширины и толщины образца указать равными единице, то заданная в табличном виде кривая  $g(\lambda)$  будет представлять собой параметризованную через кратность растяжения (сжатия)  $\lambda$  зависимость «инженерное напряжение — инженерная деформация»  $\sigma_0(\varepsilon_0)$ :

$$g(\lambda) = \sigma_0(\lambda - 1), \quad (14)$$

где инженерное напряжение

$$\sigma_0 = \frac{P}{A_0}, \quad (15)$$

а инженерная деформация

$$\varepsilon_0 = \frac{l - l_0}{l_0}. \quad (16)$$

В задачах механики деформируемого твердого тела, характеризующих большими конечными деформациями (гиперупругие материалы), пользуются тензором напряжений Пиолы — Кирхгофа второго рода  $\mathbf{S}$ , который, по определению, вычисляется путем дифференцирования энергии деформации  $W$  по тензору деформаций Грина — Лагранжа  $\mathbf{E}$ :

$$\mathbf{S} = \frac{dW}{d\mathbf{E}}. \quad (18)$$

Соотношение (18), являющееся фундаментальным, задает определяющее соотношение гиперупругого материала в энергетической формулировке, где  $\mathbf{S}$  выступает термодинамически сопряженной (вытекает из первого и второго начал термодинамики) силовой мерой к  $\mathbf{E}$ .

Применительно к эластомерам главные компоненты  $S_i$  тензора напряжения Пиолы — Кирхгофа второго рода  $\mathbf{S}$  можно выразить через производную энергии деформации  $W$  по главным растяжениям  $\lambda_i$  [24]:

$$S_i = \frac{1}{\lambda_i} \frac{dW}{d\lambda_i}. \quad (19)$$

Главные компоненты  $\sigma_{ii}$  тензора напряжений Коши  $\boldsymbol{\sigma}$  определяют через главные компоненты  $S_i$  по формуле

$$\sigma_{ii} = \frac{\lambda_i^2 S_i}{J}, \quad (20)$$

где  $J$  — изменение относительного объема, которое вычисляется по формуле

$$J = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3. \quad (21)$$

Однако в контексте численных расчетов их целесообразно определять через главные компоненты упругой части  $\tau_{ii}^E$  тензора напряжений Кирхгофа  $\boldsymbol{\tau}$  для уменьшения вычислений и повышения стабильности и устойчивости:

$$\sigma_{ii} = \frac{\tau_{ii}^E}{J}. \quad (22)$$

При большом значении объемного модуля  $K_m$  (сверхупругая модель) главные компоненты упругой части  $\tau_{ii}^E$  тензора напряжений Кирхгофа  $\boldsymbol{\tau}$  вычисляются следующим образом:

$$\tau_{ii}^E = \lambda_i \frac{dW}{d\lambda_i} = f(\tilde{\lambda}_i) + K_m(J-1) - \frac{1}{3} \sum_{k=1}^3 f(\tilde{\lambda}_k), \quad (23)$$

где объемно-независимые главные кратности растяжений (сжатия)

$$\tilde{\lambda}_i = \frac{\lambda_i}{J^{1/3}}, \quad (24)$$

а функция градиента деформации  $f$  представлена в виде частичных сумм и остаточного члена (погрешности):

$$f(\lambda) = S_n(\lambda) + R_n(\lambda). \quad (25)$$

Здесь частичная сумма  $S_n(\lambda)$  порядка аппроксимации  $n$  (целое  $\geq 0$ ) определяется по формуле

$$S_n(\lambda) = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda^{a_k} g(\lambda^{a_k}), \quad a_k = \left(-\frac{1}{2}\right)^k, \quad (26)$$

где  $k$  — индекс суммирования (от 0 до  $n-1$ );  $a_k$  — показатель степени для аргумента  $\lambda$  функции  $g(\lambda)$ .

Остаточный член  $R_n(\lambda)$  порядка аппроксимации  $n$  (целое  $\geq 0$ ) определяется так:

$$R_n(\lambda) = f(\lambda^{a_n}), \quad a_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n, \quad (27)$$

где  $a_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n$  — показатель степени для аргумента  $\lambda$  функции  $f(\lambda)$ .

Таким образом, подставив (27) и (26) в (25), получим формулу для расчета функции градиента деформации  $f$ :

$$f(\lambda) = \lambda g(\lambda) + \lambda^{-\frac{1}{2}} g\left(\lambda^{-\frac{1}{2}}\right) + \lambda^{\frac{1}{4}} g\left(\lambda^{\frac{1}{4}}\right) + \dots + f\left(\lambda^{\left(-\frac{1}{2}\right)^n}\right). \quad (28)$$

Соотношение (28) при некотором  $n$  может быть определено (ряд сходится), поскольку остаточный член  $R_n(\lambda) = f(\lambda^{a_n}) \rightarrow 0$ , приближая функцию  $f$  к заданной точности.

При  $n \rightarrow \infty$  показатель степени  $a_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n \rightarrow 0$ , следовательно,

$\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda^{a_n} = \lambda^0 = 1$ . Это означает, что для любой кратности растяжения (сжатия) на бесконечно малых масштабах ( $n \rightarrow \infty$ ) материал практически не претерпевает деформации (локальная деформация  $\lambda \rightarrow 1$ ). Кратность растяжения (сжатия)  $\lambda = 1$  означает отсутствие деформации (при  $l = l_0$   $\lambda = \frac{l}{l_0} = 1$ ), а значит, и отсутствие напряжений. По-

скольку функция градиента деформации  $f$  является частью определяющего соотношения для расчета напряжений (23), условие отсутствия напряжений выражается следующим образом:

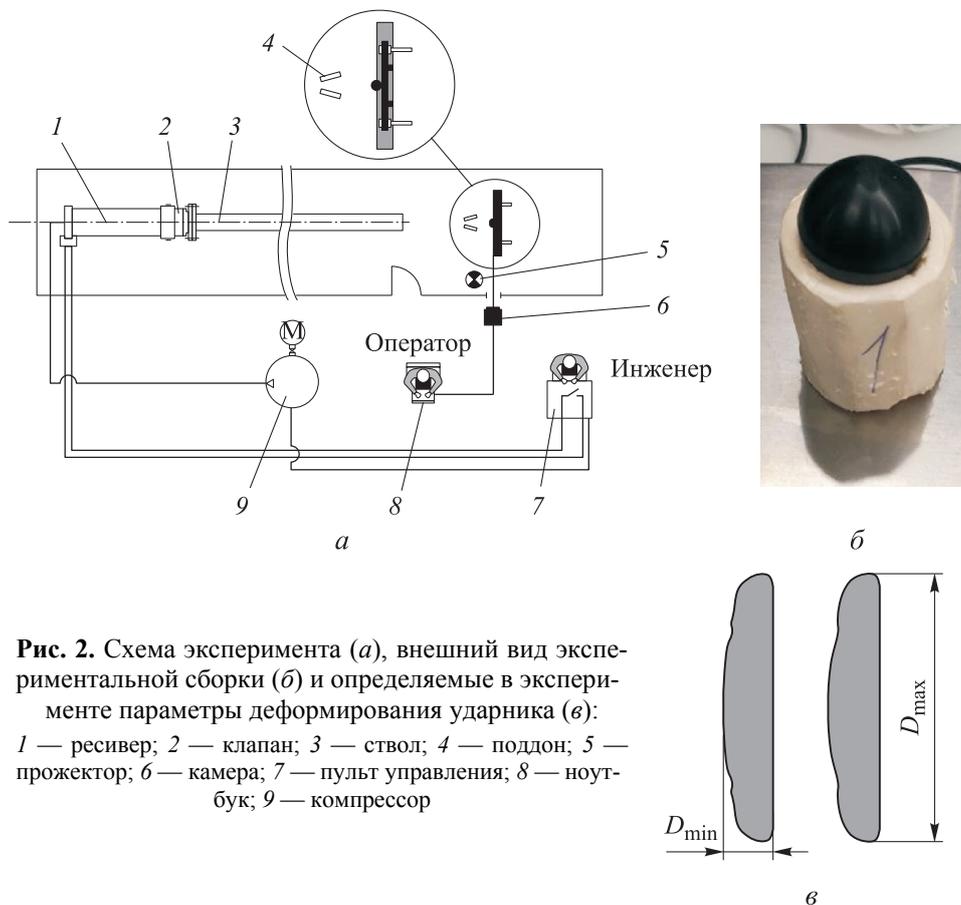
$$R_n(\lambda) = f(\lambda^{a_n}) = f(1) = 0.$$

Ряд  $S_n(\lambda)$  также сходится абсолютно для любого  $\lambda > 0$  по признаку сравнения (достаточное условие сходимости), потому что его члены мажорируются сходящейся убывающей геометрической прогрессией  $|\lambda^{a_k} g(\lambda^{a_k})| \leq c(1/2)^k$ . При порядке аппроксимации  $n = 10$  погрешность в определении  $f$  составляет менее 1 %.

Таким образом, алгоритм вычисления компонент тензора напряжений Коши можно представить следующим образом:

- задание кривой  $g(\lambda) = \sigma_0(\lambda - 1)$ , представляющей собой параметризованную через кратность растяжения (сжатия)  $\lambda$  зависимость «инженерное напряжение — инженерная деформация»  $\sigma_0(\varepsilon_0)$ ;
- вычисление функции градиента деформации  $f$ ;
- вычисление главных компонент упругой части  $\tau_{ii}^E$  тензора напряжений Кирхгофа  $\tau$ ;
- вычисление компонент тензора напряжений Коши  $\sigma$ .

**Постановка эксперимента и результаты.** Лабораторный стенд (рис. 2) представляет собой газовую баллистическую установку, оснащенную быстродействующим клапаном, ресивером и компрессором.



**Рис. 2.** Схема эксперимента (а), внешний вид экспериментальной сборки (б) и определяемые в эксперименте параметры деформирования ударника (в):

1 — ресивер; 2 — клапан; 3 — ствол; 4 — поддон; 5 — прожектор; 6 — камера; 7 — пульт управления; 8 — ноутбук; 9 — компрессор

В ствол лабораторной установки помещался резиновый шар в поддоне из экструзионного пенополистирола, диаметр шара был равен диаметру канала ствола. Для отделения от ударника после вылета из канала ствола использовался составной поддон из двух секторов с центральным каналом. Начальная скорость ударника регулировалась глубиной его заложения в канал ствола и давлением в ресивере. Мишень-стенка представляет собой пакет из двух стальных листов толщиной 6 мм, закрепленных на массивной станине, исключающей движение мишени. Процесс взаимодействия резинового шара со стенкой фиксировался съемкой высокоскоростной камерой Phantom v2512.

Для получения исходных данных для валидации численной модели использовались ударники диаметром 30 мм твердости 80А (резина марки 7В-14-1НТА, масса  $m = 20$  г), 65А (резина НО-68-1,  $m = 19,5$  г) и 55А (ИРП-1347,  $m = 17,1$  г) по Шору. Всего было проведено более 80 выстрелов в диапазонах скоростей 30...36 м/с, 43...48 м/с, 93...100 м/с, 120 м/с. Измерение скорости подлета ударника  $v_n$ , его максимального поперечного  $D_{\max}$  и минимального продольного  $D_{\min}$  размеров

в процессе взаимодействия с преградой проводилось с помощью программного обеспечения камеры.

Поскольку измеряемые характеристики имели случайный характер вследствие разброса рабочего давления в ресивере и множества других факторов, обработка результатов осуществлялась методами математической статистики. Результаты экспериментов и математические ожидания параметров при доверительной вероятности  $P = 0,95$  представлены на рис. 3.

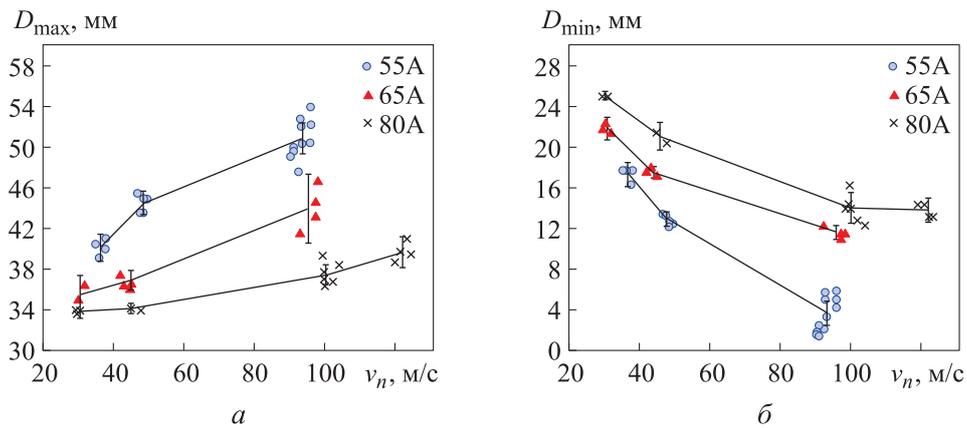
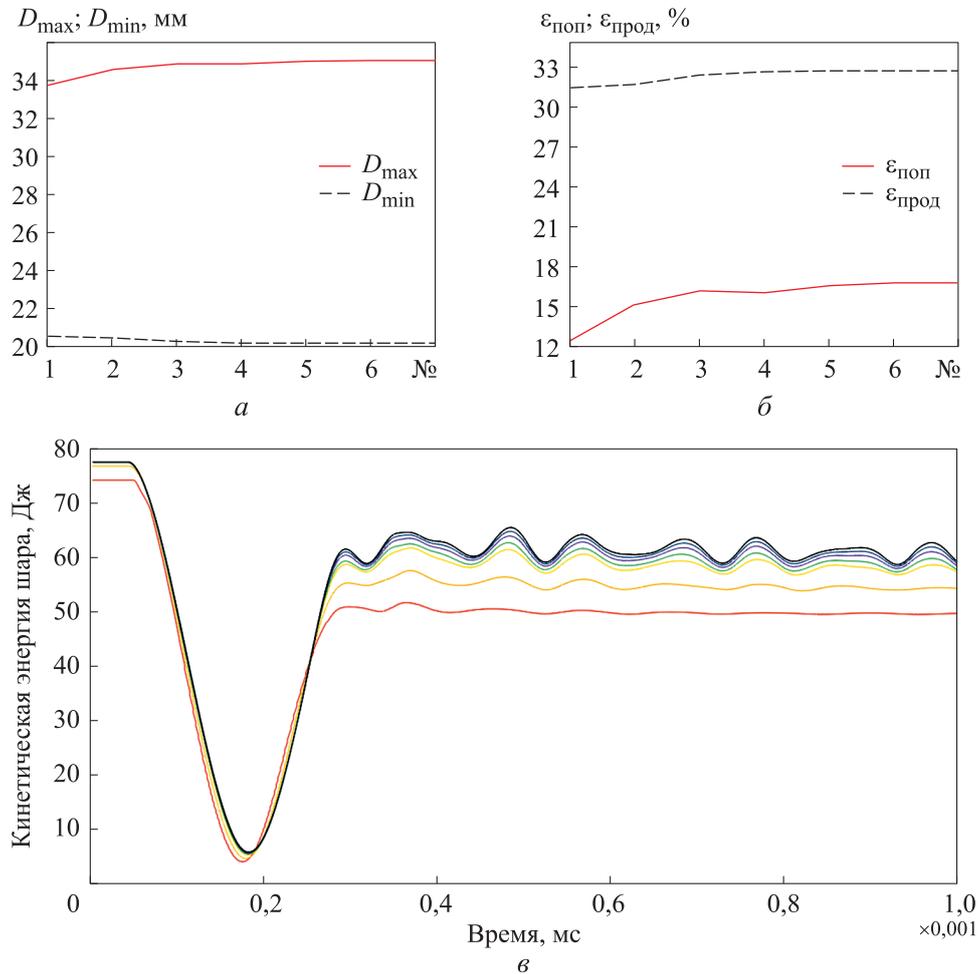


Рис. 3. Зависимость максимального поперечного размера ударника  $D_{\max}$  (а) и минимального продольного размера  $D_{\min}$  (б) от скорости подлета  $v_n$

**Сходимость численного решения.** Погрешности, связанные с дискретизацией, определялись путем сравнения численных решений на различных расчетных сетках с постепенным уменьшением размеров ячеек расчетной сетки. Для этой задачи в качестве ударника был взят резиновый шар со следующими параметрами: резина марки НПО-68-1, твердость резины по Шору 65А, диаметр ударника 30 мм, скорость подлета шара 87,3 м/с. Кривая  $g(\lambda)$ , определяющая его напряженно-деформированное состояние, была взята произвольно, но с учетом ее S-образного вида. Расчет был проведен для восьми различных расчетных сеток (в квадратных скобках указано количество элементов расчетной сетки на диаметр шара): № 1 [15], № 2 [30], № 3 [60], № 4 [75], № 5 [90], № 6 [105], № 7 [120]. Полученные результаты расчетов представлены на рис. 4.

На рисунке видно, что решение стремится к одному значению и практически не изменяется на сетках № 6 и № 7. При уменьшении размера ячейки так же проявляется волновой характер изменения кинетической энергии — качественно это объясняется тем, что шар во время полета после отскока продолжает восстанавливать свои исходные

размеры, и мелкая сетка способна уловить колебания размеров шара во время полета. Крупная сетка не сможет отразить релаксационные процессы в шаре, он сразу восстанавливает свои размеры.



**Рис. 4.** Изменение максимального поперечного размера  $D_{\max}$  и минимального продольного размера  $D_{\min}$  от порядкового номера (№) расчетной сетки (а), предельной поперечной деформации  $\varepsilon_{\text{поп}}$  и предельной продольной деформации  $\varepsilon_{\text{прод}}$  от порядкового номера расчетной сетки (б), кинетической энергии шара от времени  $E^{\text{кин}}(t)$  при разной плотности сетки (в)

Погрешность между результатами решений, полученных на расчетной сетке № 6 (время расчета примерно 1 ч 40 мин) и на расчетной сетке № 7 (время расчета примерно 2 ч 50 мин), ни по одному параметру не превышает 0,147 %. С учетом временных затрат на решение рациональным представляется выбор сетки № 6.

**Определение кривой «инженерное напряжение — инженерная деформация» в модели резины.** Описанная процедура представляет собой обратную задачу механики деформируемого свехупругого тела, решаемую посредством численного подбора параметров материала с опорой на экспериментальные данные. Первоначально для решения задачи был выбран достаточно универсальный лагранжев сеточный метод (FEM — Finite Element Method), обеспечивающий минимальное время решения. Моделирование проводилось для двух шаров твердостью 80А и 55А. При определении модели эластомера необходимо учитывать, что кривая «инженерное напряжение — инженерная деформация» должна охватывать весь возможный в моделировании диапазон значений напряжений и деформаций, а также иметь S-образный вид (см. рис. 1).

Процесс калибровки модели включает в себя следующие этапы:

1) определение диапазона деформаций — на основе экспериментальных данных  $D_{\min}$  и  $\varepsilon_{\text{прод}}$  устанавливается диапазон деформаций  $[0, \varepsilon_{\text{прод}}]$  для численного моделирования, охватывающий весь реализуемый в испытаниях диапазон деформаций;

2) анализ высокоскоростной съемки — для характерного момента времени, например момента  $t = t(D_{\min})$  (деформация шара в продольном направлении максимальна), на кадре высокоскоростной съемки выбирается сечение, в котором измеряются продольный размер  $D_{\min}$  и расстояние от сечения до жесткой стенки (для определения поперечного размера);

3) расчет деформаций и первичный расчет — по измеренным размерам определяются деформации, задаются предварительные значения напряжений, выполняется численный расчет;

4) итерационная корректировка — сравнение результата, полученного в численном расчете, с экспериментом. Уменьшение расхождения с экспериментом путем корректировки значений напряжений в модели.

Полученные равновесные кривые «инженерное напряжение — инженерная деформация» для шаров твердости 80А и 55А по Шору приведены на рис. 5, а результаты расчетов и экспериментальные данные — на рис. 6 и в табл. 1.

Полученные кривые  $g(\lambda)$  при использовании метода FEM удовлетворительно описывают процесс деформации шара при  $\varepsilon \leq 60$  % (в случае с шаром твердости 80А). При обоих рассматриваемых твердостях наблюдается наилучшее соответствие по одному из размеров — максимальному поперечному  $D_{\max}$ .

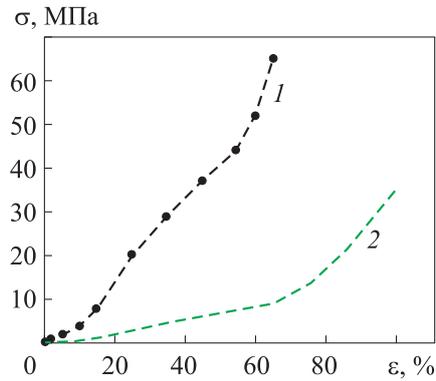


Рис. 5. Равновесные кривые «напряжения — деформация», для того чтобы задать поведение резины двух твердостей: 1 — 80А (FEM); 2 — 55А (FEM)

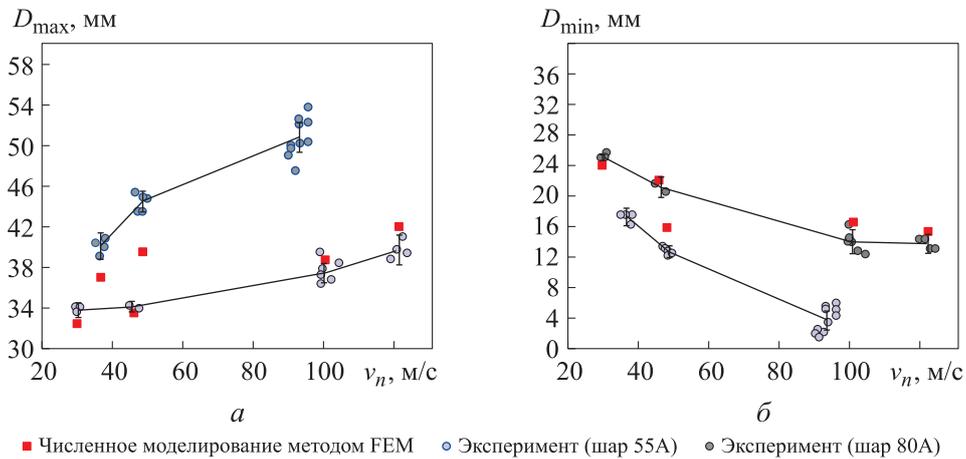


Рис. 6. Полученные в результате численного моделирования и экспериментов зависимости максимального поперечного размера (*a*) и минимального продольного размера (*б*) от скорости шаров 55А и 80А в момент удара

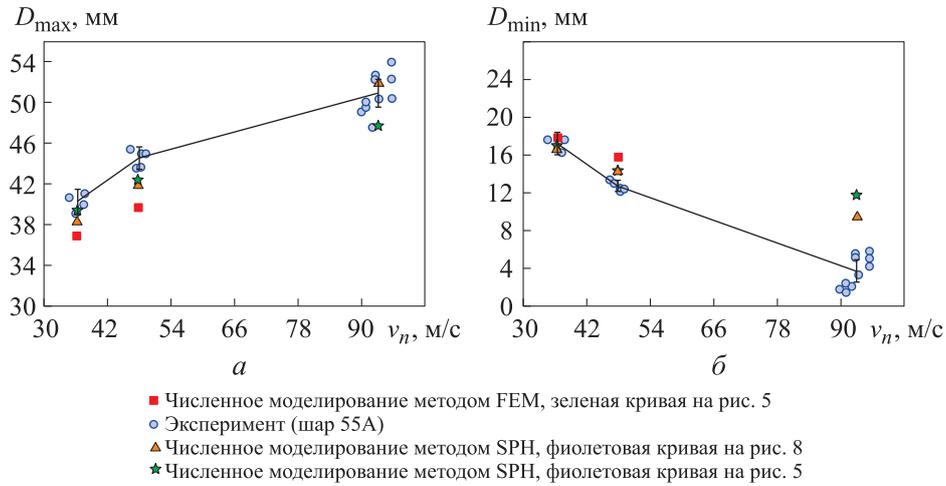
Таблица 1

Погрешности численного решения методом FEM

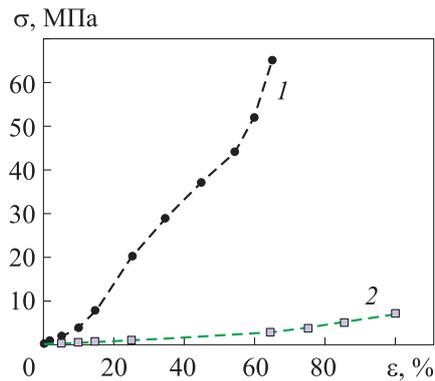
Диапазон скоростей, м/с	Погрешность, %	
	$\delta_{D_{\max}}$	$\delta_{D_{\min}}$
<i>Твердость шара по Шору 80А</i>		
30–36	4,41	4,25
43–48	1,55	4,64
93–100	2,54	18,43
120	5,58	8,26
<i>Твердость шара по Шору 55А</i>		
30–36	7,86	3,81
43–48	10,91	22,92

При деформациях шара твердостью 55A  $\varepsilon > 60\%$  ( $v_n \geq 90$  м/с) происходит перехлест расчетной сетки и принудительная остановка расчета. Погрешности объясняются разбросом скорости прилета шара в момент удара о жесткую стенку. Также проблему представляет калибровка параметров (коэффициент рассеяния упругой энергии, коэффициент демпфирования и т. п.), используемых в модели материала. Значения данных параметров неизвестны вследствие их отсутствия в технических условиях и другой документации из-за малой практической применимости. При моделировании необходимо самостоятельно подбирать значения применяемых параметров для достижения лучшего соответствия с экспериментом. Явление перехлеста расчетной сетки в случае ударника 55A сделало невозможным дальнейшую корректировку кривой для лучшего согласования с экспериментом. Несмотря на калибровку параметров материала ударника, удовлетворительного соответствия результатов численного моделирования с экспериментальными данными для шара 55A при высоких скоростях достичь не удалось. В качестве основной гипотезы, объясняющей расхождения, было выдвинуто предположение о фундаментальных ограничениях сеточного лагранжевого метода для описания больших деформаций эластомеров (явление перехлеста расчетной сетки, приводящее к неустойчивости решения в описании контактных взаимодействий). В связи с этим принято решение реализовать постановку задачи с использованием класса бессеточных численных методов, а именно с методом гидродинамики сглаженных частиц (SPH), который работает путем деления сплошной среды на дискретные элементы, называемые частицами. Эти частицы имеют пространственное расстояние, известное как «радиус сглаживания», на котором их свойства «сглаживаются» функцией ядра — весовой функцией заданного вида, позволяющей строить непрерывные распределения параметров сплошной среды по дискретному множеству условных частиц (ГОСТ Р 57700.6–2017).

Изменив метод решения с сеточного на бессеточный при той же кривой (см. рис. 5, зеленая кривая), согласование расчетных данных с полученными экспериментально улучшилось (рис. 7, зеленые звезды). Поскольку метод SPH позволяет охватить весь диапазон по деформациям, реализованным в эксперименте, для большего соответствия расчета (см. рис. 7, оранжевые треугольники) с экспериментом была проведена корректировка кривой для ударника твердости 55A (рис. 8, фиолетовая кривая 55A(SPH)), а рассчитанные погрешности указаны в табл. 2.



**Рис. 7.** Результаты численного моделирования и эксперимента для шара твердостью 55А по Шору при решении разными методами: *a* — зависимость максимального поперечного размера от скорости прилета; *b* — зависимость минимального продольного размера от скорости прилета; штриховыми линиями показаны границы доверительных интервалов



**Рис. 8.** Равновесные кривые «инженерное напряжение — инженерная деформация» для задания поведения резины двух твердостей: 1 — 80А (FEM); 2 — 55А (SPH)

Таблица 2

**Погрешности численного решения SPH-методом относительно эксперимента для ударника твердостью 55А по Шору**

Уровень скорости, м/с	Погрешность, %	
	$\delta_{D_{\max}}$	$\delta_{D_{\min}}$
I	4,31	3,52
II	5,49	13,92
III	2,24	>100

**Заключение.** Предложена расчетно-экспериментальная методика оценки параметров деформирования резиновых ударников различной твердости при взаимодействии их с недеформируемой стенкой в диапазоне скоростей от 10 до 120 м/с. Полученные результаты являются базой для численного моделирования ударного взаимодействия поражающих элементов специальных средств нелетального кинетического действия с конечно-элементными моделями антропометрических манекенов. Было определено, что для моделирования взаимодействия резиновых ударников высокой твердости (80А по Шору) предпочтительнее использовать лагранжев сеточный метод. Он дает хорошее соответствие эксперименту при высокой скорости расчета. Для моделирования сильной деформации ( $\epsilon > 60\%$ ) ударников малой твердости (55А по Шору) нужно применять SPH-метод.

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Левин Д.П., Люшнин С.А. База данных «оружие нелетального действия» как инструмент прогнозирования рисков развития ОНД-технологий. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2015, вып. 3 (39), с. 1. DOI: 10.18698/2308-6033-2015-3-1378 URL: <https://engjournal.bmstu.ru/catalog/arse/itae/1378.html>
- [2] Левин Д.П., Люшнин С.А. Реализация базы данных «Оружие нелетального действия». *Инженерный вестник*, 2013, № 10, с. 11.
- [3] Левин Д.П., Селиванов В.В. Методический подход к оценке действия кинетических элементов по многокомпонентной цели. *Вопросы оборонной техники. Серия 16: Технические средства противодействия терроризму*, 2019, № 5–6 (131–132), с. 17–24.
- [4] Bir C.A., Viano D.C. Design and Injury Assessment Criteria for Blunt Ballistic Impacts. *The Journal of Trauma: Injury, Infection, and Critical Care*, 2004, vol. 57, no. 6, pp. 1218–1224.
- [5] Bir C.A. *The Evaluation of Blunt Ballistic Impacts of the Thorax: PhD Thesis*. Detroit, Michigan, Wayne State University, 2000, 215 p.
- [6] Mertz H., Prasad P., Irwin A. Injury Risk Curves for Children and Adults in Front and Rear Collisions. *Society of Automotive Engineers Technical Paper Series*, 1997, Paper no. 973318, pp. 1–15.
- [7] Gao D., Wampler C.W. Head injury criterion. *IEEE Robotics & Automation Magazine*, 2009, vol. 16, no. 4, pp. 91–102. DOI: 10.1109/MRA.2009.934824
- [8] Oukara A., Robbe C., Nsiampa N., Papy A. Assessment of Non-Lethal Projectile Head Impacts. *Journal of Dynamic Behavior of Materials*, 2016, vol. 2, no. 3, pp. 301–312. DOI: 10.1007/s41314-016-0001-2
- [9] Roth S., Torres F., Feuerstein P., Thoral-Pierre K. Anthropometric dependence of the response of a thorax FE model under high speed loading: validation and real world accident replication. *Computer Methods and Programs in Biomedicine*, 2013, vol. 110, no. 1, pp. 70–79. DOI: 10.1016/j.cmpb.2012.11.004
- [10] Bodo M., Bracq A., Delille R., Marechal C., Roth S. Thorax injury criteria assessment through non-lethal impact using an enhanced biomechanical model. *International Journal of Computational Methods*, 2017, vol. 14, no. 4, paper 1740027. DOI: 10.1142/S0219519417400279
- [11] Bracq A., Delille R., Bourel B., Maréchal C., Haugou G., Lauro F., Roth S., Mauzac O. Numerical Recreation of Field Cases on a Biofidelic Human FE

- Model Involving Deformable Less-Lethal Projectiles. *Human Factors and Mechanical Engineering for Defense and Safety*, 2019, vol. 3, pp. 1–15.  
DOI: 10.1007/s41314-019-0022-8
- [12] Bouamal A., Lévesque H. *Development and Validation of a Finite Element Human Thorax Model under Blunt Ballistic Trauma: internal report*. Valcartier, Canada, 2007, 45 p.
- [13] Stitzel J.D., Gayzik F.S., Hoth J.J., Mercier J., Gage D.H., Morton K.A., Duma S.M., Payne R.M. Development of a Finite Element-Based Injury Metric for Pulmonary Contusion Part I: Model Development and Validation. *Stapp Car Crash Journal*, 2005, vol. 49, pp. 1–32.
- [14] Денисов А.В., Степанов М.Д., Харалдин Н.А., Степанов А.В., Боровков А.И., Жуков И.Е., Куринной Е.Д., Цуриков С.Г. Применение математической модели торса человека для моделирования забронированного воздействия в раневой баллистике. *Вестник Российской Военно-медицинской академии*, 2020, № 3 (71), с. 132–139.
- [15] Денисов А.В., Сайков Н.Т., Жуков И.Е., Агафонов П.В. Анализ современных отечественных методик определения уровня забронированного воздействия при непробитии бронезилета. *Вопросы оборонной техники. Серия 16: Технические средства противодействия терроризму*, 2021, № 9–10 (159–160), с. 36–46.
- [16] Беклемышева К.А., Васюков А.В., Петров И.Б. Численное моделирование динамических процессов в биомеханике сеточно-характеристическим методом. *Журнал вычислительной математики и математической физики*, 2015, т. 55, № 8, с. 1380.
- [17] Levin D.P., Petyukov A.V., Arcivenko M.E., Astua A.V.G. Modeling of the kinetic element interaction with biological object. *Human Factors and Mechanical Engineering for Defense and Safety*, 2022, vol. 6, art. no. 5.  
DOI: 10.1007/s41314-022-00042-3
- [18] Ouyang D., Qin C., Qin X., Zhang Q., Liu X. Numerical study on the blocking effect of skin on Flash-Ball Impact and damage assessment. *Defence Technology*, 2023, vol. 19, pp. 1–15. DOI: 10.1016/j.dt.2023.05.005
- [19] Mooney M. A theory of large elastic deformation. *Journal of Applied Physics*, 1940, vol. 11, pp. 582–592.
- [20] Rivlin R.S. Large elastic deformations of isotropic materials. IV. Further developments of the general theory. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*, 1948, vol. 241, no. 835, pp. 379–397.
- [21] Paviera J., Langlet A., Eches N., Jacquet J.-F. On ballistic parameters of less lethal projectiles influencing the severity of thoracic blunt impacts. *Injury*, 2013, vol. 44, no. 9, pp. 1160–1167. DOI: 10.1016/j.injury.2016.09.004
- [22] Sahoo D., Robbe C., Deck C., Meyer F., Papy A., Willinger R. Head injury assessment of non-lethal projectile impacts: A combined experimental/computational method. *Injury*, 2016, vol. 47, no. 9, pp. 1952–1961.  
DOI: 10.1016/j.injury.2016.09.004
- [23] Taylor G.I. The use of flat-ended projectiles for determining dynamic yield stress. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*, 1948, vol. 194, no. 1038, pp. 289–299.  
DOI: 10.1098/rspa.1948.0081
- [24] Kolling S., Du Bois P.A., Benson D.J., Feng W.W. A tabulated formulation of hyperelasticity with rate effects and damage. *Computational Mechanics*, October 2007, vol. 40, no. 5, pp. 885–899. DOI: 10.1007/s00466-006-0150

Статья поступила в редакцию 28.05.2025

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Левин Д.П., Петюков А.В., Кудрявский А.Э. Методика расчетно-экспериментальной оценки параметров деформирования резиновых ударников. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2026, вып. 2. EDN BYEVDX

**Левин Денис Петрович** — канд. техн. наук, доцент кафедры «Высокоточные летательные аппараты», доцент по специальности 20.02.21, МГТУ им. Н.Э. Баумана.  
e-mail: dlevin@bmstu.ru

**Петюков Андрей Вячеславович** — канд. техн. наук, доцент кафедры «Высокоточные летательные аппараты», МГТУ им. Н.Э. Баумана.  
e-mail: petyukov\_a@bmstu.ru

**Кудрявский Александр Эдуардович** — аспирант кафедры «Высокоточные летательные аппараты», МГТУ им. Н.Э. Баумана.  
e-mail: kudryavskiyaea@student.bmstu.ru

## **Methodology for Computation and Experimental Evaluation of Deformation Parameters of Rubber Strikers**

© D.P. Levin, A.V. Petyukov, A.E. Kudryavskiy

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, 105005, Russian Federation

*The paper considers the problem of determining the equilibrium “engineering stress–engineering strain” curves for elastomers under dynamic loading during impact with a rigid wall. To construct this curve, the deformation parameters of kinetic elements are necessary to be determined taking into account their hardness and velocity under dynamic loading. However, no methodology currently exists for evaluating these parameters. Based on more than 80 experiments involving firing a non-deformable wall with a rubber kinetic element, a method has been proposed for the computational and experimental assessment of the deformation parameters of rubber strikers of varying hardness in the speed range from 10 to 120 m/s, characteristic of the striking elements of special non-lethal kinetic weapons. After verifying the numerical method for solution convergence, the interaction process between the rubber striker and the non-deformable wall was simulated using a simplified rubber model. Equilibrium “engineering stress–engineering strain” curves were determined based on experimentally obtained parameters for 55A and 80A Shore-hardness projectiles using both mesh-based and mesh-free methods for subsequent use in Finite Element Modeling of impact interactions with anthropomorphic dummy models.*

**Keywords:** *engineering stress–strain curve of elastomers, non-lethal weapons, numerical modeling, kinetic element, rubber, striker, ball*

### REFERENCES

- [1] Levin D.P., Lyushnin S.A. *Baza dannykh «oruzhiye neletalnogo deystviya» kak instrument prognozirovaniya riskov razvitiya OND-tekhnologiy* [Database of “non-lethal weapons” as a tool for predicting risks of NLD technologies]. *Inzhenernyy zhurnal: nauka i innovatsii — Engineering Journal: Science and Innovation*, 2015, iss. 3 (39), p. 1. DOI: 10.18698/2308-6033-2015-3-1378 Available at: <https://engjournal.bmstu.ru/catalog/arise/itae/1378.html>
- [2] Levin D.P., Lyushnin S.A. *Realizatsiya bazy dannykh “Oruzhiye neletalnogo deystviya”* [Implementation of the “non-lethal weapons” database]. *Inzhenernyy vestnik*, 2013, no. 10, p. 11.
- [3] Levin D.P., Selivanov V.V. *Metodicheskii podkhod k otsenke deystviya kineticheskikh elementov po mnogokomponentnoy tseli* [Methodological approach for evaluating kinetic elements effects on multi-component targets]. *Voprosy oboronnoy tekhniki. Seriya 16: Tekhnicheskiye sredstva protivodeystviya terrorizmu — Military Enginery. Scientific and Technical Journal. Issue 16: Counter-terrorism technical devices*, 2019, no. 5-6 (131-132), pp. 17–24.
- [4] Bir C.A., Viano D.C. Design and Injury Assessment Criteria for Blunt Ballistic Impacts. *The Journal of Trauma: Injury, Infection, and Critical Care*, 2004, vol. 57, no. 6, pp. 1218–1224.
- [5] Bir C.A. *The evaluation of blunt ballistic impacts of the thorax: PhD Thesis*. Detroit, Michigan, Wayne State University, 2000, 215 p.
- [6] Mertz H., Prasad P., Irwin A. Injury risk curves for children and adults in front and rear collisions. *Society of Automotive Engineers Technical Paper Series*, 1997, paper no. 973318, pp. 1–15.

- [7] Gao D., Wampler C.W. Head injury criterion. *IEEE Robotics & Automation Magazine*, 2009, vol. 16, no. 4, pp. 91–102. <https://doi.org/10.1109/MRA.2009.934824>
- [8] Oukara A., Robbe C., Nsiampa N., Papy A. Assessment of non-lethal projectile head impacts. *Journal of Dynamic Behavior of Materials*, 2016, vol. 2, no. 3, pp. 301–312. <https://doi.org/10.1007/s41314-016-0001-2>
- [9] Roth S., Torres F., Feuerstein P., Thorat-Pierre K. Anthropometric dependence of the response of a thorax FE model under high speed loading: validation and real world accident replication. *Computer Methods and Programs in Biomedicine*, 2013, vol. 110, no. 1, pp. 70–79. <https://doi.org/10.1016/j.cmpb.2012.11.004>
- [10] Bodo M., Bracq A., Delille R., Marechal C., Roth S. Thorax injury criteria assessment through non-lethal impact using an enhanced biomechanical model. *International Journal of Computational Methods*, 2017, vol. 14, no. 4, paper 1740027. <https://doi.org/10.1142/S0219519417400279>
- [11] Bracq A., Delille R., Bourel B., Marechal C., Haugou G., Lauro F., Roth S., Mauzac O. Numerical recreation of field cases on a biofidelic human FE model involving deformable less-lethal projectiles. *Human Factors and Mechanical Engineering for Defense and Safety*, 2019, vol. 3, pp. 1–15. <https://doi.org/10.1007/s41314-019-0022-8>
- [12] Bouamal A., Levesque H. *Development and validation of a finite element human thorax model under blunt ballistic trauma. Internal report.* Valcartier, Canada, 2007, 45 p.
- [13] Stitzel J.D., Gayzik F.S., Hoth J.J., Mercier J., Gage D.H., Morton K.A., Duma S.M., Payne R.M. Development of a finite element-based injury metric for pulmonary contusion. Part I: model development and validation. *Stapp Car Crash Journal*, 2005, vol. 49, pp. 1–32.
- [14] Denisov A.V., Stepanov M.D., Kharaldin N.A., Stepanov A.V., Borovkov A.I., Zhukov I.E., Kurinnoy E.D., Tsurikov S.G. Primenenie matematicheskoy modeli torsa cheloveka dlya modelirovaniya zabronevogo vozdeystviya v ranevoy balistike [Application of a human torso mathematical model for simulating behind-armor effects in wound ballistics]. *Vestnik Rossiyskoy Voenno-meditsinskoy akademii — Bulletin of the Russian Military Medical Academy*, 2020, no. 3 (71), pp. 132–139.
- [15] Denisov A.V., Saykov N.T., Zhukov I.E., Agafonov P.V. Analiz sovremennykh otechestvennykh metodik opredeleniya urovnya zabronyevogo vozdeystviya pri neprobitii bronyezheleta [Analysis of modern Russian methods for determining the level of behind-armor effects when a bulletproof vest is not penetrated]. *Voprosy oboronnoy tekhniki. Seriya 16: Tekhnicheskkiye sredstva protivodeystviya terrorizmu — Military Engineering. Scientific and Technical Journal. Issue 16: Counter-terrorism technical devices*, 2021, no. 9–10 (159–160), pp. 36–46.
- [16] Beklemysheva K.A., Vasyukov A.V., Petrov I.B. Chislennoe modelirovanie dinamicheskikh protsessov v biomekhanike setochno-kharakteristicheskimi metodom [Numerical simulation of dynamic processes in biomechanics by a mesh-characteristic method]. *Zhurnal vychislitel'noy matematiki i matematicheskoy fiziki — Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2015, vol. 55, no. 8, p. 1380.
- [17] Levin D.P., Petyukov A.V., Arcivenko M.E., Astua A.V.G. Modeling of the kinetic element interaction with biological object. *Human Factors and Mechanical Engineering for Defense and Safety*, 2022, vol. 6, art. no. 5. <https://doi.org/10.1007/s41314-022-00042-3>
- [18] Ouyang D., Qin C., Qin X., Zhang Q., Liu X. Numerical study on the blocking effect of skin on Flash-Ball impact and damage assessment. *Defence Technology*, 2023, vol. 19, pp. 1–15. <https://doi.org/10.1016/j.dt.2023.05.005>

- [19] Mooney M. A theory of large elastic deformation. *Journal of Applied Physics*, 1940, vol. 11, pp. 582–592.
- [20] Rivlin R.S. Large elastic deformations of isotropic materials. IV. Further developments of the general theory. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*, 1948, vol. 241, no. 835, pp. 379–397.
- [21] Paviera J., Langlet A., Eches N., Jacquet J.-F. On ballistic parameters of less lethal projectiles influencing the severity of thoracic blunt impacts. *Injury*, 2013, vol. 44, no. 9, pp. 1160–1167. <https://doi.org/10.1016/j.injury.2016.09.004>
- [22] Sahoo D., Robbe C., Deck C., Meyer F., Papy A., Willinger R. Head injury assessment of non-lethal projectile impacts: a combined experimental/computational method. *Injury*, 2016, vol. 47, no. 9, pp. 1952–1961. <https://doi.org/10.1016/j.injury.2016.09.004>
- [23] Taylor G.I. The use of flat-ended projectiles for determining dynamic yield stress. In: *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*, 1948, vol. 194, no. 1038, pp. 289–299. <https://doi.org/10.1098/rspa.1948.0081>
- [24] Kolling S., Du Bois P.A., Benson D.J., Feng W.W. A tabulated formulation of hyperelasticity with rate effects and damage. *Computational Mechanics*, 2007, vol. 40, no. 5, pp. 885–899. <https://doi.org/10.1007/s00466-006-0150-x>

**Levin D.P.**, Cand. Sc. (Eng.), Associate Professor of the Department of High-Precision Aircraft, Associate Professor (Specialty 20.02.21), Bauman Moscow State Technical University. e-mail: [dlevin@bmstu.ru](mailto:dlevin@bmstu.ru)

**Petyukov A.V.**, Cand. Sc. (Eng.), Associate Professor of the Department of High-Precision Aircraft, Bauman Moscow State Technical University. e-mail: [petyukov\\_a@bmstu.ru](mailto:petyukov_a@bmstu.ru)

**Kudryavskiy A.E.**, Postgraduate student, Department of High-Precision Aircraft, Bauman Moscow State Technical University. e-mail: [kudryavskiyaea@student.bmstu.ru](mailto:kudryavskiyaea@student.bmstu.ru)