

Применение энергетического метода для вычисления расщепления частот собственных колебаний кольцевых резонаторов с пространственными дефектами

© Р.М. Киселев, Ф.Д. Сорокин

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Российская Федерация

Представлен разработанный авторами статьи энергетический метод расчета расщепления частот собственных колебаний кольцевых резонаторов микромеханических гироскопов, который распространен на резонаторы, обладающие пространственными дефектами. Расщепление собственных частот существенно влияет на точность приборов навигации с кольцевыми резонаторами, поэтому требуются эффективные методы исследования их динамики. В предыдущих публикациях было показано, что энергетический метод обладает высокими сходимостью и точностью, а также простотой при расчете колебаний резонаторов в собственной плоскости, в связи с чем он и был выбран для исследования динамики кольцевых резонаторов с пространственными дефектами. Энергетический метод был использован для расчета расщепления собственных частот резонатора, вызванного винтовым дефектом. Полученные результаты подтверждены альтернативным подходом, основанном на численном интегрировании дифференциальных уравнений гибких упругих стержней.

Ключевые слова: микромеханический гироскоп, кольцевой резонатор, расщепление частоты собственных колебаний, энергетический метод, метод Фурье

Введение. Главное направление исследований в области инерционной навигации — поиск способов повышения точности измерений [1, 2]. Один из инерциальных измерительных приборов — микромеханический гироскоп (ММГ) с кольцевым резонатором. Этот прибор предназначен для измерения угловой скорости в инерциальном пространстве [3, 4]. Функционирование ММГ основано на инертности упругих волн в тонкостенных оболочках и тонких кольцах. Чувствительным элементом ММГ служит кольцевой резонатор (рис. 1, а).

С помощью системы возбуждения, обычно состоящей из нескольких электродов или магнита, в резонаторе возбуждаются механические колебания на одной из резонансных частот, как правило, на первой ненулевой. При повороте резонатора в инерционном пространстве возникает прецессия стоячей волны, по движению пучностей которой можно определить угловую скорость, а также поворот и угловое ускорение [5].

Основная проблема ММГ с кольцевыми резонаторами — быстрое возрастание погрешности измерений с течением времени. С точки зрения механики существует два качественных показателя ММГ — добротность и расщепление частот собственных колебаний (далее —

расщепление). В данной работе в качестве критерия оценки качества принята величина относительного расщепления:

$$\psi = \frac{p_{\max} - p_{\min}}{p_0}, \quad (1)$$

где p_{\max} и p_{\min} — две очень близкие частоты собственных колебаний в окрестности p_0 ; p_0 — частота, на которой работает прибор, т. е. частота резонатора без дефектов.

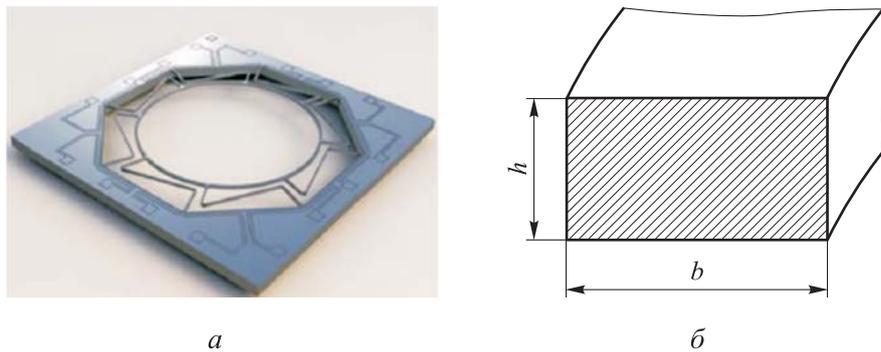


Рис. 1. Кольцевой резонатор микромеханического гироскопа:
a — внешний вид чувствительного элемента [3]; *б* — поперечное сечение резонатора шириной b и высотой h

Расщепление (1) обычно возникает при наличии в симметричных системах переменных параметров, оси симметрии которых отличаются от осей симметрии прибора или вовсе не имеют осей симметрии [6]. К таким параметрам относятся как физические (модуль упругости, плотность, коэффициент Пуассона), так и геометрические (радиус срединной линии, высота и ширина сечения и т. д.). Существует множество работ, посвященных описанию динамики неидеальных резонаторов в плоской и пространственной постановках. Однако нельзя утверждать, что задача описания динамики кольцевых резонаторов ММГ решена полностью, так как еще не предложено эффективного метода решения задачи динамики кольцевых резонаторов ММГ в пространственной постановке с возможностью учета взаимного влияния различных дефектов [7].

Большинство известных методов позволяют рассматривать только один дефект и, как правило, только одну гармонику разложения в тригонометрический ряд функции, описывающий этот дефект [8, 9]. Если требуется рассмотреть ансамбль гармоник дефекта или нескольких дефектов, то решение такой задачи становится крайне сложным или даже невозможным. Причем зачастую предполагается, что дефекты и гармоники дефектов не оказывают взаимного влияния на итоговое расщепление, в связи с чем предполагается возможность

вычисления истинного расщепления как алгебраической суммы расщеплений от различных гармоник разных дефектов. Однако в работе [10] впервые показано, что при одновременном рассмотрении 2-й и 6-й гармоник дефекта плотности возникает существенный рост расщепления. Кроме того, в [11] представлено, что разность фаз между гармониками также может существенно влиять на расщепление, а значит, математические модели, не позволяющие рассматривать ансамбль гармоник дефектов, нельзя использовать в качестве адекватных моделей динамики неидеальных кольцевых резонаторов.

В настоящее время существуют лишь два метода, позволяющих описывать динамику неидеальных кольцевых резонаторов в пространственной постановке с ансамблем гармоник различных дефектов — метод конечных элементов (МКЭ) [10] и недавно разработанный энергетический метод [11]. Дополненный методом возмущений [12], МКЭ хорошо представлен в научной литературе. Однако для решения поставленной задачи он не подходит, так как имеет недостатки: линейное приближение метода возмущений, необходимость значительных вычислительных мощностей и относительно невысокую точность [10]. Энергетический метод (ЭМ) лишен таких недостатков, но пока еще он представлен только в плоской постановке [11].

Кроме того, представляет интерес подход, основанный на модели гибких упругих стержней (МГУС) в совокупности с итерационным методом последовательных приближений [7], с помощью которого впервые был исследован винтовой дефект кольцевого резонатора (рис. 2). Однако полученные результаты [7] продемонстрировали его существенные недостатки, аналогичные тем, что у МКЭ, хотя, вероятно, на основе МГУС можно рассматривать и ансамбль гармоник дефектов. Во всяком случае, с помощью МГУС можно контролировать результаты, полученные другими методами.

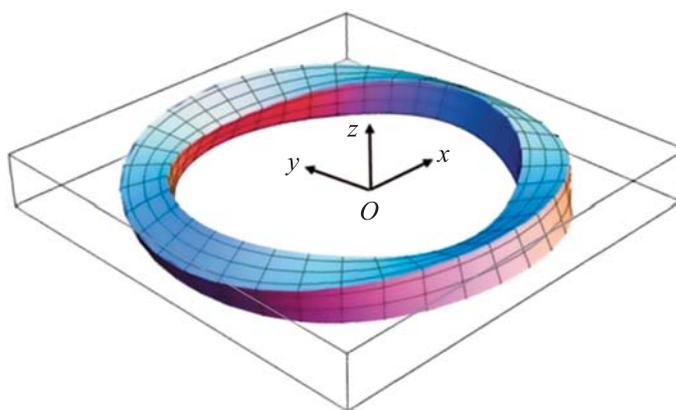


Рис. 2. Кольцевой резонатор с винтовым дефектом формы (пропорции нарушены для наглядности)

Цель данной статьи — разработка адекватной математической модели неидеального резонатора ММГ путем распространения ЭМ на пространственные дефекты и пространственные колебания. Кроме того, ставится задача изучения взаимного влияния гармоник винтового дефекта, а также разности их фаз на расщепление. Для верификации пространственного варианта ЭМ был использован итерационный метод, основанный на МГУС.

Энергетический метод в пространственной постановке. В качестве основного метода исследования динамики неидеальных кольцевых резонаторов был выбран ЭМ [13]. Поскольку ранее он был разработан только для колебаний резонатора в своей плоскости, а винтовой дефект является пространственным, необходимо вывести основные уравнения ЭМ в пространственной постановке. Следует заметить, что кинематические соотношения, а также формулы для тензора податливости сечения и тензора инерции вращения являются общими для ЭМ и итерационного метода, основанного на МГУС [14], что вполне объяснимо и естественно. Однако частоты в ЭМ и итерационном методе вычисляются совершенно разными способами.

Направления ортов кольца (рис. 3) выбраны такими же, как в работе [7].

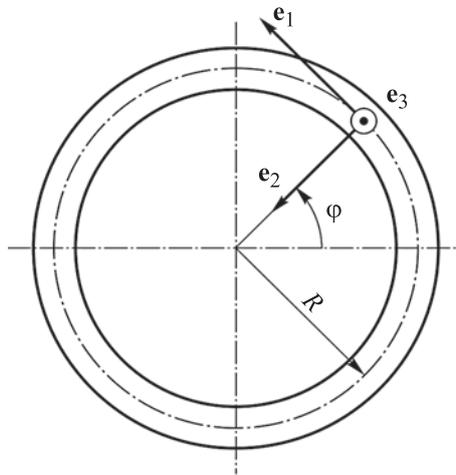


Рис. 3. Направление ортов в плоскости кольцевого резонатора

При выводе уравнений используется классическая комбинация тензорной и матричной алгебры [15]. Тензоры и векторы выделяются полужирным шрифтом. Переход от тензоров к матрицам 3×3 выполняется в неподвижной декартовой системе координат $Oxyz$ (см. рис. 2) и обозначается квадратными скобками [...]. Аналогичный переход от векторов (направленных отрезков) к матрицам-столбцам 3×1 выполняется

в той же системе координат $Oxuz$ и обозначается фигурными скобками $\{\dots\}$.

Зададим вектор перемещений:

$$\{\mathbf{u}\} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}. \quad (2)$$

Условие нерастяжимости кольца связывает две компоненты вектора перемещений (2) следующим образом [16]:

$$u_2 = \frac{\partial u_1}{\partial \varphi}. \quad (3)$$

Зададим вектор поворотов:

$$\{\mathfrak{g}\} = \begin{Bmatrix} \mathfrak{g}_1 \\ \mathfrak{g}_2 \\ \mathfrak{g}_3 \end{Bmatrix}. \quad (4)$$

Вектор перемещений (2) связан с вектором поворотов (4) следующим соотношением [17]:

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_1 \times \frac{1}{R} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \varphi}. \quad (5)$$

Вектор приращения кривизны определен таким образом:

$$\mathfrak{a} = \frac{\partial \mathfrak{g}}{R \partial \varphi}. \quad (6)$$

Зададим матрицу единичного тензора, не зависящую от выбора базиса:

$$[\mathbf{E}] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (7)$$

Введем единичные орты срединной линии кольца (см. рис. 3):
орт касательной

$$\{\mathbf{e}_1\} = \{-\sin \varphi, \cos \varphi, 0\}^T; \quad (8)$$

нормаль к срединной плоскости кольца

$$\{\mathbf{e}_3\} = \{0, 0, 1\}^T; \quad (9)$$

орт внутренней нормали к окружности

$$\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1. \quad (10)$$

Для вывода формулы тензора поворота необходимо задать косо-симметричный тензор [15] от сопутствующего вектора \mathbf{e}_1 :

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{e}_1; \quad [\mathbf{S}] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cos \varphi \\ 0 & 0 & \sin \varphi \\ -\cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \end{pmatrix}. \quad (11)$$

Геометрические характеристики прямоугольного сечения резонатора определяются стандартным образом (см. рис. 1, б):

$$J_2 = \frac{bh^3}{12}; \quad J_3 = \frac{hb^3}{12}; \quad J_k = \beta bh^3; \quad J_p = J_2 + J_3, \quad (12)$$

где J_2 — момент инерции сечения относительно оси 2; J_3 — момент инерции сечения относительно оси 3; J_k — геометрическая жесткость на кручение; J_p — полярный момент инерции сечения; β — табличный коэффициент, зависящий от отношения b/h ($h < b$) [18].

Введем тензор поворота вокруг касательной к оси кольца [7, 15]:

$$\mathbf{L} = \mathbf{E} \cos \theta + \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 (1 - \cos \theta) + \mathbf{S} \sin \theta, \quad (13)$$

где \otimes — знак диадного (тензорного) умножения.

Тензор инерции вращения сечения идеального резонатора вычислялся следующим образом [15]:

$$\mathbf{J}_0 = \rho (J_p \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + J_2 \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 + J_3 \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3) \quad (14)$$

(здесь и далее, как и во многих работах, идеальным именуется резонатор без дефектов).

В качестве дефекта резонатора рассматривалось начальное угловое отклонение сечения от проектного положения, в котором кольцо является идеальным телом вращения:

$$\theta = \theta_n \cos(n\varphi), \quad (15)$$

где θ_n — амплитуда дефекта (начальный поворот сечения вокруг оси кольца); n — целое числа; φ — полярный угол.

Тензор инерции вращения сечения кольца с дефектами (15) получался поворотом (14) вокруг касательной к окружности кольца:

$$\mathbf{J} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{J}_0 \cdot \mathbf{L}^T. \quad (16)$$

Тензор податливости сечения идеального кольца соответствует матрице податливости сечения из [14, 19]:

$$\mathbf{A}_0^{-1} = \frac{1}{GJ_k} \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + \frac{1}{EJ_2} \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 + \frac{1}{EJ_3} \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3, \quad (17)$$

где G — модуль упругости второго рода; E — модуль упругости первого рода.

Тензор податливости сечения кольца с дефектом вычислялся поворотом тензора (17) вокруг касательной к окружности кольца:

$$\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{A}_0^{-1} \cdot \mathbf{L}^T. \quad (18)$$

Далее представлен непосредственно энергетический метод. Поскольку уравнение (3) связывает две компоненты перемещения, а для вычисления вектора поворотов по (5) требуется дополнительно только одна компонента вектора поворотов, необходимо в соответствии с энергетическим методом разложить в тригонометрический ряд всего три функции:

$$\begin{aligned} u_1 &= \left(\sum_{k=0}^n u_{1k}^{(c)} \cos k\varphi + \sum_{k=1}^n u_{1k}^{(s)} \sin k\varphi \right) \cos pt; \\ u_3 &= \left(\sum_{k=0}^n u_{3k}^{(c)} \cos k\varphi + \sum_{k=1}^n u_{3k}^{(s)} \sin k\varphi \right) \cos pt; \\ \vartheta_1 &= \left(\sum_{k=0}^n \vartheta_{1k}^{(c)} \cos k\varphi + \sum_{k=1}^n \vartheta_{1k}^{(s)} \sin k\varphi \right) \cos pt, \end{aligned} \quad (19)$$

где p — круговая частота собственных колебаний.

Потенциальная энергия U упругих деформаций:

$$U = \frac{1}{2} R \int_0^{2\pi} \mathbf{a} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{a} d\varphi. \quad (20)$$

Кинетическая энергия T определяется так:

$$T = \frac{\lambda}{2} R \int_0^{2\pi} (\rho S \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{J} \cdot \mathbf{J}) d\varphi, \quad (21)$$

где λ — характеристическое число, $\lambda = p^2$; ρ — плотность материала резонатора; S — площадь поперечного сечения резонатора.

Коэффициенты разложения (19) образуют вектор состояния механической системы, состоящий из $(6n + 3)$ элементов:

$$\mathbf{Y} = \left(u_{10}^{(c)}, u_{11}^{(c)}, u_{11}^{(s)}, u_{12}^{(c)}, u_{12}^{(s)}, \dots, \vartheta_{1n}^{(c)}, \vartheta_{1n}^{(s)} \right)^T. \quad (22)$$

Подстановка разложений (19) в формулы (20) и (21) с учетом представления параметров $E(\varphi)$, $S(\varphi)$, $\mathbf{J}(\varphi)$, $\rho(\varphi)$, $\theta(\varphi)$ тригонометрическими

суммами вида (19) и вычисления определенных интегралов по φ превращает амплитудные значения энергий в квадратичные формы:

$$\begin{aligned}\tilde{T} &= \lambda \frac{1}{2} \mathbf{Y}^T [\mathbf{M}] \mathbf{Y}; \\ \tilde{U} &= \frac{1}{2} \mathbf{Y}^T [\mathbf{K}] \mathbf{Y},\end{aligned}\tag{23}$$

где $[\mathbf{M}]$ — матрица масс; $[\mathbf{K}]$ — матрица жесткости; тильдой помечены амплитудные значения энергий.

Элементы матриц $[\mathbf{M}]$ и $[\mathbf{K}]$ вычислялись путем символического дифференцирования после взятия интегралов (20) и (21) по φ :

$$M_{ij} = \frac{1}{\lambda} \frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial Y_i \partial Y_j}; \quad K_{ij} = \frac{\partial^2 \tilde{U}}{\partial Y_i \partial Y_j}.\tag{24}$$

Характеристическое число λ введено в выражения (21) для перехода к стандартным обозначениям и методикам линейной алгебры. Следует отметить, что вычисление определенных интегралов по φ , необходимое при переходе от формул (20) и (21) к формулам (23), может выполняться как в аналитическом, так и в численном виде. Таким образом, выражения для матриц $[\mathbf{M}]$ и $[\mathbf{K}]$ могут быть получены в символическом виде, поэтому некоторые последующие результаты можно представить как в численном, так и символическом виде.

Условие стационарности функционала действия на основе принципа Гамильтона [20] будет записано таким образом:

$$\delta(\tilde{T} - \tilde{U}) = 0.\tag{25}$$

Выражение (25) с учетом выражений (23) приводит к классической задаче на собственные значения:

$$[\mathbf{K}] \mathbf{Y} - \lambda [\mathbf{M}] \mathbf{Y} = 0.\tag{26}$$

Собственные значения λ для однородной системы (26) определяются характеристическим уравнением

$$|[\mathbf{K}] - \lambda [\mathbf{M}]| = 0.\tag{27}$$

Таким образом, ЭМ позволил свести определение частот собственных колебаний и, как следствие, расчет расщепления к решению характеристического уравнения (27), которое решалось стандартными методами линейной алгебры. Программный код для построения и решения уравнения (27) был реализован с применением стандартных функций символического интегрирования, символического дифференцирования и решения задачи на собственные значения в пакете Wolfram Mathematica [21].

Верификация ЭМ на примере резонатора с винтовым дефектом. Рассмотрим реальный кольцевой резонатор ММГ из диссертации [22] со следующими параметрами:

Радиус срединной окружности кольца R , м	$2,94 \cdot 10^{-3}$
Ширина сечения b , м	$120 \cdot 10^{-6}$
Высота сечения h , м	$100 \cdot 10^{-6}$
Плотность ρ , кг/м ³	2330
Модуль упругости E , ГПа	109
Коэффициент Пуассона μ	0,266
Коэффициент β в формуле $J_k = \beta bh^3$ [18]	0,166

Верификация ЭМ и разработанного программного кода выполнялась по численному решению, полученному на основе итерационного метода [7], основанного на МГУС. При верификации рассматривался тот же случай второй гармоники винтового дефекта, что и в работе [7]. Результаты расчетов приведены в таблице. Из анализа этих данных следует, что ЭМ дает результаты, аналогичные полученным с помощью МГУС, но с расхождением на уровне погрешности численных методов.

Верификация ЭМ для случая $\theta = \theta_2 \cos(2\varphi)$

θ_2 , рад	Относительное расщепление $\frac{P_{\max} - P_{\min}}{P_0}$	
	ЭМ	МГУС [7]
0,01	0,0000076383	0,0000076413
0,02	0,0000305522	0,0000305521
0,03	0,0000687389	0,0000687381
0,04	0,0001221938	0,0001221906
0,05	0,0001909101	0,0001909072
0,06	0,0002748794	0,0002748768

Проведено также исследование сходимости решения, выполненного ЭМ. В выражениях (19) число n является варьируемым параметром, который фактически определяет сложность и точность вычислений, поскольку матрица масс и матрица жесткости имеют размерность $6n + 3$. В связи с этим представляется целесообразным проанализировать сходимость решения, которая была исследована на примере учета только 2-й гармоники винтового дефекта $\theta_2 = 0,01$ рад. Результаты расчетов для n , взятого в диапазоне от 1 до 11, приведены на рис. 4. Представленная на рисунке кривая свидетельствует о том, что метод обладает очень быстрой сходимостью. При $n = 1$ метод не дал решения, что логично, поскольку в таком случае разложение

функций в ряды (19) не имеет четных гармоник, а первая ненулевая собственная форма колебаний является четной функцией. При $n > 2$ решение практически не меняется с увеличением числа n , а значит целесообразно принять $n = 3$. Следует отметить, что данное утверждение справедливо при обособленном рассмотрении 2-й гармоники винтового дефекта, а при рассмотрении ансамбля гармоник одного или разных дефектов следует проверять сходимость решения в каждом конкретном случае.

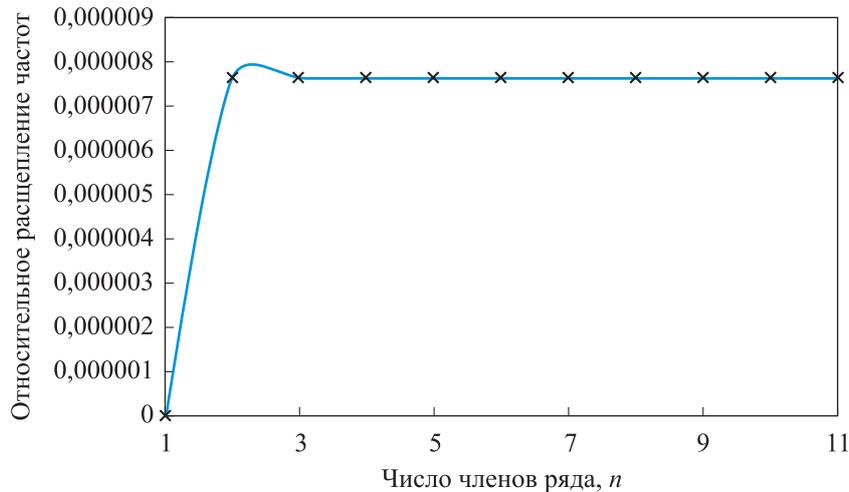


Рис. 4. Анализ сходимости ЭМ для 2-й гармоники винтового дефекта

Исследование взаимного влияния гармоник винтового дефекта.

Энергетический метод позволяет несложно переходить к комбинации гармоник одного дефекта и даже дефектов разного происхождения, например геометрического дефекта и дефекта плотности. Теперь будет рассмотрен случай одновременного учета нескольких гармоник винтового дефекта. Как уже было отмечено, различные авторы зачастую предполагают, что гармоники дефектов не оказывают взаимного влияния и что можно рассматривать дефекты независимо, а расщепление получать как алгебраическую сумму отдельных решений. Однако в работе [10] было показано, что 2-я и 6-я гармоники дефекта плотности имеют нелинейную корреляцию.

Авторы работы [13] выяснили, что между 2-й и 4-й гармониками дефекта радиуса наблюдается линейная зависимость, и это свидетельствует о необходимости проверять возможность взаимного влияния в каждом конкретном случае. Из работы [7] следует, что при обособленном рассмотрении по отдельности каждой гармоники только 2-я гармоника винтового дефекта вызывает расщепление, причем сравнительно слабое. Но, как оказалось, комбинация двух гармоник

винтового дефекта приводит к существенному увеличению расщепления. Рассматривалась следующая комбинация гармоник:

$$\theta = \theta_n \cos(n\varphi) + \theta_m \cos(m\varphi). \quad (28)$$

В результате исследования было выявлено, что хотя 6-я гармоника винтового дефекта при обособленном рассмотрении не вызывает расщепления, комбинация 2-й и 6-й гармоник ($n = 2, m = 6$) приводит к его существенному росту. График зависимости относительного расщепления для описанного случая при допущении $\theta_2 = \theta_6$ приведен на рис. 5. Все иные комбинации n и m не выявили какой-либо значимой корреляции.

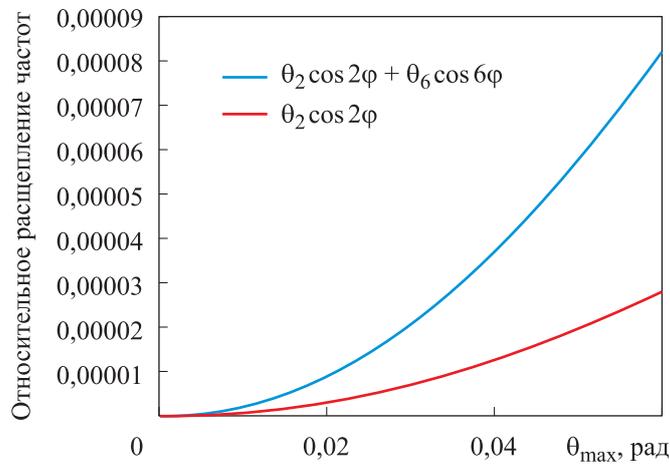


Рис. 5. Усиление расщепления, вызванное дополнительной гармоникой винтового дефекта

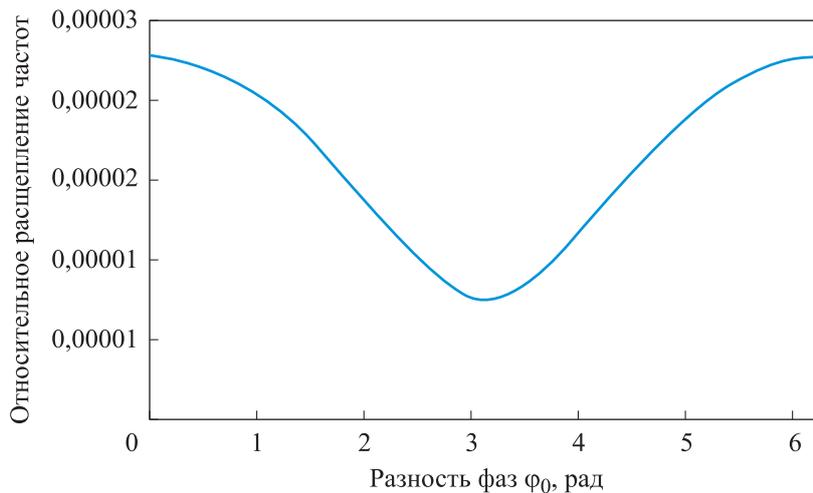


Рис. 6. Влияние фазового угла φ_0 на расщепление

Кроме того, рассматривалось влияние на расщепление разности фаз между гармониками дефектов, поскольку оно обсуждалось в работе [11]. Был выбран случай винтового дефекта $\theta_2 = \theta_6 = 0,01$ рад, заданного вдоль окружности следующим образом:

$$\theta = \theta_2 \cos(2\varphi) + \theta_6 \cos(6\varphi + \varphi_0), \quad (29)$$

где φ_0 — фазовый угол.

Рассчитанная ЭМ зависимость расщепления от разности фаз показана на рис. 6, на котором хорошо видно, что разность фаз действительно оказывает существенное влияние на расщепление.

Заключение. Энергетический метод, разработанный ранее для решения плоских задач динамики неидеальных кольцевых резонаторов ММГ, распространен на трехмерные задачи с пространственными дефектами резонаторов. Усовершенствованный энергетический метод успешно верифицирован сопоставлением с более громоздким и сложным итерационным методом, основанном на интегрировании дифференциальных уравнений гибких упругих стержней. Значительно расширено исследование пространственного винтового дефекта резонатора и его влияния на расщепление. Показано, что 2-я и 6-я гармоники винтового дефекта обладают взаимной корреляцией, приводящей к существенному росту расщепления. Кроме того, установлено значительное влияние на расщепление разности фаз между 2-й и 6-й гармониками винтового дефекта. Выполненное исследование показало, что при построении математических моделей неидеальных резонаторов необходимо учитывать взаимное влияние дефектов разного вида, различных гармоник дефекта одного вида, а также разницы фаз между гармониками дефектов одинаковой или разной природы. Обнаруженные эффекты оказывают существенное влияние на расщепление, а значит, их следует учитывать при моделировании ММГ и их балансировке.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Маслов А.А., Маслов Д.А., Меркурьев И.В., Ниналалов И.Г. Повышение точности микромеханического гироскопа с кольцевым резонатором в многомодовом режиме функционирования. *XXXII Санкт-Петербургская международная конференция по интегрированным навигационным системам: Сборник материалов конференции. Санкт-Петербург, 03–04 июня 2025 г., Концерн Центральный научно-исследовательский институт «Электроприбор»*. Санкт-Петербург, 2025, с. 214–217. EDN BZGHMC
- [2] Луний Б.С., Басараб М.А., Захарян Р.А. Рассеяние энергии колебаний полусферического резонатора в области крепления. *Гироскопия и навигация*, 2024, № 2 (125), с. 35–45. EDN EXPHRX
- [3] Нестеров И.И., Мальгин Н.В., Кутман А.Б., Торопков А.А. Высокоточные МЭМС инерциальные навигационные системы. *Экстремальная робототехника*, 2022, № 1 (33), с. 229–231.

- [4] Матвеев В.А. *Гироскоп — это просто*. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2012, 191 с.
- [5] Журавлев В.Ф., Климов Д.М. *Волновой твердотельный гироскоп*. Москва, Наука, 1985, 125 с.
- [6] Вахлярский Д.С., Гуськов А.М., Басараб М.А., Матвеев В.А. Численное исследование резонаторов ВТГ различной формы при наличии дефектов различного типа. *Наука и образование: научное издание МГТУ им. Н.Э. Баумана*, 2016, № 10, с. 1–22. DOI 10.7463/1016.0848188. EDN XEJZXF
- [7] Киселев Р.М., Сорокин Ф.Д. Описание динамики кольцевого микромеханического гироскопа с дефектом формы на основе модели гибких упругих криволинейных стержней. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2025, вып. 9. EDN QCDNNH
- [8] Басараб М.А., Кравченко В.Ф., Матвеев В.А. *Математическое моделирование физических процессов в гироскопии*. Москва, Радиотехника, 2005, 176 с. ISBN 5-88070-072-0. EDN QJPALD
- [9] Козубняк С.А. Расщепление собственных частот колебаний цилиндрического резонатора волнового твердотельного гироскопа, вызванное возмущением формы. *Вестник Московского государственного технического университета им. Н.Э. Баумана. Сер. Приборостроение*, 2015, № 3 (102), с. 39–49. EDN UBIZHN
- [10] Sorokin F., Vakhlyarsky D., Gouskov A. High rise of ring resonator frequency split due to combination of two harmonics of density defect. *Applied Mathematical Modelling*, 2022, vol. 103, pp. 376–387. DOI: 10.1016/j.apm.2021.10.038
- [11] Kiselev R.M. The Energy Method for Calculating Frequencies Splitting of MMG Ring Resonators. *Science, Engineering and Business: Conference Proceedings of the VI Interacademic conference for graduate students and young researchers, Moscow, April 16–18, BMSTU. Moscow*, 2024, pp. 232–237. EDN RGNQDO
- [12] Козубняк С.А. *Разработка методов расчёта расщепления спектра частот неидеального упругого чувствительного элемента волнового твердотельного гироскопа: Дис. ... канд. техн. наук*. Москва, МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2017, 156 с. EDN ВТНSOА
- [13] Киселев Р.М. Вычисление расщепления собственных частот колебаний кольцевого резонатора ММГ, вызванное отклонениям его геометрии. *Современное машиностроение. Наука и образование*, 2025, № 14, с. 151–162. DOI: 10.18720/SPBPU/2/id-107
- [14] Елисеев В.В., Авксентьев А.И. Модели упругих стержней в динамике гибких роторов. *Современное машиностроение. Наука и образование*, 2014, № 4, с. 335–343. EDN SMNKGP
- [15] Никабадзе М.У. О некоторых вопросах тензорного исчисления с приложениями к механике. *Современная математика. Фундаментальные направления*, 2015, т. 55, 194 с. EDN EUEXJF
- [16] Бидерман В.Л. *Теория механических колебаний*. Москва, URSS: Ленанд, 2017, 406 с.
- [17] Бидерман В.Л. *Механика тонкостенных конструкций. Статика*. Москва, URSS: Ленанд, 2017, 486 с.
- [18] Феодосьев В. И. *Сопrotивление материалов*. 16-е изд. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2016, 544 с. ISBN 978-5-7038-3874-7. EDN ZCOGYX
- [19] Светлицкий В.А. *Строительная механика машин. Механика стержней: в 2 томах*. Москва, Физматлит, 2009, т. 2, 384 с. ISBN 978-5-9221-1143-0

- [20] Серов М.В., Аверьянова Г.М., Карначева Е.В. Опыт применения вариационного принципа Гамильтона — Остроградского к практическим вопросам составления дифференциальных уравнений свободных малых колебаний. *Известия МГТУ МАМИ*, 2014, № 4 (22), с. 84–89.
- [21] Вавилов Н.А., Халин В.Г., Юрков А.В. *Mathematica для нематематика*. Москва, МЦНМО, 2021, 483 с. EDN RZQLNM
- [22] Косторной А.Н. *Кольцевой микромеханический гироскоп: дис. ... канд. техн. наук*. Раменское МО, АО «Инерциальные технологии «Технокомплекса», 2018, 128 с.

Статья поступила в редакцию 10.12.2025

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Киселев Р.М., Сорокин Ф.Д. Применение энергетического метода для вычисления расщепления частот собственных колебаний кольцевых резонаторов с пространственными дефектами. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2026, вып. 2. EDN YXHTTFP

Киселев Роман Михайлович — ассистент кафедр «Прикладная механика» и «Теория механизмов и машин» МГТУ им. Н.Э. Баумана.
e-mail: kiselev.rom@bmstu.ru

Сорокин Федор Дмитриевич — д-р техн. наук, профессор кафедры «Прикладная механика» МГТУ им. Н.Э. Баумана. e-mail: sorokinfd@bmstu.ru

Application of the Energy Method for Calculating the Ring Resonators Natural Oscillations Frequency Splitting With Spatial Defects

© R.M. Kiselev, F.D. Sorokin

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, 105005, Russian Federation

The energy-based method developed by the authors calculating the ring resonators natural oscillations frequency splitting in micromechanical gyroscopes is extended to resonators with spatial defects. Since splitting of natural frequencies has a significant impact on the accuracy of navigation instruments with ring resonators, effective methods are required to study the dynamics of such resonators. In previous publications the authors demonstrated that the energy method exhibits high convergence, accuracy, and simplicity in calculating the vibrations of resonators in their own plane, therefore, this method was chosen to study the dynamics of ring resonators with spatial defects. The energy method was applied to calculate the resonator natural frequencies splitting caused by a screw defect. The calculation results were confirmed using an alternative approach based on numerical integration of the differential equations of flexible elastic rods.

Keywords: micromechanical gyroscope, ring resonator, natural oscillation frequency splitting, energy method, Fourier method

REFERENCES

- [1] Maslov A.A., Maslov D.A., Merkuryev I.V., Ninalalov I.G. Povyshenie tochnosti mikromekhanicheskogo giroskopa s koltsevym rezonatorom v mnogomodovom rezhime funktsionirovaniya [Improving the accuracy of a micromechanical gyroscope with a ring resonator in a multimode mode of operation]. In: *XXXII Sankt-Peterburgskaya mezhdunarodnaya konferentsiya po integrirovannym navigatsionnym sistemam: Sbornik materialov konferentsii* [XXXII St. Petersburg international conference on integrated navigation systems: conference proceedings]. St. Petersburg, June 3–4, 2025, “Contsern “Central Scientific Research Institute “Electropribor”. St. Petersburg, 2025, pp. 214–217. EDN BZGHMC
- [2] Lunin B.S., Basarab M.A., Zakharyan R.A. Rasseyanie energii kolebaniy polusfericheskogo rezonatora v oblasti krepleniya [Energy dissipation of oscillations of a hemispherical resonator near the attachment region]. *Giroskopiya i Navigatsiya — Gyroscopy and Navigation*, 2024, no. 2 (125), pp. 35–45. EDN EXPHRX
- [3] Nesterov I.I., Malgin N.V., Kutman A.B., Toropkov A.A. Vysokotochnye MEMS inertsiyalnye navigatsionnye sistemy [High-precision MEMS inertial navigation systems]. *Extremalnaya robototekhnika — Extreme Robotics*, 2022, no. 1 (33), pp. 229–231.
- [4] Matveev V.A. *Girooskop — eto prosto* [A gyroscope is simply]. Moscow, Bauman Press, 2012, 191 p.
- [5] Zhuravlev V.F., Klimov D.M. *Volnovoy tverdotelnyy girooskop* [Wave solid-state gyroscope]. Moscow, Nauka Publ., 1985, 125 p.
- [6] Vakhlyarskiy D.S., Gus'kov A.M., Basarab M.A., Matveev V.A. Chislennoe issledovanie rezonatorov VTG razlichnoy formy pri nalichii defektov razlichnogo tipa [Numerical investigation of WSG resonators of various shapes in the presence of different types of defects]. *Nauka i obrazovanie — Science and Education of the Bauman MSTU*, 2016, no. 10, pp. 1–22. DOI: 10.7463/1016.0848188. EDN XEJZXF

- [7] Kiselev R.M., Sorokin F.D. Opisaniye dinamiki koltsevogo mikromekhanicheskogo giroskopa s defektom formy na osnove modeli gibkikh uprugikh krivolinyeynykh sterzhney [Description of the dynamics of a ring micromechanical gyroscope with a shape defect based on a flexible elastic curved rod model]. *Inzhenerny zhurnal: nauka i innovatsii — Engineering Journal: Science and Innovation*, 2025, iss. 9. EDN QCDNNH
- [8] Basarab M.A., Kravchenko V.F., Matveev V.A. *Matematicheskoe modelirovanie fizicheskikh protsessov v giroskopii* [Mathematical modeling of physical processes in gyroscope]. Moscow, Radiotekhnika Publ., 2005, 176 p. ISBN 5-88070-072-0. EDN QJPALD.
- [9] Kozubnyak S.A. Rasshepleniye sobstvennykh chastot kolebaniy tsilindricheskogo rezonatora volnovogo tverdotel'nogo giroskopa, vyzvannoe vozmuscheniem formy [Splitting of natural vibration frequencies of a cylindrical resonator of a wave solid-state gyroscope caused by shape perturbation]. *Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Series Instrument Engineering*, 2015, no. 3 (102), pp. 39–49. EDN UBIZHN
- [10] Sorokin F., Vakhlyarsky D., Gousov A. High rise of ring resonator frequency split due to combination of two harmonics of density defect. *Applied Mathematical Modelling*, 2022, vol. 103, pp. 376–387. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2021.10.038>
- [11] Kiselev R.M. The Energy Method for Calculating Frequencies Splitting of MMG Ring Resonators. In: *Science, Engineering and Business: Conference Proceedings of the VI Interacademic Conference for Graduate Students and Young Researchers, Moscow, April 16–18, BMSTU*. Moscow, 2024, pp. 232–237. EDN RGNQDO
- [12] Kozubnyak S.A. *Razrabotka metodov raschyota rasshchepeniya spektra chastot neidealnogo uprugogo chuvstvitel'nogo elementa volnovogo tverdotel'nogo giroskopa: Dis. ... kand. tekhn. nauk* [Development of methods for calculating frequency splitting of a non-ideal elastic sensitive element of a wave solid-state gyroscope: Diss. ... Cand. Sc. in Engineering]. Moscow, BMSTU, 2017, 156 p. EDN BTHSOA
- [13] Kiselev R.M. *Vychislenie rasshchepeniya sobstvennykh chastot kolebaniy kol'tsevogo rezonatora MMG, vyzvannoe otkloneniyami ego geometrii* [Calculation of natural frequency splitting of an MMG ring resonator caused by geometric deviations]. *Sovremennoe mashinostroenie. Nauka i obrazovanie*, 2025, no. 14, pp. 151–162. DOI: 10.18720/SPBPU/2/id-107
- [14] Eliseev V.V., Avksent'ev A.I. Modeli uprugikh sterzhney v dinamike gibkikh rotorov [Models of elastic rods in the dynamics of flexible rotors]. *Sovremennoe mashinostroenie. Nauka i obrazovanie — Modern Mechanical Engineering. Science and Education*, 2014, no. 4, pp. 335–343. EDN SMNKGP
- [15] Nikabadze M.U. O nekotorykh voprosakh tenzornogo ischisleniya s prilozheniyami k mekhanike [Topics on tensor calculus with applications to mechanics]. *Sovremennaya matematika. Fundamentalnye napravleniya — Contemporary Mathematics. Fundamental Directions*, 2015, vol. 55, 194 p. EDN EUEXJF
- [16] Biderman V.L. *Teoriya mekhanicheskikh kolebaniy* [Theory of mechanical vibrations]. Moscow, URSS: Lenand Publ., 2017, 406 p.
- [17] Biderman V.L. *Mekhanika tonkostennykh konstruktsiy. Statika* [Mechanics of thin-walled structures. Statics]. Moscow, URSS: Lenand Publ., 2017, 486 p.
- [18] Feodos'ev V.I. *Soprotivlenie materialov* [Strength of materials]. 16th ed. Moscow, Bauman Press, 2016, 544 p. ISBN 978-5-7038-3874-7. EDN ZCOGYX
- [19] Svetlitskiy V.A. *Stroitel'naya mekhanika mashin. Mekhanika sterzhney* [Structural mechanics of machines. Mechanics of rods]. In 2 vols. Moscow, Fizmatlit Publ., 2009, vol. 2, 384 p. ISBN 978-5-9221-1143-0

- [20] Serov M.V., Aver'yanova G.M., Karnacheva E.V. Opyt primeneniya variatsionnogo printsipa Gamiltona — Ostrogradskogo k prakticheskim voprosam sostavleniya differentsial'nykh uravneniy svobodnykh malykh kolebaniy [Experience in applying the Hamilton–Ostrogradsky variational principle to practical problems of formulating differential equations of free small vibrations]. *Izvestia MGTU MAMI*, 2014, no. 4 (22), pp. 84–89.
- [21] Vavilov N.A., Khalin V.G., Yurkov A.V. *Mathematica dlya nematematika* [Mathematics for non-mathematicians]. Moscow, MTSNMO Publ., 2021, 483 p. EDN RZQLNM
- [22] Kostornoy A.N. *Koltsevoy mikromekhanicheskiy giroskop: Dis. ... kand. tekhn. nauk* [Ring micromechanical gyroscope: PhD thesis ... Cand. Sc. in Engineering]. JSC “Inertial Technologies of Technocomplex”, 2018, 128 p.

Kiselev R.M., Assistant of the Departments of Applied Mechanics and Theory of Mechanisms and Machines, Bauman Moscow State Technical University.
e-mail: kiselev.rom@bmstu.ru

Sorokin F.D., Dr. Sc. (Eng.), Professor of the Department of Applied Mechanics, Bauman Moscow State Technical University. e-mail: sorokinfd@bmstu.ru