УДК 681.3 EDN DERLQV

К вопросу об аналитической оценке вероятностей состояний автоматизированной системы подготовки данных на применение летательных аппаратов

© С.А. Журбин

НИЦ ФГБУ «ЦНИИ ВКС» Минобороны России,
Московская обл., г. Королев, 141090, Российская Федерация

При проектировании автоматизированной системы управления применением летательных аппаратов возникает необходимость исследовать случайные процессы отказов и восстановлений агрегатов (элементов), составляющих основу технического обеспечения системы. Агрегатами могут являться автоматизированные рабочие места (АРМ) автоматизированной системы подготовки данных (АСПД), на каждом из которых решаются задачи по подготовке данных на применение летательных аппаратов. Такие исследования, например, проводятся с целью оценить вероятностно-временные характеристики АРМ или определить значения последних исходя из требований к показателям системы подготовки данных более общего характера. Чаще всего случайные процессы отказов и восстановлений технических средств можно отнести к марковским, для которых динамика перехода системы в различные состояния математически описывается системой дифференциальных уравнений (СДУ) Колмогорова. Решение упомянутой системы уравнений при конкретных значениях интенсивностей отказов и восстановлений технических средств и при ее небольшой размерности не составляет труда. Практический и теоретический интерес представляет решение СДУ Колмогорова произвольного порядка, когда количество АРМ АСПД заранее неизвестно и является предметом исследования. Представлено решение СДУ Колмогорова произвольного порядка при определенных допущениях, которые способствовали существенному упрощению СДУ. Приведенные результаты могут быть полезны при решении исследовательских задач, при проектировании организационно-технических систем, а также при подготовке тактико-технических заданий на разработку автоматизированных систем.

Ключевые слова: *марковский случайный процесс, состояние случайного процесса, интенсивность перехода случайного процесса из состояния в состояние, система дифференциальных уравнений Колмогорова, характеристическое уравнение, отказ, восстановление технических средств*

Введение. Надежность — одно из самых важных свойств современных автоматизированных систем (АС). От него зависят такие свойства АС, как качество и эффективность функционирования, безопасность эксплуатации, устойчивость при условии воздействия ряда факторов и т. д. [1–4]. Автоматизированная система подготовки данных (АСПД) на применение летательных аппаратов (ЛА) может быть эффективной только при условии ее высокой надежности.

Оценивать надежность АСПД можно с использованием таких показателей, как вероятность безотказной работы АС в течение некоторого промежутка времени, коэффициент готовности (для АС с восстановлением), среднее время наработки АС на отказ и т. д. [5].

Оценка показателей надежности АС чаще всего осуществляется на следующих этапах:

- при проектировании системы для определения параметров составляющих ее технических элементов, которые необходимы для удовлетворения предъявляемых к АС требований;
- ее разработки с целью оценки соответствия расчетных значений показателей надежности АС реальным;
- ее эксплуатации для выполнения анализа динамики старения системы [6–8].

Для исследования и оценки показателей надежности АС зачастую используют динамические модели отказов и восстановлений технических средств, основанные на случайных процессах (СП) Маркова с дискретными состояниями, которые описываются системой дифференциальных уравнений (СДУ) Колмогорова [9, 10]. Случайные процессы отказов и восстановлений автоматизированных рабочих мест (АРМ) для АС, включающих малое количество АРМ, описываются СДУ Колмогорова небольшого порядка, поэтому решать такие системы нетрудно. Теоретический и практический интерес вызывает решение задач, в которых требуется решение СДУ произвольного порядка n, например, когда величина n является предметом исследования.

Хочется надеяться, что читателей не смутит «возраст» примерно половины источников литературы, потому что они содержат результаты фундаментальных исследований, которые остаются актуальными в настоящее время и будут такими в перспективе.

Цель настоящей работы — получение аналитических выражений вероятностей состояний автоматизированной системы подготовки данных для системы с заранее неизвестным количеством автоматизированных рабочих мест, которые можно использовать для априорной оценки ряда характеристик АСПД.

Постановка задачи. Пусть АСПД на применения ЛА состоит из n АРМ, объединенных в вычислительную сеть (ВчС). Каждый из АРМ может находиться в работоспособном состоянии или в состоянии отказа (восстановления после отказа). Тогда все множество состояний сетевой системы можно описать с помощью графа состояний G, представленного на рис. 1.

Вершинами графа являются состояния системы S_i, а дуги графа соответствуют переходу системы из одного состояния в другое состояние. Веса этих дуг равны интенсивностям (вероятностям) перехода из одного состояния в другое, т. е. λ_{ik} — интенсивность перехода из состояния S_i в состояние S_k. В зависимости от числа неработоспособных АРМ граф состояний удобно разбить на взаимосвязанные уровни. Каждое состояние характеризуется количеством АРМ, находящихся в работоспособном состоянии к некоторому моменту времени t, и количеством

АРМ, находящихся в состоянии восстановления после отказа, т. е. можно выделить следующие состояния:

S_1 — все n АРМ системы находятся в работоспособном состоянии;

S_2 — только 1-е АРМ находится в состоянии восстановления;

S_3 — только 2-е АРМ находится в состоянии восстановления;

…………………………………………………………………..………..

$S_{C_n^1+C_n^0}$ — только n-е АРМ находится в состоянии восстановления;

$S_{C_n^1+C_n^0+1}$ — только 1-е и 2-е АРМ находятся в состоянии восстановления;

…………………………………………………..……………………..

S_{2^n} — все n АРМ находятся в состоянии восстановления.

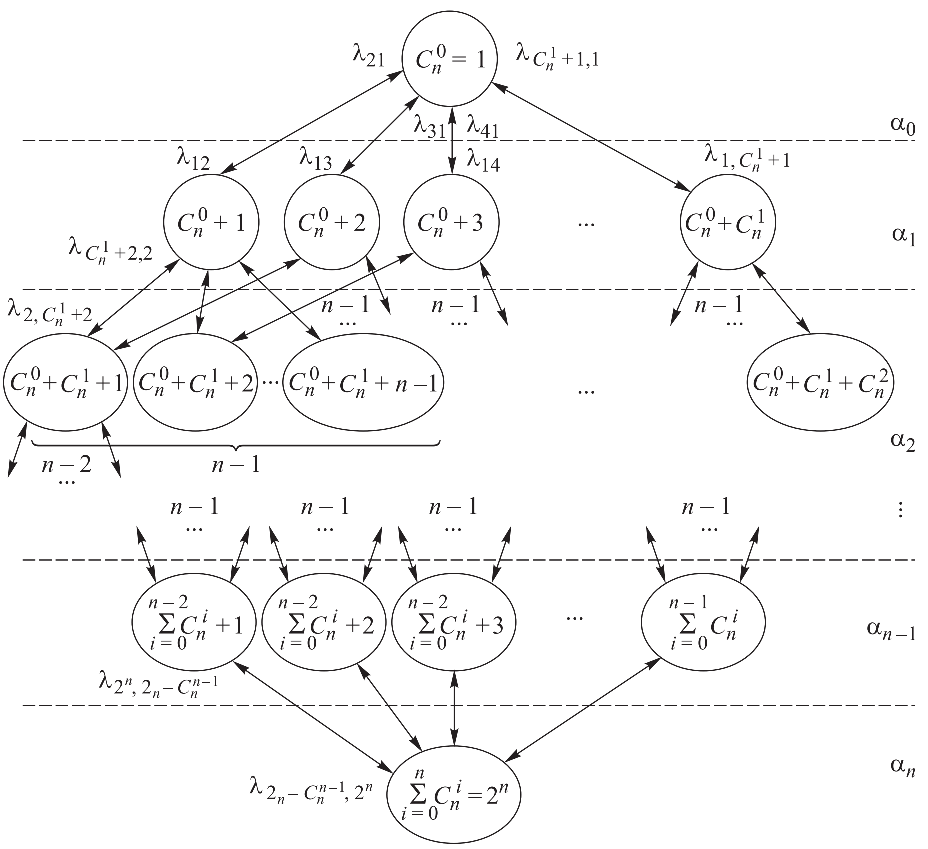

Рис. 1. Граф состояний G АСПД на применение ЛА с сетевой структурой

Граф G разбит на уровни α_i $(i=\overline{0,\ n})$. Каждый уровень содержит множество состояний с одинаковым количеством АРМ, находящихся в работоспособном состоянии и в состоянии восстановления. Тогда любое состояние системы принадлежит некоторому уровню:

$$S_k \in \alpha_m, \ (k = \overline{a, b}), \tag{1}$$

где $a = (1 + \sum_{j=0}^{m-1} C_n^j), \ b = \sum_{j=0}^{m} C_n^j.$

Количество неработоспособных АРМ на m-м уровне будет равно m, а количество работоспособных АРМ — $(n - m)$. В этом случае количество состояний на m-м уровне составит C_n^m.

Общее число возможных состояний системы определяется выражением

$$\sum_{i=0}^{n} C_n^i = 2^n, \tag{2}$$

где C_n^i — число сочетаний из n по i; n — общее число АРМ в АСПД; i — число АРМ, находящихся в текущий момент времени t в состоянии восстановления после отказа.

Представленный выше марковский процесс для системы, состоящей из n АРМ (см. рис. 1), описывается следующей СДУ Колмогорова [9, 11]:

$$\begin{cases} P_k'(t) = -P_k(t) \sum\limits_{\substack{i \in \psi \\ i \neq k}} \lambda_{ki} + \sum\limits_{\substack{j \in \psi \\ j \neq k}} \lambda_{jk} P_j(t), \ k = \overline{1, 2^n}; \\ P_1(0) = 1; \ P_2(0) = P_3(0) = \ldots = P_{2^n}(0) = 0; \ \sum\limits_{i=0}^{2^n} P_i(t), \end{cases} \tag{3}$$

где ψ — множество состояний, в которые (из которых) система может перейти из (в) состояния (состояние) S_k.

Если состояние $S_k \in \alpha_m$, то переходы в состояние S_k возможны только из состояний $S_i \in \alpha_{m-1}$ (из смежного верхнего уровня) и $S_j \in \alpha_{m+1}$ (из смежного нижнего уровня).

Рассмотрим случай, когда АРМ ВчС АСПД на применение ЛА оснащены идентичными техническими средствами (ТС), тогда интенсивности отказов и восстановлений АРМ будут одинаковыми, т. е.

$$\lambda_{ij} = \lambda \text{ и } \lambda_{ji} = \mu, \tag{4}$$

где λ и μ — значения интенсивностей отказов и восстановлений соответственно.

В этом случае граф G состояний АСПД примет вид, представленный на рис. 2.

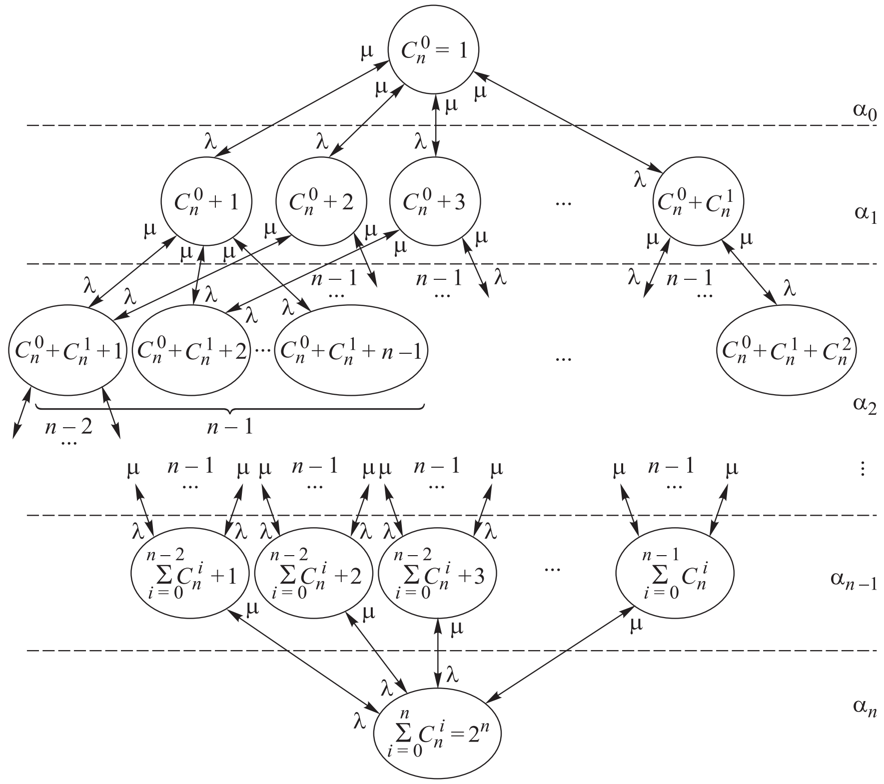

Рис. 2. Граф состояний G для случая, когда интенсивности отказов (восстановлений) всех АРМ равны

Условие идентичности ТС, которыми оснащены АРМ АСПД, приводит к изменению вида СДУ Колмогорова, т. е. систему (3) перепишем в виде

$$\begin{cases} P_1'(t) = -n\lambda P_1(t) + \sum\limits_{\substack{i\in\xi \\ S_i\in\alpha_1}} P_i(t); \\ P_k'(t) = -((n-l)\lambda + l\mu)P_k(t) + \lambda \sum\limits_{\substack{j\in\xi \\ S_j\in\alpha_{l-1}}} P_j(t) + \mu \sum\limits_{\substack{i\in\xi \\ S_i\in\alpha_{l+1}}} P_i(t),\ \ l=\overline{1,\, n-1}, \\ k = \overline{\sum\limits_{i=0}^{l-1} C_n^i + 1, \sum\limits_{i=0}^{l} C_n^i}; \\ P_{2^n}{}' = -n\mu P_{2^n}(t) + \lambda \sum\limits_{\substack{i\in\xi \\ S_i\in\alpha_n}} P_i(t); \\ P_1(0)=1;\ P_2(0)=P_3(0)=\ldots=P_{2^n}(0)=0;\ \sum\limits_{i=1}^{2^n} P_i(t)=1, \end{cases} \tag{5}$$

где n — количество АРМ, составляющих систему; k — номер состояния; l — номер уровня α, $S_k \in \alpha_l$; ξ — множество состояний, в которые (из которых) система может перейти из состояния S_k.

С учетом изложенного выше необходимо определить вероятности состояний АСПД на применение ЛА для каждого уровня графа состояний.

Решение задачи. Покажем, что при выполнении условия (4) вероятности состояний, принадлежащих одному уровню α, графы состояний будут равны между собой. Рассмотрим частный случай непрерывного марковского процесса с дискретными состояниями, который описывается системой уравнений (5).

Согласно предположению, переходы системы из состояния в состояние осуществляются мгновенно в некоторые фиксированные моменты времени, начиная с момента времени $t_0 = 0$. При этом система находится в состоянии S_0, в котором все АРМ остаются в работоспособном состоянии и выполняется условие:

$$P_0(0) = 1,\ P_1(0) = P_2(0) = \ldots = P_{2^n}(0) = 0.$$

В соответствии с принятым в работе [9], весами дуг направленного графа *G* будут переходные вероятности состояний цепи Маркова.

Поскольку для непрерывного марковского процесса справедливо условие (4), для переходных вероятностей дискретной цепи Маркова получим:

$$p_{ij} = p\ (i = 1,\ 2^n;\ \ j = 1,\ 2^n;\ i < j) \ \text{и}\ q_{ij} = q\,(i = 1,\ 2^n;\ \ j = 1,\ 2^n;\ i > j), \quad (6)$$

где p_{ij}, q_{ij} — вероятности перехода системы из состояния S_i в состояние S_j.

Согласно работе [9], для цепи Маркова вероятности состояний S_k $(k = \overline{1,\ 2^n})$ будут выражаться вектором состояний $\overline{P_\nu}$, имеющим вид

$$\overline{P_\nu} = \overline{P_0} \cdot \left\| P_{\text{пер}} \right\|^\nu, \quad (7)$$

где $\overline{P_0} = (P_0^1\ P_0^2 \ldots P_0^{2^n})$ — вектор начального состояния системы; P_0^i $(i = \overline{1,\ 2^n})$ — вероятность нахождения системы в состоянии S_i в начальный момент времени $t = 0$ $(\overline{P_0} = (\overbrace{1, 0, 0, \ldots, 0}^{2^n}))$; $\| P_{\text{пер}} \|$ — матрица переходных вероятностей; ν — степень, в которую возводится матрица $\| P_{\text{пер}} \|$.

В общем случае ν — это количество дискретных моментов времени, в которые осуществляется переход системы из состояния в состояние. В развернутом виде выражение (7) будет иметь вид

$$\overline{P_1} = (\overbrace{100...0}^{2^n}) \cdot \left. \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \; \overbrace{p...p}^{n} \; 0...........0 \\ q \; \overbrace{0...0}^{n} \; \overbrace{p...p}^{n-1} \; 0...0 \\ .... \\ 0............0 \; \overbrace{q...q}^{n} \; 0 \end{pmatrix}^{\nu}}_{2^n} \right\} 2^n, \;\; \nu = \overline{1, n}. \tag{8}$$

В некоторый момент времени система может перейти из состояния $S_k \in \alpha_\nu$ в состояние $S_i \in \alpha_{\nu+1}$ или в состояние $S_j \in \alpha_{\nu-1}$, поэтому переход системы из состояния $S_1 \in \alpha_0$ в состояние $S_{2^n} \in \alpha_n$ может осуществиться за ν моментов времени в соответствии с количеством уровней α графа *G*, лежащих ниже уровня α_0. Перемножив строку состояний и матрицу переходных вероятностей в (8), получим вектор $\overline{P_\nu}$. Для каждого $\nu = \overline{1, n}$ будем иметь вектора $\overline{P_\nu} = (P_\nu^1, P_\nu^2, ..., P_\nu^{2^n})$, для которых справедливо следующее соотношение:

$$\underbrace{P_2 = P_3 = ... = P_{C_n^0 + C_n^1}}_{\alpha_1}; \; \underbrace{P_{C_n^0 + C_n^1 + 1} = ... = P_{C_n^0 + C_n^1 + C_n^2}}_{\alpha_2}; ...;$$
$$\underbrace{P_{\sum\limits_{i=0}^{n-2} C_n^i + 1} = ... = P_{\sum\limits_{i=0}^{n-1} C_n^i}}_{\alpha_{n-1}} \tag{9}$$

где P_k $(k = \overline{2, 2^n - 1})$ — вероятность пребывания системы в *k*-м состоянии; α_i $(i = \overline{1, n-1})$ — уровни графа *G*.

Таким образом, вероятности пребывания системы в состояниях, принадлежащих одному уровню α, равны.

Приведенные выше рассуждения легко проверить на практике, например, для трех АРМ. Для такой системы количество состояний составит $2^3 = 8$, матрица переходных вероятностей будет иметь вид

$$P_{\text{пер}} = \begin{pmatrix} 0 & p & p & p & 0 & 0 & 0 & 0 \\ q & 0 & 0 & 0 & p & p & 0 & 0 \\ q & 0 & 0 & 0 & p & 0 & p & 0 \\ q & 0 & 0 & 0 & 0 & p & p & 0 \\ 0 & q & q & 0 & 0 & 0 & 0 & p \\ 0 & q & 0 & q & 0 & 0 & 0 & p \\ 0 & 0 & q & q & 0 & 0 & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & q & q & q & 0 \end{pmatrix},$$

а соответствующий начальному моменту времени t_0 вектор начального состояния будет выглядеть так: $\overline{P}_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

В момент времени t_1 система перейдет в состояние, принадлежащее уровню α_1. Тогда вероятности нахождения системы в различных состояниях будут вычисляться с помощью выражения $\overline{P}_1 = \overline{P}_0 \cdot P_{\text{пер}}$. Запишем выражение для вычисления вектора $\overline{P}_1$ в развернутом виде:

$$\overline{P}_1 = \overline{P}_0 \cdot P_{\text{пер}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & p & p & p & 0 & 0 & 0 & 0 \\ q & 0 & 0 & 0 & p & p & p & p \\ q & 0 & 0 & 0 & p & 0 & p & 0 \\ q & 0 & 0 & 0 & 0 & p & p & 0 \\ 0 & q & q & 0 & 0 & 0 & 0 & p \\ 0 & q & 0 & q & 0 & 0 & 0 & p \\ 0 & 0 & q & q & 0 & 0 & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & q & q & q & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & p & p & p & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

По аналогии с изложенным выше находятся вектора состояний системы $\overline{P}_2 = \overline{P}_1 \cdot P_{\text{пер}}$, $\overline{P}_3 = \overline{P}_2 \cdot P_{\text{пер}}$, $\overline{P}_4 = \overline{P}_3 \cdot P_{\text{пер}}$ для моментов времени t_2, t_3, t_4 соответственно. Хорошо видно, что результатом указанных произведений будут следующие вектора:

$$\overline{P}_2 = \begin{pmatrix} 3pq & 0 & 0 & 0 & 2p^2 & 2p^2 & 2p^2 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\overline{P}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 7p^2q & 7p^2q & 7p^2q & 0 & 0 & 0 & 6p^3 \end{pmatrix};$$

$$\overline{P}_4 = \begin{pmatrix} 21p^2q^2 & 0 & 0 & 0 & 20p^3q & 20p^3q & 20p^3q & 0 \end{pmatrix}.$$

Для наглядности сведем результаты вычислений в таблицу.

Значения вероятностей состояний АСПД БПР, содержащей три АРМ для последовательных фиксированных моментов времени

	Уровень графа							
	α_0	α_1			α_2			α_3
	Состояние системы							
Вероятности	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	S_7	S_8
$\overline{P}_0$	1	0	0	0	0	0	0	0
$\overline{P}_1$	0	p	p	p	0	0	0	0
$\overline{P}_2$	$3pq$	0	0	0	$2p^2$	$2p^2$	$2p^2$	0
$\overline{P}_3$	0	$7p^2q$	$7p^2q$	$7p^2q$	0	0	0	$6p^3$
$\overline{P}_4$	$21p^2q^2$	0	0	0	$20p^3q$	$20p^3q$	$20p^3q$	0

Анализ данных таблицы показывает, что вероятности нахождения системы в состояниях, принадлежащих одному уровню графа состояний G, равны. Последнее обстоятельство будет иметь место для любых значений времени перехода системы в различные состояния, в том числе и в случае непрерывности времени перехода. Следовательно, можно сделать вывод, что вероятности состояний, принадлежащих одному уровню α, для непрерывного марковского процесса будут равны. Воспользуемся этим обстоятельством при решении системы дифференциальных уравнений (5).

Исходя из изложенного, путем сложения и упрощения уравнений для каждого уровня α_i $(i = \overline{1,\ n-1})$ можно сократить размерность системы (5) с порядка 2^n до порядка $(n+1)$, перейдя к вероятностям нахождения системы в состояниях уровня α_i $(i = \overline{0,\ n})$. Обозначим указанные вероятности через $R_i(t)$ для каждого α_i $(i = \overline{0,\ n})$, и тогда СДУ Колмогорова (5) можно записать в следующем виде:

$$\begin{cases} R_k'(t) + ((n-k)\lambda + k\mu)R_k(t) - k\lambda R_{k-1}(t) - (n-k)\mu R_{k+1}(t) = 0, \ \ k = \overline{0,\ n}; \\ R_0(0) = 1; \ R_1(0) = R_2(0) = \ldots = R_n(0) = 0; \ \displaystyle\sum_{i=0}^{n} R_i(t) = 1, \end{cases} \tag{10}$$

где $R_{k-1}(t) = 0$ при $k = 0$.

Решение СДУ (10) проводилось по классической схеме путем сведения системы к одному уравнению, определению характеристического уравнения, его корней и далее общего и частного решений. Для СДУ произвольного порядка это представляется затруднительным, поэтому решение выполнялось по этапам.

Система дифференциальных уравнений Колмогорова (10) 2-го, 3-го, 4-го, 5-го и 6-го порядков была решена аналитически. Были получены характеристические уравнения 1-й, 2-й, 3-й, 4-й и 5-й степеней соответственно, которые представлены ниже:

$$x+(\lambda+\mu)=0;$$

$$x^2+3(\lambda+\mu)x+2(\lambda+\mu)^2=0;$$

$$x^3+6(\lambda+\mu)x^2+11(\lambda+\mu)^2x+6(\lambda+\mu)^3=0;$$

$$x^4+10(\lambda+\mu)x^3+35(\lambda+\mu)^2x^2+50(\lambda+\mu)^3x+24(\lambda+\mu)^4=0;$$

$$x^5+15(\lambda+\mu)x^4+85(\lambda+\mu)^2x^3+225(\lambda+\mu)^3x^2+274(\lambda+\mu)^4x+120(\lambda+\mu)^5=0.$$

В коэффициентах уравнений просматривается явная закономерность, позволившая предположить, что общий вид характеристического уравнения степени n будет иметь вид

$$a_{n,1}x^n+a_{n,2}(\lambda+\mu)x^{n-1}+a_{n,3}(\lambda+\mu)^2x^{n-2}+\ldots+a_{n,n+1}(\lambda+\mu)^n=0,$$

где $a_{n,k}$ $(k=\overline{1,\,n+1})$ — целочисленный коэффициент при k-м слагаемом характеристического уравнения степени n; $(\lambda+\mu)^{k-1}x^{n-k+1}$ — k-е слагаемое характеристического уравнения $(a_{n,1}=1)$.

Анализ вида коэффициентов характеристических уравнений, представленных выше, позволил определить рекуррентное выражение для расчета коэффициентов характеристического уравнения степени n:

$$a_{n,k}=na_{n-1,k-1}+a_{n-1,k}. \tag{11}$$

Для того чтобы получить коэффициенты характеристического уравнения порядка n с использованием (11), необходимо знать коэффициенты характеристического уравнения порядка (n – 1), для уравнения порядка (n – 1) необходимо знать коэффициенты уравнения порядка (n – 2) и т. д. до первого уравнения. Такое положение является неприемлемым для получения аналитического решения СДУ Колмогорова произвольного порядка. Поэтому в результате исследования зависимости (11) было получено аналитическое выражение для определения коэффициентов характеристического уравнения, зависящее только от порядка уравнения n и номера коэффициента в самом уравнении k:

$$\begin{gathered}a_{n,k}=\sum_{i_1=1}^{n-(k-2)}(n-i_1+1)\left(\sum_{i_2=1}^{n-i_1-(k-3)}(n-i_1-i_2+1)\times\ldots\times\left(\sum_{i_{k-2}=1}^{n-i_1-\ldots-i_{k-3}-1}(n-i_1-\ldots-i_{k-2}+1)\times\right.\right.\\ \left.\left.\times\left(\sum_{i_{k-1}=1}^{n-i_1-\ldots-i_{k-2}-0}(n-i_1-\ldots-i_{k-1}+1)\right)\underbrace{\ldots}_{k-1}\right)\right),\end{gathered} \tag{12}$$

где n — старшая степень характеристического уравнения; k $(k=\overline{2,\, n-1})$ — номер коэффициента характеристического уравнения; коэффициент при старшей степени уравнения равен 1 $(a_{n,1}=1)$.

Поскольку выражение (12) справедливо для любого n и любого k $(k=\overline{2,\, n+1})$, приведем правила формирования коэффициентов характеристического уравнения:

1) выражение (12) справедливо при $k>1$;

2) для верхней границы перемножаемых сумм должны выполняться условия

$$n-\sum_{d=1}^{k-2} i_d-(k-m)>0, \quad (k-m)\geq 0,$$

где m $(m=\overline{2,\, k})$ — номер слагаемого плюс один;

3) суммы, для которых условия не выполняются, исключаются из выражения (12).

Рассмотрим несколько примеров использования формулы (12) для вычисления коэффициентов характеристического уравнения.

Примем n = 5, k = 3 и вычислим коэффициент $a_{5,3}$. В соответствии с выражением (12), запишем

$$a_{5,3}=\sum_{i_1=1}^{5-(3-2)}(5-i_1+1)\left(\sum_{i_2=1}^{5-i_1-(3-3)}(5-i_1-i_2+1)\left(\sum_{i_3=1}^{5-i_1-i_2-(3-4)}(5-i_1-i_2-i_3+1)\times\right.\right.$$

$$\left.\left.\times\left(\sum_{i_4=1}^{5-i_1-i_2-i_3-(3-5)}(5-i_1-i_2-i_3-i_4+1)\right)\right)\right).$$

Заметим, что, начиная с третьего сомножителя, в верхней границе суммы $5-i_1-i_2-(3-4)$ выражение $(k-m)$ $(m=\overline{2,\, k})$ становится отрицательным, т. е. $m>k$, поэтому этот и последующие сомножители, для которых не выполняется правило 2, исключаются из рассмотрения. Тогда имеем

$$a_{5,3}=\sum_{i_1=1}^{5-(3-2)}(5-i_1+1)\left(\sum_{i_2=1}^{5-i_1-(3-3)}(5-i_1-i_2+1)\right)=$$

$$=\sum_{i_1=1}^{4}(5-i_1+1)\left(\sum_{i_2=1}^{5-i_1}(5-i_1-i_2+1)\right)=$$

$$=5(4+3+2+1)+4(3+2+1)+3(2+1)+2(1)=$$

$$=5\cdot 10+4\cdot 6+3\cdot 3+2=50+24+9+2=85.$$

Пусть теперь $n = 3$ и $k = 5$, тогда (12) будет иметь вид

$$a_{3,5} = \sum_{i_1=1}^{3-(5-2)}(3-i_1+1)\left(\sum_{i_2=1}^{3-i_1-(5-3)}(3-i_1-i_2+1)\left(\sum_{i_3=1}^{3-i_1-i_2-(5-4)}(3-i_1-i_2-i_3+1)\times\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.\times\left(\sum_{i_4=1}^{3-i_1-i_2-i_3-(5-5)}(3-i_1-i_2-i_3-i_4+1)\right)\right)\right)\right).$$

Видно, что значения верхних границ сумм принимают нулевые значения. Это означает, что у характеристического уравнения 3-й степени коэффициент $a_{3,5}=0$. Таким образом, имеет место следующая лемма.

Лемма 1. Пусть $a_{n,k}$ $(k=\overline{2,\,n+1})$ и $a_{n,1}=1$ — коэффициенты характеристического уравнения вида

$$a_{n,1}x^n + a_{n,2}(\lambda+\mu)x^{n-1} + a_{n,3}(\lambda+\mu)^2x^{n-2} + \ldots + a_{n,n+1}(\lambda+\mu)^n = 0$$

подчиняются рекуррентному выражению $a_{n,k} = na_{n-1,k-1} + a_{n-1,k}$ $\left(k=\overline{2,\,n+1}\right)$. Тогда для любого n и $k=\overline{2,\,n+1}$ коэффициент $a_{n,k}$ будет определяться выражением (12), т. е.

$$a_{n,k} = \sum_{i_1=1}^{n-(k-2)}(n-i_1+1)\left(\sum_{i_2=1}^{n-i_1-(k-3)}(n-i_1-i_2+1)\times\ldots\times\left(\sum_{i_{k-2}=1}^{n-i_1-\ldots-i_{k-3}-1}(n-i_1-\ldots-i_{k-2}+1)\times\right.\right.$$

$$\left.\left.\times\left(\sum_{i_{k-1}=1}^{n-i_1-\ldots-i_{k-2}-0}(n-i_1-\ldots-i_{k-1}+1)\right)\underbrace{\ldots}_{k-1}\right)\right).$$

Доказательство.

Докажем справедливость этого утверждения для любых значений n и k $(k=\overline{2,\,n+1})$. Пусть (12) справедливо для a_{ij} при $i=n$ и $j=k$, тогда в соответствии с (12) имеем:

$$a_{n,k} = \sum_{i_1=1}^{n-(k-2)}(n-i_1+1)\left(\sum_{i_2=1}^{n-i_1-(k-3)}(n-i_1-i_2+1)\times\ldots\times\left(\sum_{i_{k-2}=1}^{n-i_1-\ldots-i_{k-3}-1}(n-i_1-\ldots-i_{k-2}+1)\times\right.\right.$$

$$\left.\left.\times\left(\sum_{i_{k-1}=1}^{n-i_1-\ldots-i_{k-2}-0}(n-i_1-\ldots-i_{k-1}+1)\right)\underbrace{\ldots}_{k-1}\right)\right),$$

Вынесем сомножитель, для которого $i_1=1,$ за скобки. В результате получим следующее выражение для вычисления коэффициентов:

$$a_{n,k} = n\left(\sum_{i_2=1}^{n-1-(k-3)} (n-1-i_2+1)\times\ldots\times\left(\sum_{i_{k-2}=1}^{n-1-i_2-\ldots-i_{k-3}-1} (n-1-i_2-\ldots-i_{k-2}+1)\times\right.\right.$$

$$\left.\left.\times\left(\sum_{i_{k-2}=1}^{n-1-i_2-\ldots-i_{k-2}-1} (n-1-i_2-\ldots-i_{k-1}+1)\right)\underbrace{\ldots}_{k-1}\right)+ \qquad (13)$$

$$+\sum_{i_1=2}^{n-(k-2)} (n-i_1+1)\left(\sum_{i_2=1}^{n-i_1-(k-3)} (n-i_1-i_2+1)\times\ldots\times\left(\sum_{i_{k-2}=1}^{n-i_1-\ldots-i_{k-3}-1)} (n-i_1-\ldots-i_{k-2}+1)\times\right.\right.$$

$$\left.\left.\times\left(\sum_{i_{k-1}=1}^{n-i_1-\ldots-i_{k-2}-0)} (n-i_1-\ldots-i_{k-1}+1)\right)\underbrace{\ldots}_{k-1}\right).$$

В соответствии с выражением (12), можно записать следующее выражение для коэффициента $a_{n-1,k-1}$:

$$a_{n-1,k-1} = \sum_{i_2=1}^{n-1-(k-1-2)} (n-1-i_2+1)\left(\sum_{i_3=1}^{n-1-i_2-(k-1-3)} (n-1-i_2-i_3+1)\times\ldots\times\right.$$

$$\left.\times\left(\sum_{i_{k-1}=1}^{n-1-i_2-\ldots-i_{k-2}-0} (n-1-i_2-\ldots-i_{k-1}+1)\right)\underbrace{\ldots}_{k-2}\right).$$

Тогда выражение (13) можно представить следующим образом:

$$a_{n,k} = na_{n-1,k-1} + \sum_{i_1=2}^{n-(k-2)} (n-i_1+1)\left(\sum_{i_2=1}^{n-i_1-(k-3)} (n-i_1-i_2+1)\times\ldots\times\right.$$

$$\left.\times\left(\sum_{i_{k-2}=1}^{n-i_1-\ldots-i_{k-3}-1} (n-i_1-\ldots-i_{k-2}+1)\left(\sum_{i_{k-1}=1}^{n-i_1-\ldots-i_{k-1}-0} (n-i_1-\ldots-i_{k-1}+1)\right)\underbrace{\ldots}_{k-1}\right)\right). \qquad (14)$$

Индекс i_1 в первой сумме выражения (14) пробегает значения от 2 до $n-(k-2)$, а выражения под знаками сумм принимают значения $(n-\sum_{j=1}^{k-1} i_j+1)$.

Понизим нижнюю границу суммирования до 1. Чтобы не изменилось количество слагаемых, необходимо верхнюю границу суммирования также понизить на 1. После этого i_1 будет принимать значения от 1 до $n-1-(k-2)$. Для того чтобы не изменились значения выражений, стоящих под знаками сумм, необходимо n также уменьшить на 1, т. е. $(n-1-\sum_{j=1}^{k-1} i_j+1)$. В этом случае (14) примет вид

$$
\begin{gathered}
a_{n,k} = na_{n-1,k-1} + \sum_{i_1=1}^{n-1-(k-2)} (n-1-i_1+1) \times \\
\times \left(\sum_{i_2=1}^{n-1-i_1-(k-3)} (n-1-i_1-i_2+1) \times \ldots \times \left(\sum_{i_{k-2}=1}^{n-1-i_1-\ldots-i_{k-3}-1} (n-1-i_1-\ldots-i_{k-2}+1) \times \right.\right. \\
\left.\left. \times \left(\sum_{i_{k-1}=1}^{n-1-i_1-\ldots-i_{k-1}-0} (n-1-i_1-\ldots-i_{k-1}+1) \underbrace{\right)\ldots}_{k-1} \right).
\end{gathered} \tag{15}
$$

Очевидно, что в соответствии с (12) будем иметь

$$
\begin{gathered}
a_{n-1,k} = \sum_{i_1=1}^{n-1-(k-2)} (n-1-i_1+1) \times \\
\times \left(\sum_{i_2=1}^{n-1-i_1-(k-3)} (n-1-i_1-i_2+1) \times \ldots \times \left(\sum_{i_{k-2}=1}^{n-1-i_1-\ldots-i_{k-3}-1} (n-1-i_1-\ldots-i_{k-2}+1) \times \right.\right. \\
\left.\left. \times \left(\sum_{i_{k-1}=1}^{n-1-i_1-\ldots-i_{k-1}-0} (n-1-i_1-\ldots-i_{k-1}+1) \underbrace{\right)\ldots}_{k-1} \right).
\end{gathered}
$$

Тогда (15) можно записать так:

$$a_{n,k} = na_{n-1,k-1} + a_{n-1,k},$$

что соответствует выражению (11).

Следовательно, (12) подчиняется рекуррентному выражению (11) и справедливо для произвольного n и $k = \overline{2,\, n+1}$, что и требовалось доказать.

Вернемся к вычислению корней характеристических уравнений. Легко убедиться, что корнями уравнений 1-й, 2-й и 3-й степени являются

$$
\begin{aligned}
&x + (\lambda+\mu) = 0,\ x_1 = -(\lambda+\mu); \\
&x^2 + 3(\lambda+\mu)x + 2(\lambda+\mu)^2 = 0,\ x_1 = -(\lambda+\mu),\ x_2 = -2(\lambda+\mu); \\
&x^3 + 6(\lambda+\mu)x^2 + 11(\lambda+\mu)^2 x + 6(\lambda+\mu)^3 = 0,\ x_1 = -(\lambda+\mu), \\
&x_2 = -2(\lambda+\mu) x_3 = -3(\lambda+\mu).
\end{aligned} \tag{16}
$$

В связи с вышеприведенным справедлива следующая лемма.

Лемма 2. Корнями характеристического уравнения степени n, имеющего вид

$$x^n + a_{n,2}(\lambda+\mu)x^{n-1} + a_{n,3}(\lambda+\mu)^2 x^{n-2} + \ldots + a_{n,n+1}(\lambda+\mu)^n = 0, \tag{17}$$

где $a_{n,k}$ удовлетворяют лемме 1 (определяются с помощью выражения (12)), $(\lambda+\mu)$ — произвольное вещественное число и $(\lambda+\mu)\neq 0$, является последовательность:

$$x_1 = -(\lambda+\mu),\ x_2 = -2(\lambda+\mu),\ldots,\ x_n = -n(\lambda+\mu). \qquad (18)$$

Доказательство.

В соответствии с основной теоремой алгебры [13, 14], для любого произвольного многочлена справедливо равенство

$$Q_n(x) = \sum_{i=0}^{n} c_{n-i}x^i = \prod_{i=1}^{n}\left(x+b_i\right),$$

где b_i — вещественные (комплексные) числа, являющиеся корнями многочлена $Q_n(x)$.

Тогда, обозначив многочлены вида (17) через $H_i(x)$, где i — старшая степень многочлена, (16) можно записать в виде:

$$H_1(x) = x+(\lambda+\mu) = 0;$$
$$H_2(x) = (x+(\lambda+\mu))(x+2(\lambda+\mu)) = H_1(x)(x+2(\lambda+\mu));$$
$$H_3(x) = (x+(\lambda+\mu))(x+2(\lambda+\mu))(x+3(\lambda+\mu)) = H_2(x)(x+3(\lambda+\mu)).$$

Пусть для $H_{n-1}(x)$ справедливо (18), тогда

$$H_{n-1}(x) = x^{n-1} + a_{n-2,2}(\lambda+\mu)x^{n-2} + a_{n-1,3}(\lambda+\mu)^2x^{n-3} + \ldots + a_{n-1,n}(\lambda+\mu)^{n-1} =$$
$$= \prod_{i=1}^{n-1}\left(x+i\left(\lambda+\mu\right)\right),$$

где $a_{n-1,k}$ $\left(k=\overline{2,\ n}\right)$ вычисляются с помощью выражения (12).

Умножив $H_{n-1}(x)$ на многочлен первой степени $\left(x+n\left(\lambda+\mu\right)\right)$, получим:

$$H_{n-1}(x)\left(x+n\left(\lambda+\mu\right)\right) =$$
$$= \left(x^{n-1} + a_{n-1,2}\left(\lambda+\mu\right)x^{n-2} + a_{n-1,3}\left(\lambda+\mu\right)^2 x^{n-3} + \ldots + a_{n-1,n}\left(\lambda+\mu\right)^{n-1}\right)\times$$
$$\times\left(x+n\left(\lambda+\mu\right)\right) = \left(x^{n-1} + a_{n-1,2}\left(\lambda+\mu\right)x^{n-2} + a_{n-1,3}\left(\lambda+\mu\right)^2 x^{n-3} + \ldots + a_{n-1,n}\left(\lambda+\mu\right)^{n-1}\right)x +$$
$$+\left(x^{n-1} + a_{n-1,2}\left(\lambda+\mu\right)x^{n-2} + a_{n-1,3}\left(\lambda+\mu\right)^2 x^{n-3} + \ldots + a_{n-1,n}\left(\lambda+\mu\right)^{n-1}\right)\left(n\left(\lambda+\mu\right)\right).$$

Раскрыв скобки, можно записать:

$$H_{n-1}(x)\left(x+n(\lambda+\mu)\right)=$$
$$=\left(x^n+a_{n-1,2}(\lambda+\mu)x^{n-1}+a_{n-1,3}(\lambda+\mu)^2x^{n-2}+\ldots+a_{n-1,n}(\lambda+\mu)^{n-1}x\right)+$$
$$+\left(n(\lambda+\mu)x^{n-1}+na_{n-1,2}(\lambda+\mu)^2x^{n-2}+na_{n-1,3}(\lambda+\mu)^3x^{n-3}+\ldots+na_{n-1,n}(\lambda+\mu)^n\right)=$$
$$=x^n+\left(a_{n-1,2}+n\right)(\lambda+\mu)x^{n-1}+$$
$$+\left(na_{n-1,2}+a_{n-1,3}\right)(\lambda+\mu)^2x^{n-2}+\ldots+\left(na_{n-1,n-1}+a_{n-1,n}\right)(\lambda+\mu)^{n-1}x+$$
$$+na_{n-1,n}(\lambda+\mu)^n.$$

Коэффициенты при $(\lambda+\mu)x^{n-1}$ и $(\lambda+\mu)^n$ можно представить в виде

$$\left(a_{n-1,2}+n\right)=\left(na_{n-1,1}+a_{n-1,2}\right);\quad na_{n-1,n}=\left(na_{n-1,n}+a_{n-1,n+1}\right),$$

так как $a_{n-1,1}=1$ и $a_{n-1,n+1}=0.$ Из приведенного следует, что коэффициенты многочлена $H_n(x)$ при $(\lambda+\mu)^{k-1}x^{n-k+1}$ $\left(k=\overline{2,\,n+1}\right)$ подчиняются рекуррентному выражению (11), следовательно, многочлен $H_n(x)$ удовлетворяет условиям теоремы. Таким образом, корнями характеристического уравнения степени n является последовательность (18), что и требовалось доказать.

После нахождения коэффициентов характеристического уравнения $a_{n,k}$ порядка n и его корней можно получить общее решение дифференциального уравнения в следующем виде [15, 16]:

$$R_0(t)=C_0+C_1e^{-(\lambda+\mu)t}+C_2e^{-2(\lambda+\mu)t}+\ldots+C_ne^{-n(\lambda+\mu)t}=\sum_{i=0}^{n}C_ie^{-i(\lambda+\mu)t},\quad(19)$$

где C_i $\left(i=\overline{0,\,n}\right)$ — постоянные интегрирования, которые определяются из условий краевой задачи (10).

С учетом выше изложенных рассуждений система (10) была решена аналитически для n = 1, 2, 3, 4. Полученные результаты позволили сформулировать следующую лемму.

Лемма 3. Дана краевая задача (10). Поскольку $R_k(t)$ $(k=\overline{0,\,n})$ являются непрерывными на интервале $[0,\,+\infty[$, краевая задача (10) удовлетворяет теореме о существовании и единственности решения [15, 16]. Пусть для (10) выполняются (11) и леммы 1 и 2. Тогда решением краевой задачи (10) будет множество функций:

$$R_k(t)=\left(1-P(t)\right)^kP^{n-k}(t),\ k=\overline{0,\,n},\ \text{ где }\ P(t)=\frac{\mu}{\lambda+\mu}+\frac{\lambda}{\lambda+\mu}e^{-(\lambda+\mu)t}.\quad(20)$$

Доказательство.

Доказательством теоремы будет удовлетворение решения (20) краевой задаче (10). Подставим (20) в систему уравнений (10) (для наглядности система (10) приведена ниже):

$$\left\{ R_k'(t) + \left((n-k)\lambda + k\mu \right) R_k(t) - k\lambda R_{k-1}(t) - (n-k)\mu R_{k+1}(t) = 0, \quad k = \overline{0,\, n}. \right.$$

Обозначив через A_k выражение

$$A_k = \left((n-k)\lambda + k\mu \right) R_k(t) - k\lambda R_{k-1}(t) - (n-k)\mu R_{k+1}(t), \quad k = \overline{0,\, n},$$

перепишем систему (10) в виде

$$R_k'(t) + A_k = 0, \quad k = \overline{0,\, n}. \tag{21}$$

Найдем $R_k'(t)$. Поскольку

$$R_k(t) = \left(1 - P(t)\right)^k P^{n-k}(t) \tag{22}$$

и $P(t)$ (для краткости будем писать P) — сложная функция,

$$\begin{gathered} R_k'(t) = \left((1-P)^k \right)' P^{n-k} + (1-P)^k \left(P^{n-k} \right)' = k(1-P)^{k-1} (1-P)' P^{n-k} + \\ + (1-P)^k (n-k) P^{n-k-1} P' = -kP'(1-P)^{k-1} P^{n-k} + \\ + (n-k) P'(1-P)^k P^{n-k-1} = P'(1-P)^{k-1} P^{n-k-1} \left(-kP + (n-k)(1-P) \right) = \\ = P'(1-P)^{k-1} P^{n-k-1} \left(-nP + (n-k) \right). \end{gathered} \tag{23}$$

Поскольку

$$P(t) = \frac{\mu}{\lambda + \mu} + \frac{\lambda}{\lambda + \mu} e^{-(\lambda + \mu)t},$$

$$P'(t) = -\lambda e^{-(\lambda + \mu)t} = -(\lambda + \mu) P(t) + \mu.$$

Тогда (23) можно переписать в следующем виде:

$$\begin{gathered} R_k'(t) = \left(-(\lambda + \mu) P + \mu \right) (1-P)^{k-1} P^{n-k-1} \left(-nP + (n-k) \right) = \\ = (1-P)^{k-1} P^{n-k-1} \left((\lambda + \mu) nP^2 - P\left(\lambda(n-k) + \mu(2n-k) \right) + \mu(n-k) \right). \end{gathered} \tag{24}$$

С учетом (22) найдем выражение для A_k:

$$A_k = \left(\left(n-k\right)\lambda + k\mu\right) R_k(t) - k\lambda R_{k-1}(t) - \left(n-k\right)\mu R_{k+1}(t) =$$

$$= \left(\left(n-k\right)\lambda + k\mu\right)\left(1-P\right)^k P^{n-k} - k\lambda\left(1-P\right)^{k-1} P^{n-k+1} -$$

$$-\left(n-k\right)\mu\left(1-P\right)^{k+1} P^{n-k-1} = \left(1-P\right)^{k-1} P^{n-k-1} \times$$

$$\times\left(\left(\left(n-k\right)\lambda + k\mu\right)\left(1-P\right)P - k\lambda P^2 - \left(n-k\right)\mu\left(1-P\right)^2\right) =$$

$$= \left(1-P\right)^{k-1} P^{n-k-1}\left(\left(n-k\right)\lambda P + k\mu P - \left(n-k\right)\lambda P^2 - k\mu P^2 -\right.$$

$$\left. - k\lambda P^2 - \left(n-k\right)\mu + 2\left(n-k\right)\mu P - \left(n-k\right)\mu P^2\right) =$$

$$= \left(1-P\right)^{k-1} P^{n-k-1}\left(P\left(\left(n-k\right)\lambda + k\mu + 2\left(n-k\right)\mu\right) -\right.$$

$$\left. - P^2\left(\left(n-k\right)\lambda + k\mu + k\lambda + \left(n-k\right)\mu\right) - \left(n-k\right)\mu\right) =$$

$$= \left(1-P\right)^{k-1} P^{n-k-1}\left(P^2 n\left(\lambda+\mu\right) + P\left(\lambda\left(n-k\right) + \mu\left(2n-k\right)\right) - \mu\left(n-k\right)\right).$$

С учетом приведенных выкладок, можно получить

$$R_k'(t) = -A_k \Rightarrow R_k'(t) + A_k = 0 \quad \text{для} \quad k = \overline{0,\, n}.$$

Следовательно, аналитическим решением краевой задачи (10) является (20), что и требовалось доказать.

Заключение. Результаты представленных исследований получили практическое применение при разработке математической модели функционирования автоматизированных систем критических приложений (систем с потенциально опасными последствиями в результате возникновения ошибок их функционирования) с сетевой структурой [17], а также при разработке предложений по определению количественного состава АРМ однородной вычислительной сети и оценке требуемых значений показателей их надежности и производительности [18].

Кроме того, полученные результаты могут быть использованы в исследованиях поведения сложных организационно-технических систем различного назначения и при оценке показателей их основных свойств.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Гнеденко Б.В., Беляев Ю.К., Соловьев А.Д. *Математические методы в теории надежности*. Москва, Наука, 1965, 524 с.

[2] Шубинский И.Б. Надежные отказоустойчивые информационные системы. Методы синтеза. *Журнал Надежность*, 2016, № 2, 546 с.

[3] Половко А.М., Гуров С.В. *Основы теории надежности*. 2-е изд., перераб. и доп. Санкт-Петербург, БХВ-Петербург, 2006, 704 с.

[4] Иванов А.К. *Проектирование устойчивой АСУ*. Ульяновск, УлГТУ, 2002, 144 с.

[5] ГОСТ 27.002–2015. *Надежность в технике. Основные понятия. Термины и определения*. Москва, Межгосударственный совет по стандартизации метрологии и сертификации, 2017, 37 с.

[6] РД 50-492–84. *Методика оценки научно-технического уровня АСУ. Типовые положения*. Москва, Изд-во стандартов, 1985, 14 с.

[7] ГОСТ 34.601–90. *Автоматизированные системы. Стадии создания. Комплекс стандартов на автоматизированные системы*. Москва, Государственный комитет СССР по управлению качеством продукции и стандартам, 1992, 6 с.

[8] Сарвин А.А., Абакулина Л.И., Готшальк О.А. *Диагностика и надежность автоматизированных систем*. Санкт-Петербург, СЗТУ, 2003, 69 с.

[9] Волков И.К., Зуев С.М., Цветкова Г.М. *Случайные процессы*. Москва, МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1999, 448 с.

[10] Казаков В.Л. *Введение в теорию Марковских процессов и некоторые радиотехнические задачи*. Москва, Сов. радио, 1973, 232 с.

[11] Вентцель Е.С. *Теория вероятностей*. Москва, Наука, 1969, 576 с.

[12] Голинкевич Т.А. *Прикладная теория надежности*. Москва, Высшая школа, 1977, 160 с.

[13] Корн Г., Корн Т. *Справочник по математике для научных работников и инженеров*. Москва, Наука, 1968, 720 с.

[14] Бермант А.Ф., Араманович И.Г. *Краткий курс математического анализа*. Изд. 4-е, перераб. и доп. Москва, Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1966, 735 с.

[15] Каплан И.А. *Практические занятия по высшей математике. Дифференциальное и интегральное исчисление*. Харьков, Харьковский гос. ун-т, 1968, 250 с.

[16] Фихтенгольц Г.М. *Курс дифференциального и интегрального исчисления*. Т. 1. Изд. 5-е, доп. Москва, Гос. изд-во физ.-мат. лит-ры, 1962, 607 с.

[17] Андреев А.Г., Журбин С.А., Казаков Г.В. Математическая модель функционирования автоматизированных систем критических приложений с сетевой структурой. *Сборник докладов научно-технической конференции*. 4 ЦНИИ МО РФ, 2016.

[18] Журбин С.А., Казаков Г.В. Подход к разработке предложений по определению количественного состава технических объектов однородной вычислительной сети и оценке требуемых значений показателей их надежности. *XLII Академические чтения по космонавтике. Сборник трудов*. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2017, с. 461.

Статья поступила в редакцию 06.10.2025

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Журбин С.А. К вопросу об аналитической оценке вероятностей состояний автоматизированной системы подготовки данных на применение летательных аппаратов. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2026, вып. 1. EDN DERLQV

Журбин Сергей Александрович — старший научный сотрудник, НИЦ (г. Королев) ФГБУ «ЦНИИ ВКС» Минобороны России; автор имеет более 40 работ в области обоснования требований к автоматизированным системам управления, системного анализа, проектирования и оценки показателей качества АСУ.
e-mail: serdgo4@yandex.ru

On the Probabilities Analytical Assessment of Automated Data Preparation System States for Aircraft Application

© S.A. Zhurbin

NITS (Korolyov) Federal State Budgetary Institution “Central Research Institute of Aerospace Forces” of the Ministry of Defence of Russia,
Moscow region, Korolyov, 141090, Russian Federation

When designing an automated data preparation system (ADPS) for aircraft application, it becomes necessary to study random processes of failures and recoveries of units (elements) forming the basis of the system technical support. These units can be automated workstations (AWS) of the ADPS, each of which solves the tasks of preparing data for aircraft application. Such researches are conducted, for example, to evaluate the probabilistic and temporal characteristics of the AWS, or to determine the values of the latter ones based on the requirements for more general data preparation systems. In most cases, random processes of failures and recoveries of technical means can be classified as Markov processes, for which the dynamics of system transitions between different states are mathematically described by a system of Kolmogorov differential equations (SDE). The solution of the mentioned SDE for specific values of the intensities of failures and restorations of technical means and for its small dimension is not difficult. The solution of the Kolmogorov SDE of arbitrary order is of practical and theoretical interest when the number of ASPD workstations is not known in advance and is the subject of research. The article presents the solution of the Kolmogorov SDE of arbitrary order under certain assumptions that significantly simplified the SDE. The results presented by the author can be useful in solving research problems, designing organizational and technical systems, and preparing tactical and technical specifications for the development of automated systems.

Keywords: *Markov random process, state of a random process, intensity of transition of a random process from state to state, Kolmogorov system of differential equations, characteristic equation, failure, restoration of technical means*

REFERENCES

[1] Gnedenko B.V., Belyaev Yu.K., Solovyov A.D. *Matematicheskie metody v teorii nadezhnosti* [Mathematical methods in reliability theory]. Moscow, Nauka Publ., 1965, 524 p.
[2] Shubinsky I.B. Nadezhnye otkazoustoichivye informatsionnye sistemy. Metody sinteza [Reliable fault-tolerant information systems. Methods of synthesis]. *Dependability Journal*, 2016, no. 2, 546 p.
[3] Polovko A.M., Gurov S.V. *Osnovy teorii nadezhnosti* [Fundamentals of reliability theory]. 2nd ed., revised and enlarged. St. Petersburg, BHV–Petersburg Publ., 2006, 704 p.
[4] Ivanov A.K. *Design of a Sustainable Automated Control System*. Ulyanovsk, Ulyanovsk State Technical University, 2002, 144 p.
[5] GOST 27.002–2015. *Nadezhnost v tekhnike. Osnovnye ponyatiya. Terminy i opredeleniya* [Dependability in engineering. Basic concepts. Terms and definitions]. Moscow, Interstate Council for Standardization, Metrology and Certification Publ., 2017, 37 p.
[6] RD 50-492–84. *Metodika otsenki nauchno-tekhnicheskogo urovnya ASU. Tipovye polozheniya* [Methodology for assessing the scientific and technical level of automated control systems. Standard provisions]. Moscow, Standards Publ., 1985, 14 p.

[7] GOST 34.601–90. *Avtomatizirovannye sistemy. Stadii sozdaniya. Kompleks standartov na avtomatizirovannye sistemy* [Automated systems. Stages of creation. Set of standards for automated systems]. Moscow, State Committee of the USSR for Quality Management and Standards Publ., 1992, 6 p.

[8] Sarvin A.A., Abakulina L.I., Gotshalk O.A. *Diagnostika i nadezhnost avtomatizirovannykh sistem* [Diagnostics and reliability of automated systems]. St. Petersburg, North-West Technical University Publ., 2003, 69 p.

[9] Volkov I.K., Zuev S.M., Tsvetkova G.M. *Sluchaynye protsessy* [Random processes]. Moscow, Bauman Moscow State Technical University Publ., 1999, 448 p.

[10] Kazakov V.L. *Vvedenie v teoriyu Markovskikh protsessov i nekotorye radiotekhnicheskie zadachi* [Introduction to the theory of Markov processes and some radio engineering problems]. Moscow, Sovetskoe Radio Publ., 1973, 232 p.

[11] Ventzel E.S. *Teoriya veroyatnostey* [Probability theory]. Moscow, Nauka Publ., 1969, 576 p.

[12] Golinkievich T.A. *Prikladnaya teoriya nadezhnosti* [Applied reliability theory]. Moscow, HSE University Publ., 1977, 160 p. (Transition from Markov chains to processes).

[13] Korn G., Korn T. *Spravochnik po matematike dlya nauchnykh rabotnikov i inzhenerov* [Mathematical handbook for scientists and engineers]. Moscow, Nauka Publ., 1968720 p.

[14] Bermant A.F., Aramanovich I.G. *Kratkiy kurs matematicheskogo analiza* [A short course of mathematical analysis]. 4th ed., rev. and enlarged. Moscow, Nauka Publ., Main Editorial Office of Physical and Mathematical Literature, 1966, 735 p.

[15] Kaplan I.A. *Prakticheskie zanyatiya po vysshey matematike. Differentsialnoe i integralnoe ischislenie* [Practical classes in higher mathematics. Differential and integral calculus]. Kharkov, Kharkov State University Publ., 1968, 250 p.

[16] Fikhtengolts G.M. *Kurs differentsialnogo i integralnogo ischisleniya. Vol. 1* [A course of differential and integral calculus]. 5th ed., enlarged. Moscow, State Publishing House of Physical and Mathematical Literature, 1962, 607 p.

[17] Andreev A.G., Zhurbin S.A., Kazakov G.V. *Matematicheskaya model' funktsionirovaniya avtomatizirovannykh sistem kriticheskikh prilozheniy s setevoy strukturoy* [Mathematical model of functioning of automated systems of critical applications with a network structure]. In: *Sbornik dokladov nauchno-tekhnicheskoy konferentsii* [Proceedings of the scientific and technical conference]. 4th Central Research Institute of the Ministry of Defence of the Russian Federation, 2016.

[18] Zhurbin S.A., Kazakov G.V. *Podkhod k razrabotke predlozheniy po opredeleniyu kolichestvennogo sostava tekhnicheskikh ob"ektov odnorodnoy vychislitelnoy seti i otsenke trebuemykh znacheniy pokazateley ikh nadezhnosti* [An approach to developing proposals for determining the quantitative composition of technical objects of a homogeneous computing network and assessing the required values of their reliability indicators]. In: XLII Academic Space Conference, Dedicated to the Memory of Academician S.P. Korolev and Other Outstanding National Scientists — Pioneers of Space Exploration. Proceedings. Moscow, Bauman Moscow State Technical University Publ., 2017, p. 461.

Zhurbin S.A., senior researcher at the Scientific Research Center (Korolyov) of the Federal State Budgetary Institution “Central Research Institute of Aerospace Forces” of the Ministry of Defense of the Russian Federation; author of more than 40 works in the field of substantiation of requirements for automated control systems. e-mail: serdgo4@yandex.ru