

Математическое моделирование эффекта Джанибекова с использованием переменных Андуайе — Депри

© А.И. Игнатов¹, А.А. Ермолина¹, А.Г. Петров²

¹МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Российская Федерация

²Институт проблем механики имени А.Ю. Ишлинского РАН,
Москва, 119526, Российская Федерация

Исследованы два случая углового движения абсолютно твердого тела относительно точки, движущейся равномерно и прямолинейно. В первом случае движение тела рассматривается при воздействии на него внешнего момента потенциальной силы, во втором случае — при отсутствии каких-либо моментов. Составлена математическая модель, описывающая угловое движение тела с использованием переменных Андуайе — Депри. Приведены результаты численного моделирования при условии, что траектория движения конца вектора кинетического момента тела имеет малое отклонение от сепаратрис. Указанное условие определяет угловое движение тела, называемое эффектом Джанибекова. Показаны различия в угловом движении тела при наличии и отсутствии внешнего момента потенциальных сил. Приведена аналитическая зависимость, позволяющая оценить период изменения угла нутации тела в случае отсутствия внешних моментов.

Ключевые слова: уравнения Эйлера — Пуассона, эффект Джанибекова, интерпретация Мак-Кулага, переменные Андуайе — Депри

Введение. Дважды Герой СССР летчик-космонавт В.А. Джанибеков, выполняя свой пятый космический полет на борту космической станции «Салют-7» 25 июня 1985 г., наблюдал в условиях невесомости, как закрученная и отпущенная в пространство гайка-барашек начинала прямолинейное движение с вращением вокруг своей оси симметрии, совпадающей с осью резьбы гайки. Внезапно без видимых причин направление этой оси в пространстве изменялось на 180°, при этом направление движения гайки оставалось прежним. Такие развороты повторялись через равные промежутки времени [1]. Описанное выше движение гайки получило название «эффект Джанибекова».

Эффект Джанибекова был позднее неоднократно воспроизведен и наблюдался во время многочисленных демонстраций на борту Международной космической станции (МКС). В частности, серия экспериментов с различными твердыми телами, включая цилиндры, кубы и прямые прямоугольные призмы, была проведена на борту МКС Д.К. Бербэнком и А.Н. Шкаплеровым, членами 30-й экспедиции [2].

По сути, эффект Джанибекова представляет собой очень эффектную демонстрацию неустойчивого углового движения твердого тела, закрученного относительно оси, соответствующей среднему из трех разных значений главных центральных моментов инерции. В механике

такое движение было описано еще в 1834 г. в работе Л. Пуансо «Новая теория вращения тел» [3].

Данная работа посвящена численному моделированию углового движения твердого тела и выбору значений параметров его движения, позволяющих реализовать эффект Джанибекова.

Цель исследования — выявить влияние на рассматриваемое движение тела отсутствия или наличия внешнего момента потенциальных сил.

Актуальность исследования и анализа углового движения твердого тела обусловлена возможностью применения полученных результатов при анализе углового движения космических аппаратов [2, 4–6], вращения небесных тел [7] и других, более сложных, механических систем.

Угловое движения твердого тела. Считаем, что центр масс твердого тела — точка O — движется равномерно и прямолинейно. Введем две системы координат. Начало инерциальной системы координат $OX_1X_2X_3$ свяжем с центром масс тела, базисные орты этой системы обозначим $\bar{E}_1, \bar{E}_2, \bar{E}_3$. В этой системе координат тело совершает угловое (вращательное) движение относительно точки O . Вторая система координат $Ox_1x_2x_3$ является подвижной, она образована главными центральными осями инерции тела, базисные орты этой системы обозначим $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$.

Матрицу перехода от системы $OX_1X_2X_3$ к системе $Ox_1x_2x_3$ обозначим $\mathbf{D} = (\bar{E}_1, \bar{E}_2, \bar{E}_3)$ и параметризуем углами Эйлера ψ, θ, φ , которые введем следующим образом. Система $OX_1X_2X_3$ переводится в систему $Ox_1x_2x_3$ тремя последовательными поворотами (рис. 1):

- 1) на угол прецессии ψ вокруг оси OX_2 ;
- 2) на угол нутации θ вокруг новой оси Ox'_1 (\bar{n} — единичный орт оси Ox'_1);
- 3) на угол собственного вращения φ вокруг оси Ox''_2 , полученной после первых двух поворотов и совпадающей с осью Ox_2 .

Положительное направление отсчета углов Эйлера противоположно направлению движения часовой стрелки, если смотреть на соответствующий поворот с положительного направления оси, относительно которой он осуществляется. Матрица перехода \mathbf{D} имеет вид

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & 0 & -\sin \varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \varphi & 0 & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \psi & 0 & -\sin \psi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \psi & 0 & \cos \psi \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos \varphi \cos \psi - \sin \varphi \sin \psi \cos \theta & \sin \varphi \sin \theta & -\cos \varphi \sin \psi - \cos \psi \sin \varphi \cos \theta \\ \sin \psi \sin \theta & \cos \theta & \cos \psi \sin \theta \\ \sin \varphi \cos \psi + \cos \varphi \sin \psi \cos \theta & -\cos \varphi \sin \theta & -\sin \varphi \sin \psi + \cos \psi \cos \varphi \cos \theta \end{pmatrix},$$

где $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, i = \overline{1,3}$, — направляющие косинусы в системе $Ox_1x_2x_3$ ортов $\bar{E}_1, \bar{E}_2, \bar{E}_3$ соответственно, т. е.

$$\bar{E}_1 = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)^T, \bar{E}_2 = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)^T, \bar{E}_3 = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)^T.$$

Здесь и далее, если не оговорено особо, компоненты всех векторов представлены в системе $Ox_1x_2x_3$.

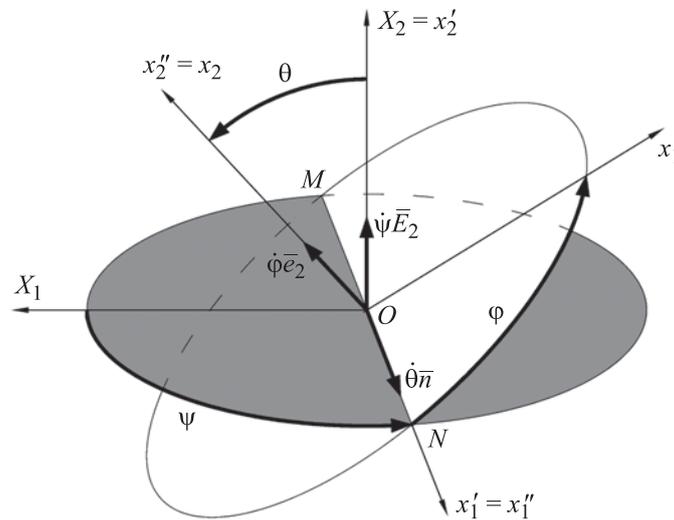


Рис. 1. Углы Эйлера

Одной из самых распространенных форм записи уравнений движения твердого тела относительно неподвижной точки являются уравнения Эйлера — Пуассона, которые имеют вид [8]

$$\mathbf{I} \frac{d\bar{\omega}}{dt} + \bar{\omega} \times \mathbf{I} \bar{\omega} = \bar{M}_O,$$

$$\frac{d\bar{E}_1}{dt} = \bar{E}_1 \times \bar{\omega}, \quad \frac{d\bar{E}_2}{dt} = \bar{E}_2 \times \bar{\omega}, \quad \frac{d\bar{E}_3}{dt} = \bar{E}_3 \times \bar{\omega},$$

где $\mathbf{I} = \text{diag}(I_1, I_2, I_3)$ — тензор инерции тела в системе $Ox_1x_2x_3$; $\bar{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)^T$ — вектор угловой скорости тела; \bar{M}_O — вектор момента внешних сил относительно точки O , действующих на тело.

Символом d/dt обозначена производная вектора по времени в системе координат $Ox_1x_2x_3$.

Выражение кинетической энергии T в случае сферического движения имеет вид

$$T = \frac{1}{2} \bar{K}_O \cdot \mathbf{I}^{-1} \bar{K}_O, \quad \bar{K}_O = \mathbf{I} \bar{\omega}, \quad (1)$$

где $\bar{K}_O = (K_1, K_2, K_3)^T$ — вектор кинетического момента тела относительно точки O .

Если тензор инерции записывается в главных центральных осях инерции тела, то выражение (1) можно представить в виде

$$T = \frac{1}{2} \left(\frac{K_1^2}{I_1} + \frac{K_2^2}{I_2} + \frac{K_3^2}{I_3} \right). \quad (2)$$

При $\bar{M}_O = 0$ реализуется наиболее простой и очень важный с точки зрения механики случай движения твердого тела относительно неподвижной точки, называемый случаем Эйлера. Соответствующее случаю Эйлера угловое движение твердого тела называется движением Эйлера — Пуансо [9]. При этом динамические уравнения Эйлера

$$\mathbf{I} \frac{d\bar{\omega}}{dt} + \bar{\omega} \times \mathbf{I} \bar{\omega} = 0 \quad (3)$$

имеют два первых интеграла [9]:

$$K^2 = (I_1 \omega_1)^2 + (I_2 \omega_2)^2 + (I_3 \omega_3)^2 = \text{const}, \quad K = |\bar{K}_O|, \quad (4)$$

$$2T = I_1 \omega_1^2 + I_2 \omega_2^2 + I_3 \omega_3^2 = \text{const}. \quad (5)$$

Здесь и далее будем считать, что для главных центральных моментов инерции тела выполняются соотношения $I_1 > I_2 > I_3$. Известно, что уравнения (3) имеют аналитические решения в эллиптических функциях, зависящие от соотношения между величинами K и T [9]. Наглядное представление о характере движения Эйлера — Пуансо можно получить с помощью геометрической интерпретации Мак-Кулага [10]. Выразим интегралы (4) и (5) через компоненты K_i , $i = \overline{1,3}$, вектора кинетического момента и представим их в виде

$$K^2 = K_1^2 + K_2^2 + K_3^2, \quad 1 = \left(\frac{K_1}{\sqrt{2TI_1}} \right)^2 + \left(\frac{K_2}{\sqrt{2TI_2}} \right)^2 + \left(\frac{K_3}{\sqrt{2TI_3}} \right)^2.$$

В осях системы $OK_1K_2K_3$ первое уравнение представляет собой сферу радиусом K , второе — эллипсоид (так называемый эллипсоид Мак-Кулага) с полуосями $\sqrt{2I_1}$, $\sqrt{2I_2}$, $\sqrt{2I_3}$. Поскольку вектор \bar{K}_O неподвижен в системе $OX_1X_2X_3$ (так как $d\bar{K}_O/dt = 0$), а оси системы $OK_1K_2K_3$ совпадают с осями подвижной системы $Ox_1x_2x_3$, линия пересечения поверхностей сферы кинетического момента и эллипсоида Мак-Кулага является траекторией движения конца вектора \bar{K}_O в системе $Ox_1x_2x_3$. На рис. 2 показаны различные семейства траекторий, полученные в зависимости от соотношения между величинами K и T . Всего выделяют три случая [10]:

1) при $2I_2 > K^2 \geq 2I_3$ получаются траектории, показанные на рис. 2 красным цветом, случай $K^2 = 2I_3$ соответствует устойчивому постоянному вращению тела относительно оси Ox_3 с произвольной угловой скоростью;

2) при $2I_1 \geq K^2 > 2I_2$ получаются траектории, показанные на рис. 2 синим цветом, случай $K^2 = 2I_1$ соответствует устойчивому постоянному вращению тела относительно оси Ox_1 с произвольной угловой скоростью;

3) при $K^2 = 2I_2$ возможны шесть траекторий. Во-первых, это две траектории-точки, расположенные на пересечении оси K_2 с поверхностью эллипсоида, одна из них показана на рис. 2 белым цветом. Эти точки соответствуют неустойчивым постоянным вращениям тела относительно оси Ox_2 с произвольной угловой скоростью.

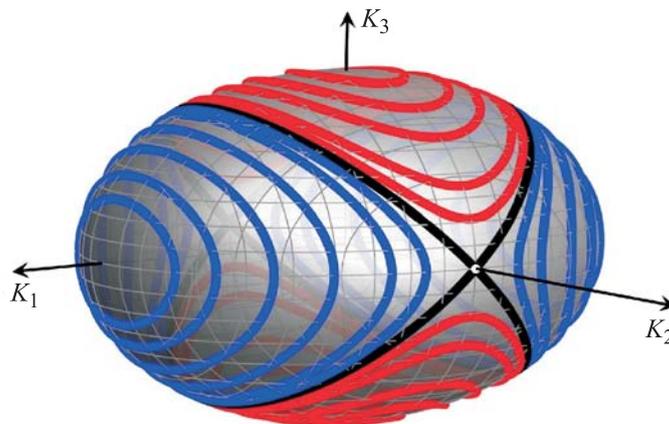


Рис. 2. Эллипсоид Мак-Кулага и траектории движения конца вектора \bar{K}_O

Во-вторых, есть четыре траектории, представляющие собой полуокружности, соединяющие указанные выше траектории-точки. Эти полуокружности на эллипсоиде Мак-Кулага показаны на рис. 2 черным цветом, они являются сепаратрисами, разделяющими области с различными семействами траекторий движения конца вектора \bar{K}_O . Далее в работе будут рассмотрены такие движения тела, при которых указанные выше траектории имеют малые отклонения от сепаратрис, поскольку именно при этом условии появляется эффект Джанибекова [11, 12].

Переменные Андуайе — Депри. При составлении математической модели углового движения твердого тела используем канонические переменные Андуайе — Депри [13, 14]. Чтобы их ввести, построим в системе координат $OX_1X_2X_3$ вектор $\bar{K}_O = K\bar{k}$, как показано на рис. 3, где $\bar{k} = \bar{K}_O/K$ — орт вектора кинетического момента. Затем покажем расположение осей системы $Ox_1x_2x_3$ и проведем перпендикулярную \bar{k} плоскость Σ (на рис. 3 обозначена серым цветом). Эта плоскость пересекает по прямой ON_1 неподвижную плоскость OX_1X_2 (на рис. 3 она заштрихована) и по прямой ON_2 — подвижную плоскость Ox_1x_2 . Тогда первыми тремя переменными Андуайе — Депри будут углы $\lambda_J, \lambda_K, \lambda_L$; соответствующие угловые скорости $\dot{\lambda}_J\bar{E}_3, \dot{\lambda}_K\bar{k}, \dot{\lambda}_L\bar{e}_3$ направлены так, как показано на рис. 3. Вторые три переменные K, J, L — это величина вектора кинетического момента и его проекции на оси OX_3 и Ox_3 соответственно. На рис. 3 также показаны вспомогательные углы δ_1 и δ_2 , определяемые соотношениями $\cos \delta_1 = J/K, \cos \delta_2 = L/K$.

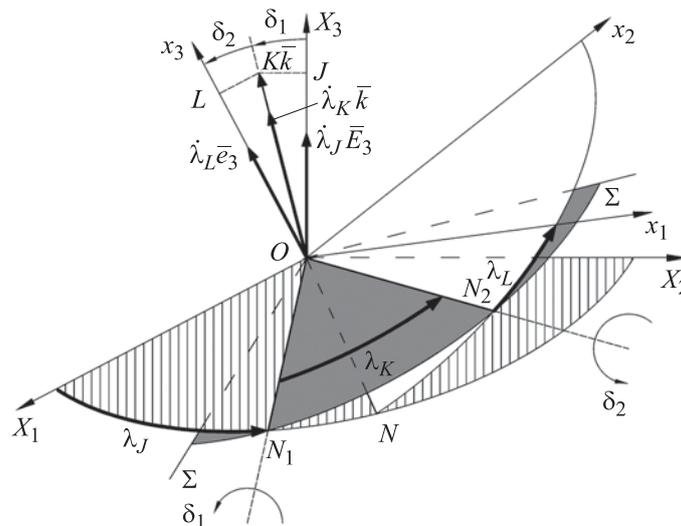


Рис. 3. Геометрическая интерпретация переменных Андуайе — Депри

Проекция вектора \bar{K}_O на оси подвижной системы $Ox_1x_2x_3$ через новые переменные выразим как

$$K_1 = \sqrt{K^2 - L^2} \sin \lambda_L, \quad K_2 = \sqrt{K^2 - L^2} \cos \lambda_L, \quad K_3 = L, \quad (6)$$

тогда уравнение (2) кинетической энергии примет вид

$$T = \frac{1}{2} \left[(K^2 - L^2) \left(\frac{\sin^2 \lambda_L}{I_1} + \frac{\cos^2 \lambda_L}{I_2} \right) + \frac{L^2}{I_3} \right].$$

Соотношения для элементов матрицы \mathbf{D} в переменных Андуайе — Депри можно получить, представив перевод системы координат $OX_1X_2X_3$ в систему $Ox_1x_2x_3$ как последовательность из пяти поворотов на углы $\lambda_J, \delta_1, \lambda_K, \delta_2, \lambda_L$ вокруг соответствующих осей.

Тогда

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \cos \lambda_L & \sin \lambda_L & 0 \\ -\sin \lambda_L & \cos \lambda_L & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \delta_2 & \sin \delta_2 \\ 0 & -\sin \delta_2 & \cos \delta_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \lambda_K & \sin \lambda_K & 0 \\ -\sin \lambda_K & \cos \lambda_K & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \\ \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \delta_1 & \sin \delta_1 \\ 0 & -\sin \delta_1 & \cos \delta_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \lambda_J & \sin \lambda_J & 0 \\ -\sin \lambda_J & \cos \lambda_J & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Получившиеся аналитические зависимости элементов матрицы \mathbf{D} направляющих косинусов $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, i = \overline{1,3}$, от переменных Андуайе — Депри имеют довольно громоздкий вид, они приведены в приложении 1.

Одно из преимуществ переменных Андуайе — Депри заключается в наглядной интерпретации характера движения твердого тела с помощью фазовой плоскости [15], на которой по оси ординат откладывается значение $\cos \delta_2 = L/K$, по оси абсцисс — $\lambda_L \bmod 2\pi$, где функция $a \bmod b$ равна остатку от целочисленного деления a на $b > 0$, т. е. $0 \leq \lambda_L \leq 2\pi$. В качестве примера на рис. 4 на фазовой плоскости показаны возможные траектории движений твердого тела в случае Эйлера, при этом цвета изображенных линий соответствуют цветам траекторий, показанных выше на эллипсоиде Мак-Кулага (см. рис. 2). На рис. 4 постоянным вращениям тела с произвольной угловой скоростью соответствуют:

1) прямые $\cos \delta_2 = L/K = \pm 1$ — устойчивое вращение относительно оси Ox_3 ;

2) точки $(\pi/2, 0)$ и $(3\pi/2, 0)$ — устойчивое вращение относительно оси Ox_1 ;

3) точки $(0, 0)$ (или $(2\pi, 0)$) и $(\pi, 0)$ — неустойчивое вращение относительно оси Ox_2 .

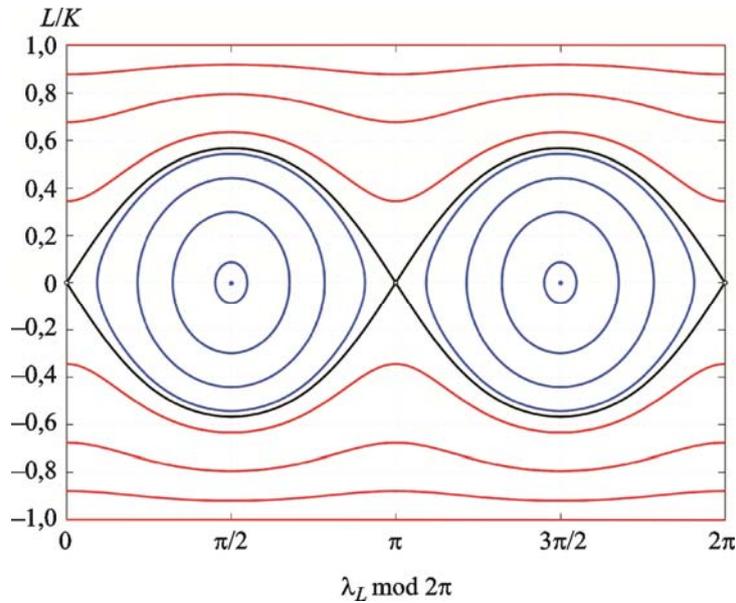


Рис. 4. Фазовые траектории движений Эйлера — Пуансо

Математическая модель движения твердого тела. Для гамильтоновых систем уравнения возмущенного движения твердого тела относительно неподвижной точки в переменных Андуайе — Депри можно представить в виде системы шести уравнений [8]:

$$\begin{aligned} \frac{d\lambda_L}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial L}, & \frac{dL}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial \lambda_L}, & \frac{d\lambda_K}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial K}, & (7) \\ \frac{dK}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial \lambda_K}, & \frac{d\lambda_J}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial J}, & \frac{dJ}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial \lambda_J}, \end{aligned}$$

где $H = T - U$ — функция Гамильтона (U — силовая функция потенциального силового поля, действующего на тело).

В качестве силовой функции возьмем

$$U(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) = \mu \left(\frac{m}{R} + \frac{1}{2R^3} \sum_{i=1}^3 I_i - \frac{3}{2R^3} \sum_{i=1}^3 I_i \gamma_i^2 \right), \quad (8)$$

где μ — неотрицательная константа; m, R — положительные константы.

Рассмотрим два случая движения тела относительно неподвижной точки. *Первый случай* (возмущенное угловое движение тела): приняв, что μ — гравитационный параметр Земли; m — масса твердого тела и задавшись расстоянием R между притягивающим центром (центром Земли, принятой сферой) и центром масс тела (точкой O), получим движение тела под действием гравитационного момента от силы притяжения Земли относительно точки O [16]. Силовая функция (8) записана в предположении, что притягивающий центр в системе $OX_1X_2X_3$ располагается в точке с координатами $(0, 0, -R)$.

Второй случай (угловое движение тела по инерции): приняв, что $\mu = 0$, получим $H = T$, это соответствует случаю Эйлера, т. е. реализуется движение Эйлера — Пуансо. В этом случае кинетическая энергия системы, а также переменные Андуайе — Депри, задающие величину и направление вектора кинетического момента в системе $OX_1X_2X_3$, будут следующими: $H = T = \text{const}$, $\lambda_J = \text{const}$, $K = \text{const}$, $J = \text{const}$. При наличии малых возмущений переменные H , λ_J , K , J станут оскулирующими элементами, что является одним из основных преимуществ использования переменных Андуайе — Депри.

Рассмотрим случай возмущенного углового движения тела. Подставив в формулу (8) выражения $\gamma_i(L, K, J, \lambda_K, \lambda_L)$, $i = \overline{1, 3}$, приведенные в приложении 1, представим силовую функцию в виде $U(L, K, J, \lambda_K, \lambda_L)$. Тогда, выразив соответствующим образом функцию Гамильтона, систему уравнений движения (7) можно записать так:

$$\begin{aligned} \frac{d\lambda_L}{dt} &= \frac{\partial T}{\partial L} - \frac{\partial U}{\partial L}, \quad \frac{dL}{dt} = -\frac{\partial T}{\partial \lambda_L} + \frac{\partial U}{\partial \lambda_L}, \quad \frac{d\lambda_K}{dt} = \frac{\partial T}{\partial K} - \frac{\partial U}{\partial K}, \\ \frac{dK}{dt} &= \frac{\partial U}{\partial \lambda_K}, \quad \frac{d\lambda_J}{dt} = -\frac{\partial U}{\partial J}, \quad \frac{dJ}{dt} = 0, \end{aligned} \quad (9)$$

где

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial L} &= -\left(\frac{\sin^2 \lambda_L}{I_1} + \frac{\cos^2 \lambda_L}{I_2} - \frac{1}{I_3} \right) L, \quad \frac{\partial T}{\partial K} = \left(\frac{\sin^2 \lambda_L}{I_1} + \frac{\cos^2 \lambda_L}{I_2} \right) K, \\ \frac{\partial T}{\partial \lambda_L} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{I_1} - \frac{1}{I_2} \right) (K^2 - L^2) \sin 2\lambda_L. \end{aligned} \quad (10)$$

Частные производные функции $U(L, K, J, \lambda_K, \lambda_L)$ по переменным Андуайе — Депри имеют вид

$$\frac{\partial U}{\partial \xi} = -\frac{3\mu}{R^3} \left(\mathbf{I} \bar{E}_3 \cdot \frac{\partial \bar{E}_3}{\partial \xi} \right) = -\frac{3\mu}{R^3} \sum_{i=1}^3 I_i \gamma_i \frac{\partial \gamma_i}{\partial \xi}, \quad (11)$$

где ξ — каждая из пяти переменных $K, J, L, \lambda_K, \lambda_L$. Аналитические зависимости для частных производных функций $\gamma_i(L, K, J, \lambda_K, \lambda_L)$, $i = \overline{1, 3}$, по переменным Андуайе — Депри приведены в приложении 2.

В случае Эйлера уравнения движения (7) примут вид [8]

$$\frac{d\lambda_L}{dt} = \frac{\partial T}{\partial L}, \quad \frac{dL}{dt} = -\frac{\partial T}{\partial \lambda_L}, \quad \frac{d\lambda_K}{dt} = \frac{\partial T}{\partial K}, \quad \frac{dK}{dt} = 0, \quad \frac{d\lambda_J}{dt} = 0, \quad \frac{dJ}{dt} = 0, \quad (12)$$

где частные производные функции кинетической энергии $T(L, K, \lambda_L)$ по переменным Андуайе — Депри вычисляются по формулам (10).

Выбор начальных условий уравнений движения. При численном моделировании углового движения тела начальные условия уравнений движения удобно задавать в углах Эйлера и составляющих вектора угловой скорости. Чтобы связать эти величины с начальными значениями переменных Андуайе — Депри, используем соотношения

$$J = \bar{K}_O \bar{E}_3, \quad K = \sqrt{K_1^2 + K_2^2 + K_3^2}, \quad L = K_3, \quad \lambda_L = \arg[K_2 + iK_1], \quad (13)$$

$$\lambda_K = \arg \left[\left(\frac{JL}{K} - K\gamma_3 \right) + i(K_2\gamma_1 - K_1\gamma_2) \right], \quad \lambda_J = \arg \left[(\bar{E}_1 \bar{\delta}) + i(\bar{E}_2 \bar{\delta}) \right],$$

где \arg — функция аргумента комплексного числа; $i = \sqrt{-1}$;

$$\bar{\delta} = \frac{1}{K} \left(\frac{KK_2 \cos \lambda_K - LK_1 \sin \lambda_K}{\sqrt{K_1^2 + K_2^2}}, \frac{-KK_1 \cos \lambda_K - LK_2 \sin \lambda_K}{\sqrt{K_1^2 + K_2^2}}, \sin \lambda_K \sqrt{K^2 - L^2} \right)^T.$$

Выписанные соотношения получены из геометрических соображений (см. рис. 3), а также из уравнений для элементов матрицы \mathbf{D} , выраженных через углы Эйлера и через переменные Андуайе — Депри. Таким образом, по значениям $\psi(0), \theta(0), \varphi(0)$ рассчитаны начальные значения элементов матрицы $\mathbf{D} = (\bar{E}_1, \bar{E}_2, \bar{E}_3)$, по значениям $\omega_i(0)$ — компоненты вектора $K_i(0) = I_i \omega_i(0)$, $i = \overline{1, 3}$, и по формулам (13) — начальные значения переменных Андуайе — Депри.

В случае Эйлера траектория движения конца вектора \bar{K}_O будет одной из сепаратрис при выполнении равенства $K^2 = 2Tl_2$, что соответствует условию

$$\omega_3^2 = \frac{(I_1 - I_2)I_1}{(I_2 - I_3)I_3} \omega_1^2. \quad (14)$$

Поскольку формула (14) определяет квадраты компонент ω_1 и ω_3 , их значения определяются с точностью до знака. При строгом выполнении соотношения (14) угловое движение тела будет апериодическим и продлится бесконечно долго [9], а для реализации эффекта Джанибекова траектория движения конца вектора \bar{K}_O должна иметь малое отклонение от сепаратрис и не совпадать с ними. Указанное малое отклонение можно ввести в виде параметра [1]

$$\varepsilon = |K^2 - 2TI_2|. \quad (15)$$

Для того чтобы задать начальные значения $\omega_1(0)$ и $\omega_3(0)$, соотношение (14) нужно использовать с определенной точностью, соответствующей выбранному значению ε . При этом начальное значение $\omega_2(0)$ не должно быть равно нулю, а начальные значения углов Эйлера можно задать любые.

Значения параметров математической модели. При численном моделировании обоих случаев углового движения в качестве абсолютно твердого тела принят однородный трехосный эллипсоид, оси симметрии которого являются осями его материальной симметрии, вдоль которых направлены и оси системы $Ox_1x_2x_3$. В этом случае главные центральные моменты инерции эллипсоида рассчитываются по формулам

$$I_1 = \frac{m(b^2 + c^2)}{5}, \quad I_2 = \frac{m(a^2 + c^2)}{5}, \quad I_3 = \frac{m(a^2 + b^2)}{5},$$

где a , b , c — размеры полуосей эллипсоида; m — масса эллипсоида.

Приняты следующие численные значения параметров твердого тела: $m = 0,1$ кг, $a = 0,03$ м, $b = 0,04$ м, $c = 0,05$ м. Тогда $I_1 = 8,2 \cdot 10^{-5}$ кг·м², $I_2 = 6,8 \cdot 10^{-5}$ кг·м², $I_3 = 5,0 \cdot 10^{-5}$ кг·м².

Начальные условия уравнений движения тела в обоих случаях задавались так: $\psi(0) = \theta(0) = \varphi(0) = 0$, $\omega_1(0) = 0,1$ град/с, $\omega_2(0) = 12,0$ град/с, $\omega_3(0) = 0,1129404956$ град/с. Значение $\omega_3(0)$ было вычислено по формуле (14) по заданным значениям I_i и $\omega_1(0)$. При таких начальных условиях $\varepsilon(0) = 2,5 \cdot 10^{-24}$. Указанные выше значения I_i и $\omega_i(0)$, $i = \bar{1}, 3$, соответствуют случаю $2TI_1 \geq K^2 > 2TI_2$ (области с траекториями синего цвета на рис. 2 и 4).

Для численного моделирования случая возмущенного углового движения твердого тела (т. е. при воздействии гравитационного момента от силы притяжения Земли) значения параметров силовой функции (8) принимались следующими: $\mu = 3,986004418 \text{ км}^3/\text{с}^2$, $R = 6778,14 \text{ км}$. Такое значение R соответствует тому, что тело находится на кеплеровой круговой орбите высотой 400 км относительно Земли, форму которой принимают сферической.

Численное моделирование проводилось в среде MATLAB Simulink на интервале времени 3600 с (60 мин); метод численного интегрирования — ode8 (Dormand-Prince) с постоянным шагом, равным 0,01 с.

Результаты математического моделирования. Математическое моделирование проводили путем численного интегрирования уравнений (9) и (12), для вычисления значений частных производных использовали формулы (10), (11). Результаты численного решения системы уравнений (9)–(11), т. е. случая возмущенного углового движения тела, приведены на рис. 5–8.

Графики зависимостей углов Эйлера от времени t , которые показаны на рис. 5, демонстрируют периодический характер изменения ориентации тела в пространстве. В частности, видны изменения угла нутации в диапазоне от 0 до 180° с практически постоянным периодом, что соответствует разворотам в пространстве оси Ox_2 тела на 180° . Эти развороты и представляют собой эффект Джанибекова. На рис. 6 приведены графики проекций ω_i вектора угловой скорости на оси системы координат $Ox_1x_2x_3$, связанной с телом, которые имеют такой же периодический характер, что и графики углов Эйлера на рис. 5. Значения ω_i вычисляются из соотношений (6) как $\omega_i = K_i/I_i$, $i = \overline{1,3}$.

Для большей наглядности на рис. 7 и 8 на сфере с единичным радиусом показана траектория движения конца орта \bar{e}_2 в абсолютном пространстве, т. е. в системе координат $Ox_1x_2x_3$. На рис. 7 траектория соответствует первому развороту тела от $\theta(0) = 0^\circ$ до $\theta = 180^\circ$, на рис. 8 — второму развороту от $\theta = 180^\circ$ до $\theta = 0^\circ$, при этом на обоих рисунках синим цветом показано направление орта \bar{k} на момент времени $t = 0$.

В связи с тем что при заданных значениях μ , R и I_i , $i = \overline{1,3}$, модуль вектора гравитационного момента, действующего на тело, является малой величиной (не превышает $6,15 \cdot 10^{-10} \text{ Н} \cdot \text{м}$), описанное выше возмущенное угловое движение тела является близким к движению Эйлера — Пуансо, т. е. вектор \bar{K}_O за время моделирования практически

не изменяется по модулю и направлению в абсолютном пространстве. Поэтому выбранные выше значения $\omega_i(0)$, $i = \overline{1,3}$, позволили в результате численного моделирования получить эффект Джанибекова.

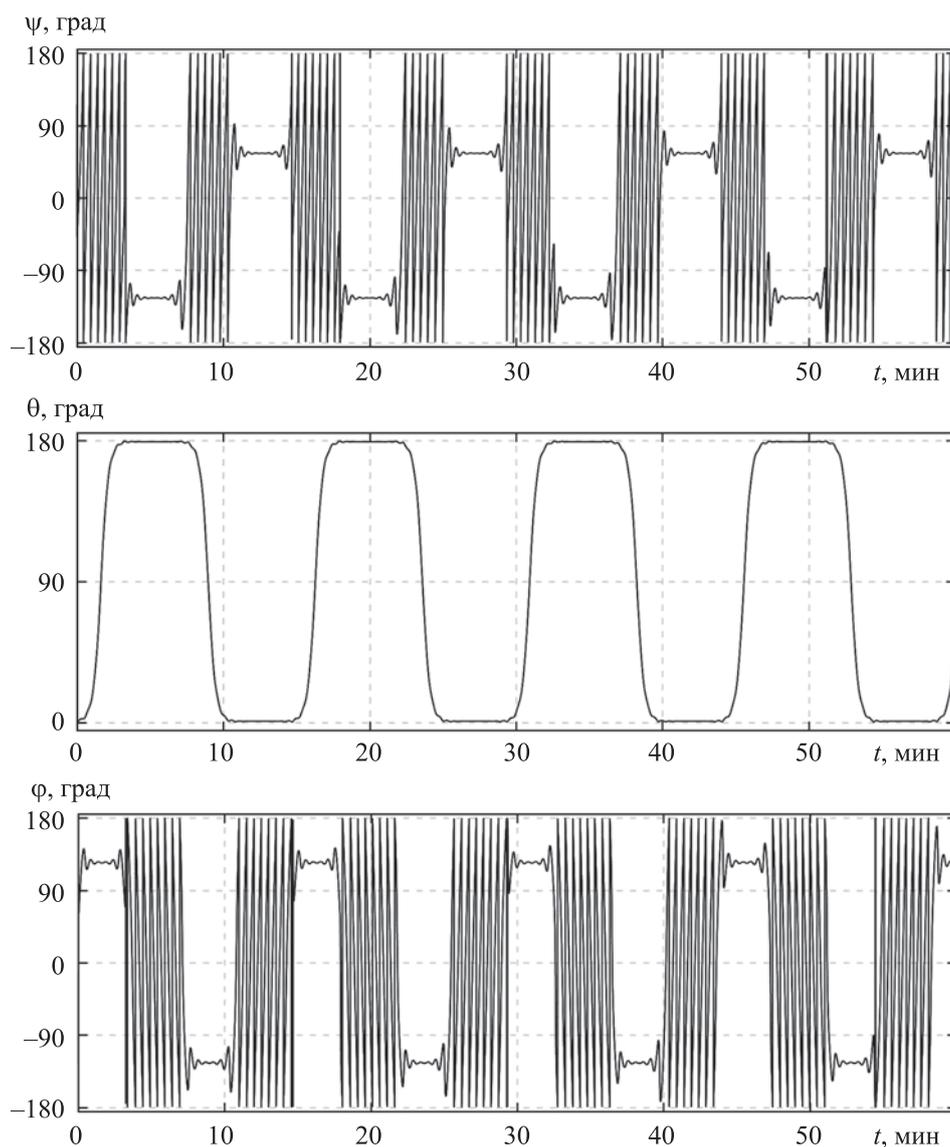


Рис. 5. Углы Эйлера в случае возмущенного углового движения тела

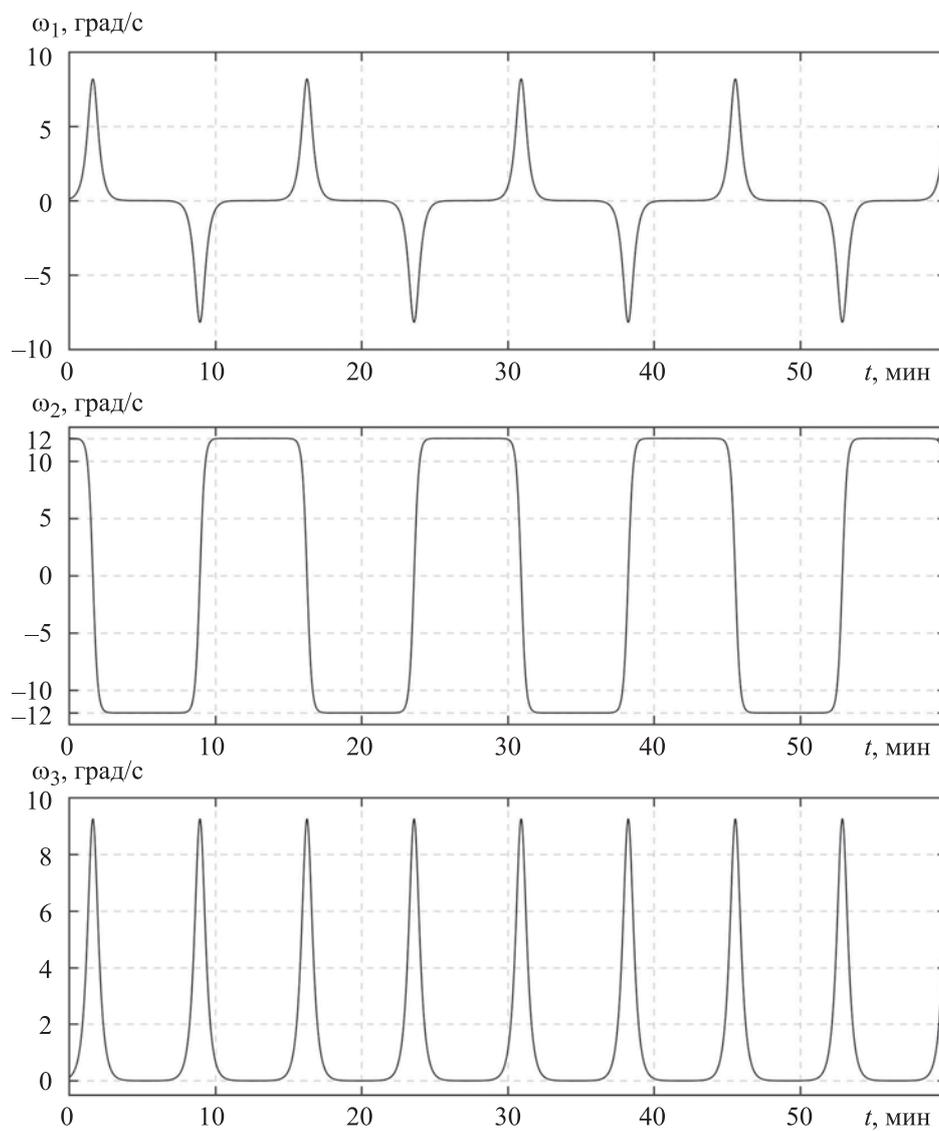


Рис. 6. Проекция вектора угловой скорости в случае возмущенного углового движения тела

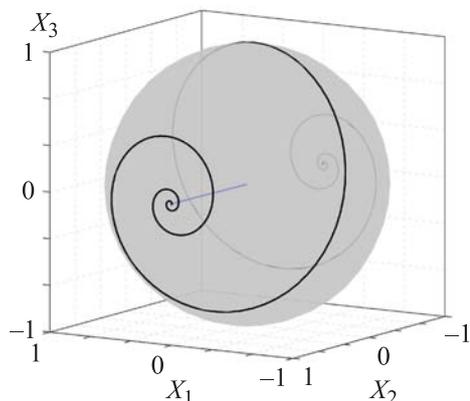


Рис. 7. Траектория движения конца орта \bar{e}_2 (первый разворот) в случае возмущенного углового движения тела

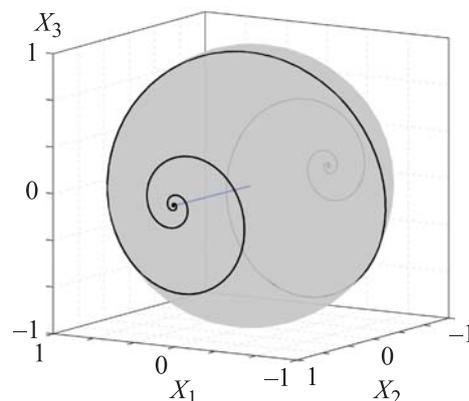


Рис. 8. Траектория движения конца орта \bar{e}_2 (второй разворот) в случае возмущенного углового движения тела

Результаты численного решения системы уравнений (10) и (12), т. е. движение Эйлера — Пуансо, приведены на рис. 9–12. Графики зависимостей углов Эйлера по времени показаны на рис. 9, из которого видно, что периодический характер движения тела сохранился, но постоянный период изменения ориентации тела в пространстве увеличился. На рис. 10 сплошными линиями черного цвета показаны графики проекций ω_i , $i = \overline{1,3}$, вектора угловой скорости, где также наблюдается увеличение периода разворота оси Ox_2 в процессе движения тела. Сравнивая графики величин ψ , φ и ω_1 , ω_3 , приведенные на рис. 5, 9 и рис. 6, 10 соответственно, можно заметить, что при движении Эйлера — Пуансо изменилась траектория конца вектора \bar{K}_O в системе $Ox_1x_2x_3$. Это особенно хорошо видно на фазовой плоскости (рис. 11), где показаны фазовые траектории в случае возмущенного углового движения тела (черная сплошная линия) и в случае движения Эйлера — Пуансо (красная штриховая линия). Как видно из рис. 11, первые развороты тела в обоих случаях практически полностью идентичны (черная сплошная и красная штриховая линии совпадают), т. е. траектория движения конца орта \bar{e}_2 в случае Эйлера соответствует траектории, представленной на рис. 7. Последующие развороты уже будут немного различаться. Рис. 12 демонстрирует траекторию движения конца орта \bar{e}_2 при втором развороте в случае Эйлера, которая отличается от соответствующей траектории, приведенной на рис. 8. На рис. 12 синим цветом показано направление орта \bar{k} , которое в случае Эйлера не изменяется в абсолютном пространстве на всем отрезке времени моделирования.

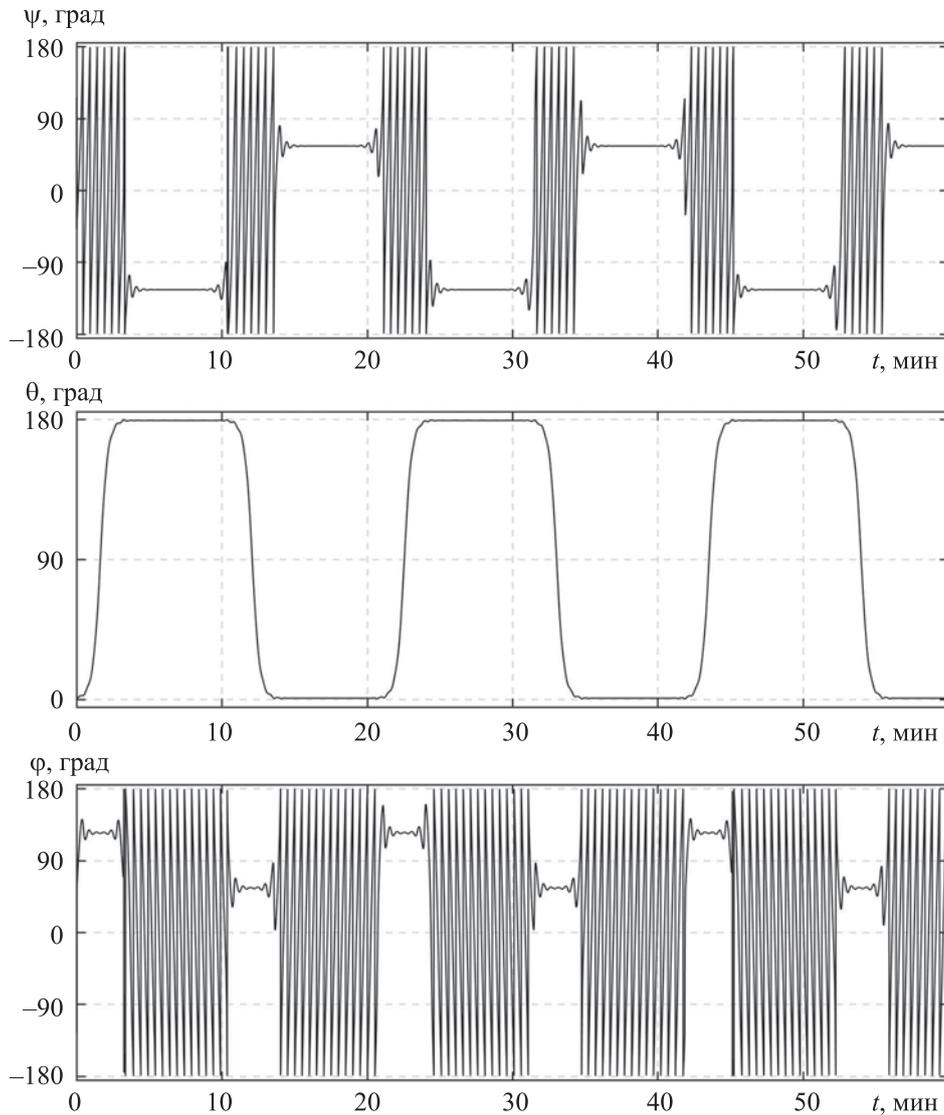


Рис. 9. Углы Эйлера при движении Эйлера — Пуансо

Известно, что соответствующие случаю Эйлера уравнения движения (3) имеют аналитические решения [9]. В случае $2TI_1 \geq K^2 > 2TI_2$, который соответствует заданным выше начальным значениям I_i и $\omega_i(0)$, $i = \overline{1,3}$, указанные решения выражаются через эллиптические функции Якоби dn , sn , cn в виде

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{K^2 - 2TI_3}{I_1(I_1 - I_3)}} \text{dn}(\tau - \tau_0), \quad \omega_2 = -\sqrt{\frac{2TI_1 - K^2}{I_2(I_1 - I_2)}} \text{sn}(\tau - \tau_0), \quad (16)$$

$$\omega_3 = \sqrt{\frac{2TI_1 - K^2}{I_3(I_1 - I_3)}} \operatorname{cn}(\tau - \tau_0), \quad (16)$$

где

$$\tau = \sqrt{\frac{(I_1 - I_2)(K^2 - 2TI_3)}{I_1 I_2 I_3}} t, \quad \tau_0 = \int_0^{\lambda_0} \frac{d\lambda}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \lambda}},$$

$$\lambda_0 = \arcsin \left(\frac{\omega_2(0)}{\sqrt{\frac{2TI_1 - K^2}{I_2(I_1 - I_2)}}} \right), \quad k^2 = \frac{(I_2 - I_3)(2TI_1 - K^2)}{(I_1 - I_2)(K^2 - 2TI_3)}.$$

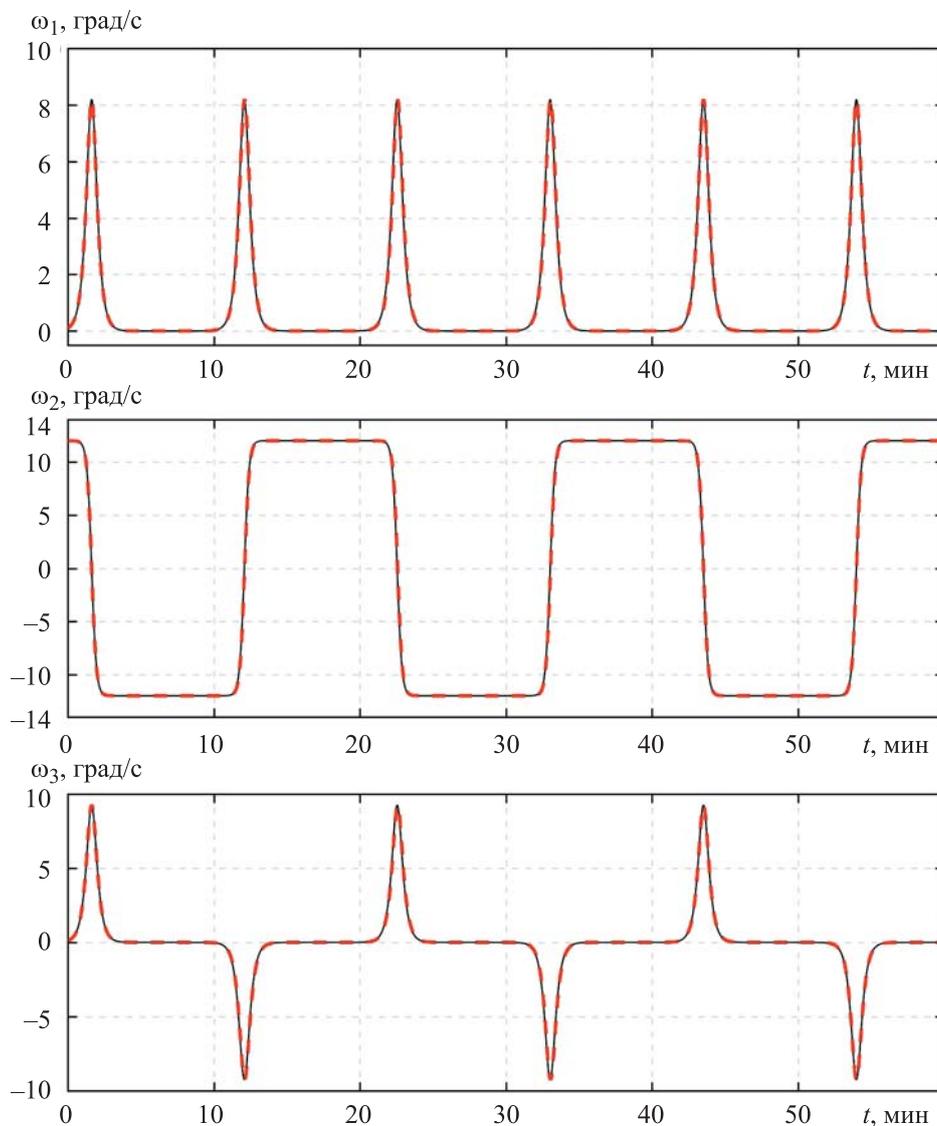


Рис. 10. Проекция вектора угловой скорости при движении Эйлера — Пуансо

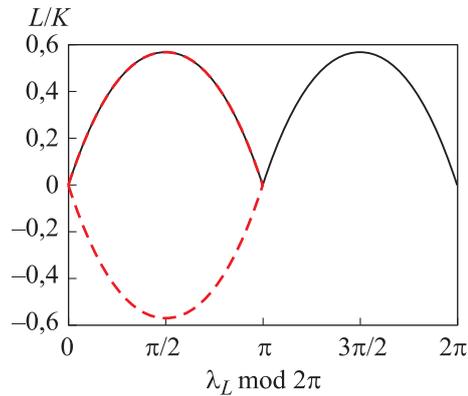


Рис. 11. Фазовые траектории в случае возмущенного углового движения тела и при движении Эйлера — Пуансо

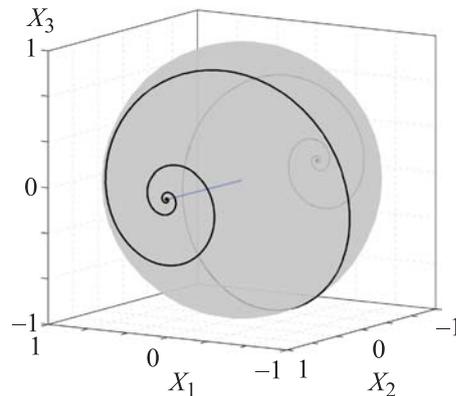


Рис. 12. Траектория движения конца орта \bar{e}_2 (второй разворот) при движении Эйлера — Пуансо

Здесь принято значение $\omega_2(0) = 12\pi/180$ рад/с. В качестве проверки на рис. 10 красными штриховыми линиями показаны графики проекций ω_i , построенные с помощью соотношений (16), которые полностью совпали с графиками ω_i , $i = \overline{1,3}$, полученными в результате численного интегрирования системы (10), (12).

Период углового движения твердого тела. В случае Эйлера при выполнении неравенств $2I_1 > K^2 > 2I_2$ или $2I_2 > K^2 > 2I_3$ функции $\omega_i(t)$, $i = \overline{1,3}$, являются периодическими. В случае $2I_1 > K^2 > 2I_2$ их период N в [1] представлен в виде определенного интеграла, который можно привести к виду [9]

$$N = 4\tilde{K}(k) \sqrt{\frac{I_1 I_2 I_3}{(I_1 - I_2)(K^2 - 2I_3)}}, \quad \tilde{K}(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\lambda}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \lambda}}, \quad (17)$$

где $\tilde{K}(k)$ — полный эллиптический интеграл первого рода.

Уравнение (17) в несколько ином виде приведено в работе [17].

В работе [1] получено асимптотическое разложение для периода при $\varepsilon = |K^2 - 2I_2| \rightarrow 0$. Главный асимптотический член имеет вид

$$\tilde{N} = \frac{2}{\zeta} \ln \left(\frac{16}{\eta} \right), \quad (18)$$

где

$$\eta = \frac{\varepsilon(I_1 - I_3)I_2}{K^2(I_1 - I_2)(I_2 - I_3)}, \quad \zeta = \frac{K}{I_2} \sqrt{\frac{(I_1 - I_2)(I_2 - I_3)}{I_1 I_3}}.$$

Его можно получить также и из точного выражения (17). Подставляя (15) в выражение для k^2 , найдем асимптотику $\tilde{K}(k)$:

$$k^2 = \frac{(I_2 - I_3) \left(I_1 - I_2 - \frac{\varepsilon}{2T} \right)}{(I_1 - I_2) \left(I_2 - I_3 + \frac{\varepsilon}{2T} \right)} = 1 - \eta + O(\eta^2),$$

$$\tilde{K}(k) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{16}{\eta} \right) + O(\eta \ln(\eta)). \quad (19)$$

Подставляя (19) и $2T = (K^2 - \varepsilon) / I_2$ в выражение (17), получим (18). В случае когда справедливы неравенства $2TI_2 > K^2 > 2TI_3$ в формуле (17), необходимо поменять местами I_1 и I_3 , а формула (18) не изменится [1].

Подставив численные значения параметров, входящих в выражения (17) и (18), получим, что $N = 1257,106$ с и $\tilde{N} = 1257,173$ с соответственно. Среднее значение периода, найденное из графиков, представленных на рис. 10, составляет 1257,177 с, что с приемлемой точностью соответствует значениям, найденным по соотношениям (17) и (18). Из соотношения (18) видно, что период \tilde{N} зависит от величины малого отклонения ε : чем меньше значение ε , тем больше значение \tilde{N} . В случае $\varepsilon = 0$ траектория движения вектора \bar{K}_O в системе $Ox_1x_2x_3$ будет одной из сепаратрис и $\tilde{N} \rightarrow \infty$.

Заключение. Получена математическая модель углового движения тяжелого твердого тела под действием гравитационного момента в переменных Андуайе — Дебри. Приведены аналитические зависимости, позволяющие вычислить начальные значения указанных переменных через начальные значения углов Эйлера и проекций вектора угловой скорости на оси системы координат, жестко связанной с телом. Для заданных специальным образом начальных условий уравнений движения получены результаты численного моделирования эффекта Джанибекова, позволившие оценить влияние гравитационного момента на характер углового движение твердого тела.

Для случая отсутствия момента внешних сил приведена аналитическая зависимость, позволяющая вычислить период изменения угла нутации тела при малом отклонении траектории движения конца вектора кинетического момента от сепаратрис.

*Работа выполнена по теме государственного задания
(госрегистрация № 124012500443-0).*

Приложение 1. Аналитические зависимости элементов матрицы направляющих косинусов $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, i = \overline{1,3}$, от переменных Андуайе — Депри.

$$\alpha_1 = -\frac{\sin \lambda_J}{K^2} \left(J(K \cos \lambda_L \sin \lambda_K + L \sin \lambda_L \cos \lambda_K) - \sin \lambda_L \sqrt{K^2 - L^2} \sqrt{K^2 - J^2} \right) + \cos \lambda_J \left(\cos \lambda_K \cos \lambda_L - \frac{L}{K} \sin \lambda_K \sin \lambda_L \right),$$

$$\alpha_2 = \frac{\sin \lambda_J}{K^2} \left(J(K \sin \lambda_L \sin \lambda_K - L \cos \lambda_L \cos \lambda_K) + \cos \lambda_L \sqrt{K^2 - L^2} \sqrt{K^2 - J^2} \right) - \cos \lambda_J \left(\cos \lambda_K \sin \lambda_L + \frac{L}{K} \sin \lambda_K \cos \lambda_L \right),$$

$$\alpha_3 = \frac{\sin \lambda_J}{K^2} \left(L \sqrt{K^2 - J^2} + \cos \lambda_K J \sqrt{K^2 - L^2} \right) + \frac{\cos \lambda_J \sin \lambda_K \sqrt{K^2 - L^2}}{K},$$

$$\beta_1 = \frac{\cos \lambda_J}{K^2} \left(J(K \cos \lambda_L \sin \lambda_K + L \sin \lambda_L \cos \lambda_K) - \sin \lambda_L \sqrt{K^2 - L^2} \sqrt{K^2 - J^2} \right) + \sin \lambda_J \left(\cos \lambda_K \cos \lambda_L - \frac{L}{K} \sin \lambda_K \sin \lambda_L \right),$$

$$\beta_2 = -\frac{\cos \lambda_J}{K^2} \left(J(K \sin \lambda_L \sin \lambda_K - L \cos \lambda_L \cos \lambda_K) + \cos \lambda_L \sqrt{K^2 - L^2} \sqrt{K^2 - J^2} \right) - \sin \lambda_J \left(\cos \lambda_K \sin \lambda_L + \frac{L}{K} \sin \lambda_K \cos \lambda_L \right),$$

$$\beta_3 = -\frac{\cos \lambda_J}{K^2} \left(L \sqrt{K^2 - J^2} + \cos \lambda_K J \sqrt{K^2 - L^2} \right) + \frac{\sin \lambda_J \sin \lambda_K \sqrt{K^2 - L^2}}{K},$$

$$\gamma_1 = \frac{\sin \lambda_L}{K^2} \left(J \sqrt{K^2 - L^2} + \cos \lambda_K L \sqrt{K^2 - J^2} \right) + \frac{\cos \lambda_L \sin \lambda_K \sqrt{K^2 - J^2}}{K},$$

$$\gamma_2 = \frac{\cos \lambda_L}{K^2} \left(J \sqrt{K^2 - L^2} + \cos \lambda_K L \sqrt{K^2 - J^2} \right) - \frac{\sin \lambda_L \sin \lambda_K \sqrt{K^2 - J^2}}{K},$$

$$\gamma_3 = \frac{1}{K^2} \left(JL - \cos \lambda_K \sqrt{K^2 - L^2} \sqrt{K^2 - J^2} \right).$$

Приложение 2. Частные производные функций $\gamma_i(L, K, J, \lambda_K, \lambda_L)$, $i = \overline{1, 3}$, по переменным Андуайе — Дебри.

$$\frac{\partial \gamma_1}{\partial L} = \sin \lambda_L \left(\cos \lambda_K \sqrt{K^2 - J^2} - JL / \sqrt{K^2 - L^2} \right) / K^2,$$

$$\frac{\partial \gamma_2}{\partial L} = \cos \lambda_L \left(\cos \lambda_K \sqrt{K^2 - J^2} - JL / \sqrt{K^2 - L^2} \right) / K^2,$$

$$\frac{\partial \gamma_3}{\partial L} = \left(J + L \cos \lambda_K \sqrt{K^2 - J^2} / \sqrt{K^2 - L^2} \right) / K^2,$$

$$\frac{\partial \gamma_1}{\partial K} = - \left(\frac{J(K^2 - 2L^2) \sin \lambda_L}{\sqrt{K^2 - L^2}} - \frac{KJ^2 \cos \lambda_L \sin \lambda_K - L(K^2 - 2J^2) \sin \lambda_L \cos \lambda_K}{\sqrt{K^2 - J^2}} \right) / K^3,$$

$$\frac{\partial \gamma_2}{\partial K} = - \left(\frac{J(K^2 - 2L^2) \cos \lambda_L}{\sqrt{K^2 - L^2}} + \frac{KJ^2 \sin \lambda_L \sin \lambda_K + L(K^2 - 2J^2) \cos \lambda_L \cos \lambda_K}{\sqrt{K^2 - J^2}} \right) / K^3,$$

$$\frac{\partial \gamma_3}{\partial K} = - \left(2JL + \cos \lambda_K \left(K^2(L^2 + J^2) - 2L^2J^2 \right) / \sqrt{K^2 - J^2} \sqrt{K^2 - L^2} \right) / K^3,$$

$$\frac{\partial \gamma_1}{\partial J} = \left(\sin \lambda_L \sqrt{K^2 - L^2} - J(L \sin \lambda_L \cos \lambda_K + K \cos \lambda_L \sin \lambda_K) / \sqrt{K^2 - J^2} \right) / K^2,$$

$$\frac{\partial \gamma_2}{\partial J} = \left(\cos \lambda_L \sqrt{K^2 - L^2} - J(L \cos \lambda_L \cos \lambda_K - K \sin \lambda_L \sin \lambda_K) / \sqrt{K^2 - J^2} \right) / K^2,$$

$$\frac{\partial \gamma_3}{\partial J} = \left(L + J \cos \lambda_K \sqrt{K^2 - L^2} / \sqrt{K^2 - J^2} \right) / K^2,$$

$$\frac{\partial \gamma_1}{\partial \lambda_L} = \left(J \cos \lambda_L \sqrt{K^2 - L^2} + (L \cos \lambda_L \cos \lambda_K - K \sin \lambda_L \sin \lambda_K) \sqrt{K^2 - J^2} \right) / K^2,$$

$$\frac{\partial \gamma_2}{\partial \lambda_L} = - \left(J \sin \lambda_L \sqrt{K^2 - L^2} + (L \sin \lambda_L \cos \lambda_K + K \cos \lambda_L \sin \lambda_K) \sqrt{K^2 - J^2} \right) / K^2,$$

$$\frac{\partial \gamma_3}{\partial \lambda_L} = 0, \quad \frac{\partial \gamma_1}{\partial \lambda_K} = \sqrt{K^2 - J^2} (K \cos \lambda_L \cos \lambda_K - L \sin \lambda_L \sin \lambda_K) / K^2,$$

$$\frac{\partial \gamma_2}{\partial \lambda_K} = - \sqrt{K^2 - J^2} (K \sin \lambda_L \cos \lambda_K + L \cos \lambda_L \sin \lambda_K) / K^2,$$

$$\frac{\partial \gamma_3}{\partial \lambda_K} = \left(\sin \lambda_K \sqrt{K^2 - L^2} \sqrt{K^2 - J^2} \right) / K^2.$$

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Петров А.Г., Володин С.Е. «Эффект Джанибекова» и законы механики. *Доклады академии наук*, 2013, т. 451, № 4, с. 399–403. DOI: 10.7868/S0869565213220118
- [2] Trivailo P., Kojima H. Discovering Method of Control of the “Dzhanibekov’s Effect” and Proposing its Applications for the Possible Future Space Missions. *Trans. JSASS Aerospace Tech. Japan*, 2019, vol. 17, no. 1, pp. 72–81. DOI: 10.2322/tastj.17.72
- [3] Poinsot L. *Théorie nouvelle de la rotation des corps*. Bachelier, 1834, 56 p.
- [4] Буланов Д.М., Сазонов В.В. Исследование эволюции вращательного движения спутника «Фотон М-2». *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2020, вып. 9 (105). DOI: 10.18698/2308-6033-2020-9-2015
- [5] Панкратов А.А. Периодические и условно-периодические движения спутника-гиростата под действием гравитационного момента на круговой орбите. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2012, вып. 7 (7). DOI: 10.18698/2308-6033-2012-7-295
- [6] Панкратов А.А. Устойчивость периодических движений осесимметричного спутника-гиростата на круговой орбите. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2013, вып. 12 (24). DOI: 10.18698/2308-6033-2013-12-1144
- [7] Баркин Ю.В., Баркин М.Ю. Движение твердого ядра в полости вращающейся несферичной оболочки. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2015, вып. 12 (48). DOI: 10.18698/2308-6033-2015-12-1451
- [8] Архангельский Ю.А. *Аналитическая динамика твердого тела*. Москва, Физматлит, 1977, 328 с.
- [9] Черноусько Ф.Л., Акуленко Л.Д., Лещенко Д.Д. *Эволюция движения твердого тела относительно центра масс*. Москва, Ижевск, Ижевский институт компьютерных исследований, 2015, 308 с.
- [10] Раус Э. *Динамика системы твердых тел*. Т. 2. Архангельский Ю.А., Демина В.Г., ред. Москва, Физматлит, 1983, 544 с.
- [11] Игнатов А.И., Иванов Г.А., Коломиец Е.С. Исследование движения твердого тела относительно неподвижной точки с использованием переменных Андруайе — Дебри. *XLVIII Академические чтения по космонавтике, посвященные памяти академика С.П. Королёва и других выдающихся отечественных ученых — пионеров освоения космического пространства (Москва, 23–26 января 2024 года): сб. тезисов : в 3 т.* Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2024, т. 1, с. 314–315.
- [12] Ермолина А.А., Коломиец Е.С. Анализ сферического движения тела с использованием MATLAB Simulink. *Всероссийская студенческая конференция «Студенческая научная весна», посвященная 110-летию со дня рождения академика В.Н. Челомея (Москва, 01–30 апреля 2024 года): сб. тез. докладов*. Москва, ООО «Издательский дом «Научная библиотека», 2024, с. 580.
- [13] Садов Ю.А. Переменные «действие — угол» в задаче Эйлера — Пуансо. *Прикладная математика и механика*, 1970, т. 34, № 5, с. 962–964.
- [14] Козлов В.В. Геометрия переменных «действие — угол» в задаче Эйлера — Пуансо. *Вестник Московского университета. Сер. I. Математика, механика*, 1974, № 5, с. 74–79.
- [15] Дебри А. Изучение свободного вращения твердого тела около неподвижной точки с помощью фазовой плоскости. *Механика. Сб. пер.* 1968, № 2, с. 3–9.

- [16] Белецкий В.В. *Движение спутника относительно центра масс в гравитационном поле*. Москва, Изд-во Моск. ун-та, 1975, 308 с.
[17] Аппель П. *Теоретическая механика*. Москва, Физматлит, 1960, т. 2, 488 с.

Статья поступила в редакцию 04.09.2025

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Игнатов А.И., Ермолина А.А., Петров А.Г. Математическое моделирование эффекта Джанибекова с использованием переменных Андуайе — Дебри. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2025, вып. 11. EDN HXDWVB

Игнатов Александр Иванович — канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры «Теоретическая механика» МГТУ им. Н.Э. Баумана. Область научных интересов: динамика углового движения космических аппаратов, аналитическая механика.
e-mail: ignatov@bmstu.ru

Ермолина Анастасия Александровна — студентка кафедры «Динамика и управление полетом ракет и космических аппаратов» МГТУ им. Н.Э. Баумана. Область научных интересов: динамика полета космических аппаратов, аналитическая механика. e-mail: ermolinaaa@student.bmstu.ru

Петров Александр Георгиевич — д-р физ.-мат. наук, профессор, главный научный сотрудник лаборатории механики систем Института проблем механики имени А.Ю. Ишлинского РАН. Область научных интересов: гидродинамика, аналитическая механика. e-mail: petrov@ipmnet.ru

Mathematical modeling of the “Dzhanibekov's effect” using the Andoyer — Deprit variables

© A.I. Ignatov¹, A.A. Ermolina¹, A.G. Petrov²

¹Bauman Moscow State Technical University,
Moscow, 105005, Russian Federation

²Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS,
Moscow, 119526, Russian Federation

Two cases of angular motion of a rigid body relative to a point moving uniformly and rectilinearly are investigated. In the first case, the body motion is considered under the action of an external moment of potential force on the body, in the second case — in the absence of any moments. A mathematical model is compiled that describes the angular motion of the body using the Andoyer — Deprit variables. The results of numerical modeling are presented under the condition that the trajectory of the end of the vector of the angular momentum of the body has a small deviation from the separatrices. This condition determines the angular motion of the body, called the “Dzhanibekov's effect”. Differences in the angular motion of the body in the presence and absence of the external moment of potential forces are shown. An analytical dependence is given that allows one to estimate the period of change in the nutation angle of the body in the absence of external moments.

Keywords: Euler—Poisson equations, Dzhanibekov's effect, MacCullagh interpretation, Andoyer—Deprit variables

*The work was carried out on the topic of a state assignment
(state registration No. 124012500443-0).*

REFERENCES

- [1] Petrov A.G., Volodin S.E. “Janibekov's Effect” and the Laws of Mechanics. *Doklady Physics*, 2013, vol. 58, no. 8, pp. 349–353. DOI: 10.1134/S1028335813080041
- [2] Trivailo P., Kojima H. Discovering Method of Control of the “Dzhanibekov's Effect” and Proposing its Applications for the Possible Future Space Missions. *Trans. JSASS Aerospace Tech. Japan*, 2019, vol. 17, no. 1, pp. 72–81. DOI: 10.2322/tastj.17.72
- [3] Poinsot L. *Théorie nouvelle de la rotation des corps*. Bachelier, 1834, 56 p.
- [4] Bulanov D.M., Sazonov V.V. Issledovaniye evolyutsii vrashchatelnogo dvizheniya sputnika “Foton M-2” [Investigation of the evolution of the FOTON M-2 satellite rotational motion]. *Inzhenerny zhurnal: nauka i innovatsii — Engineering Journal: Science and Innovation*, 2020, iss. 9 (105). DOI: 10.18698/2308-6033-2020-9-2015
- [5] Pankratov A.A. Periodicheskiye i uslovno-periodicheskiye dvizheniya sputnika-girostata pod deystviyem gravitatsionnogo momenta na krugovoy orbite [Periodic and Conditionally Periodic Motion of a Satellite-Gyrostata under Gravitational Moment on the Circular Orbit]. *Inzhenerny zhurnal: nauka i innovatsii — Engineering Journal: Science and Innovation*, 2012, iss. 7 (7). DOI: 10.18698/2308-6033-2012-7-295
- [6] Pankratov A.A. Ustoychivost' periodicheskikh dvizheniy osesimmetrichnogo sputnika-girostata na krugovoy orbite [On the stability of periodic motions of an axisymmetric satellite-gyrostata in a circular orbit]. *Inzhenerny zhurnal: nauka i innovatsii — Engineering Journal: Science and Innovation*, 2013, iss. 12 (24). DOI: 10.18698/2308-6033-2013-12-1144

- [7] Barkin Yu.V., Barkin M.Yu. Dvizheniye tverdogo yadra v polosti vrashchayuscheysya nesferichnoy obolochki [The movement of the solid core in the cavity of a rotating non-spherical shell]. *Inzhenerny zhurnal: nauka i innovatsii — Engineering Journal: Science and Innovation*, 2015, iss. 12 (48). DOI: 10.18698/2308-6033-2015-12-1451
- [8] Arkhangel'skiy Yu.A. *Analiticheskaya dinamika tverdogo tela*. Moscow, Fizmatlit Publ., 1977, 328 p.
- [9] Chernousko F.L., Akulenko L.D., Leshchenko D.D. *Evolyutsiya dvizheniya tverdogo tela otnositelno tsentra mass*. Moscow — Izhevsk, Izhevsk Institute of Computer Research, 2015, 308 p.
- [10] Routh E. J. *The Advanced Part of a Treatise on the Dynamics of a System of Rigid Body*. Cambridge University Press, 2013, 432 p.
- [11] Ignatov A.I., Ivanov G.A., Kolomiets E.S. Issledovaniye dvizheniya tverdogo tela otnositelno nepodvizhnoy tochki s ispolzovaniyem peremennykh Anduaye — Depri. In: *XLVIII Akademicheskkiye chteniya po kosmonavtike, posvyashchennyye pamyati akademika S.P. Korolova i drugikh vydayushchikhsya otechestvennykh uchenykh — pionerov osvoyeniya kosmicheskogo prostranstva (Moskva, 23–26 yanvarya 2024 goda): sbornik tezisov* [XLVIII Academic Readings on Cosmonautics, dedicated to the memory of Academician S.P. Korolev and other outstanding Russian scientists — pioneers of space exploration (Moscow, January 23–26, 2024): coll. abstracts]. In 3 vols. Moscow, BMSTU-Press, 2024, vol. 1, pp. 314–315.
- [12] Ermolina A.A., Kolomiets E.S. Analiz sfericheskogo dvizheniya tela s ispol'zovaniyem MATLAB Simulink [Analysis of the angular motion of a rigid body using matlab simulink]. In: *Vserossiyskaya studencheskaya konferentsiya «Studencheskaya nauchnaya vesna», posvyashchennaya 110-letiyu so dnya rozhdeniya akademika V.N. Chelomeya (Moskva, 01–30 aprelya 2024 goda): sb. tez. dokladov* [All-Russian student conference “Student Scientific Spring” dedicated to the 110th anniversary of the birth of Academician V.N. Chelomey (Moscow, April 1–30, 2024): coll. abstracts of reports. Moscow, Scientific Library Publ., 2024, pp. 580.
- [13] Sadov Yu.A. Peremennyye “deystvie — ugol” v zadache Eylera — Puanso. *Prikladnaya matematika i mekhanika — Applied Mathematics and Mechanics*, 1970, vol. 34, no. 5, pp. 962–964.
- [14] Kozlov V.V. Geometriya peremennykh “deystviye — ugol” v zadache Eylera — Puanso. *Vestnik Moskovskogo universiteta. Seriya 1. Matematika, mekhanika* [Moscow University Mathematics Bulletin / Moscow University Mechanics Bulletin], 1974, no. 5, pp. 74–79.
- [15] Deprit A. Free rotation of a rigid body studied in the phase plane. *Amer. J. Phys.*, 1967, vol. 35, no. 5, pp. 424–428.
- [16] Beletsky V.V. *Dvizheniye sputnika otnositelno tsentra mass v gravitatsionnom pole*. Moscow, Moscow University Publ., 1975, 308 p.
- [17] Appel P. *Traité de mécanique rationnelle*. Tome deuxième. Gauthier-Villars. Paris, 1953, 488 p.

Ignatov A.I., Cand. Sc. (Phys.-Math.), assistant professor of the Department “Theoretical mechanics”, Bauman Moscow State Technical University. Research interests: spacecraft angular motion control, analytical mechanics. e-mail: ignatov@bmstu.ru

Ermolina A.A., student of the Department “Dynamics and flight control of rockets and spacecraft”, ¹Bauman Moscow State Technical University. Research interests: spacecraft flight dynamics, analytical mechanics. e-mail: ermolinaaa@student.bmstu.ru

Petrov A.G., Dr. Sc. (Phys.-Math.), Professor, Laboratory of Mechanics of Systems Principal Researcher, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS. Research interests: hydrodynamics, analytical mechanics. e-mail: petrov@ipmnet.ru