

## Описание динамики кольцевого микромеханического гироскопа с дефектом формы на основе модели гибких упругих криволинейных стержней

© Р.М. Киселев, Ф.Д. Сорокин

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Российская Федерация

*При рассмотрении динамики кольцевых резонаторов гироскопических приборов, как правило, решают исключительно задачу колебаний в плоскости. Однако, как показывают экспериментальные данные, зачастую колебания резонатора выходят из его плоскости, например, вследствие потери устойчивости от температурных деформаций. Кроме того, плоская модель не предоставляет возможность описывать колебания резонаторов, обладающих пространственными дефектами. В связи с этим представляет интерес формирование адекватной динамической модели кольцевых резонаторов в пространственной постановке. С этой целью в данной работе для описания колебаний кольцевых резонаторов предлагается использовать трехмерные тензорные уравнения механики криволинейных гибких упругих стержней. На примере реальной конструкции волнового гироскопа рассмотрен и проанализирован совершенно новый вид дефекта формы резонатора, названный винтовым дефектом.*

**Ключевые слова:** микромеханический гироскоп, кольцевой резонатор, трехмерная тензорная теория гибких упругих стержней, расщепление частоты собственных колебаний, винтовой дефект

**Введение.** Одна из проблем проектирования современных инерционных гироскопических приборов — создать адекватное описание динамики реальных резонаторов гироскопов с учетом неидеальности их геометрических и физических параметров [1]. К таким приборам относится, например, вибрационный микромеханический гироскоп (ММГ) [2]. Основное рабочее тело такого гироскопа — резонатор, представляющий собой тонкостенную цилиндрическую оболочку из кремния или какого-либо другого материала [3].

Существует несколько методов, применяемых для описания динамики неидеального кольцевого резонатора: энергетический метод [4], метод конечных элементов (МКЭ) [5], метод возмущений [6], метод Бубнова — Галеркина [7] и др. Всем им свойственны определенные как преимущества, так и недостатки. Исторически первым методом описания динамики кольцевого резонатора считается метод Бубнова — Галеркина, представленный в работе [7]. В ней приведено решение задачи о вычислении расщепления собственных частот, вызванного отклонением функции плотности от постоянного значения по угловой координате кольца. Однако, как отмечается в самой же работе, метод является приближенным и основную ценность представляет лишь порядок найденного расщепления собственной частоты.

В работе [6] расщепление собственных частот полусферического резонатора найдено методом возмущений в сочетании с общей теорией оболочек в тензорной форме. Но вариант этого метода, рассмотренный в [6], также приближенный, поскольку учитывает в асимптотических разложениях всех величин лишь линейные по малому параметру слагаемые. Тем не менее для наиболее существенного дефекта формы — отклонения в нормальном направлении по четвертой гармонике полярного угла, он позволяет получить практически точное решение. Кроме того, в работе [6] использованы трехмерные уравнения в отличие от применяемых для решения плоской задачи, рассмотренной в [7].

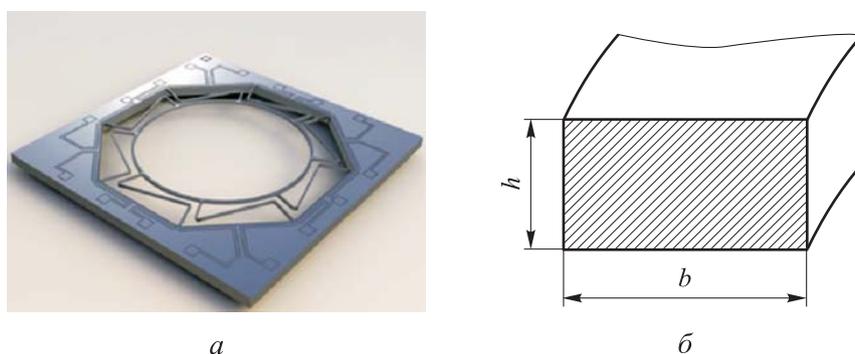
В работе [5] задача динамики неидеального резонатора была решена с привлечением метода конечных элементов, для чего был разработан специальный стержневой конечный элемент. Следует отметить, что в указанной работе впервые были рассмотрены комбинации различных гармоник дефектов. Построенный на основе МКЭ алгоритм был успешно верифицирован сопоставлением с методом возмущений, который применялся для одномерного дифференциального уравнения колебаний кругового кольца. Указанный алгоритм, построенный в [5], позволяет решать задачи в пространственной постановке, однако для его применения требуется высокая квалификация исследователя, а сам алгоритм оказывается весьма громоздким при рассмотрении комбинации различных дефектов. Точность его существенно снижается при условии высоких гармоник дефектов и их комбинаций.

Исторически последним из сопоставляемых методов является энергетический метод [4], благодаря которому можно очень просто реализовать численный расчет расщепления частот собственных колебаний неидеальных кольцевых резонаторов за счет отказа от аппарата линейных дифференциальных операторов и его замены традиционными матричными операциями. Этот простой и весьма точный метод позволяет рассматривать произвольные комбинации гармоник дефектов, выделенных из функций плотности, модуля упругости и т. п. Кроме того, вычисления выполняются очень быстро. Однако в настоящее время энергетический метод в связи с его новизной реализован только в плоской постановке и еще не распространен на геометрические дефекты.

Таким образом, в настоящее время задачу динамики кольцевых резонаторов микромеханических и твердотельных волновых гироскопов нельзя считать полностью решенной. Необходимо совершенствовать существующие и разрабатывать новые методы решения указанной задачи, в том числе в трехмерной постановке. При этом разрабатываемый метод должен быть достаточно точным, а также по возможности обладать простотой и высокой скоростью вычислений, что пока еще остается нерешенной проблемой.

Цель данной статьи — разработка эффективного метода расчета расщепления частот собственных колебаний неидеального кольцевого резонатора, которое в общем случае вызывается и пространственными дефектами его формы. Для учета этих дефектов была использована общая трехмерная теория гибких упругих криволинейных стержней [8, 9]. При этом собственные частоты определялись по традиционной методике решения линейных краевых задач на собственные значения [10].

**Описание модели неидеального кольцевого резонатора на основе теории криволинейных упругих стержней.** В конструктивном исполнении в ряде случаев кольцевой резонатор микромеханического гироскопа представляет собой тонкостенную осесимметричную оболочку постоянного радиуса с отношением толщины к радиусу  $1/100 \dots 1/20$ , и значит, для его описания могут быть использованы уравнения теории оболочек [11]. Однако существуют конструкции резонаторов (рис. 1), в которых стороны поперечного сечения резонатора  $b$  и  $h$  сопоставимы друг с другом [12], а размеры поперечного сечения существенно меньше его диаметра, поэтому для расчета резонатора может быть использована теория криволинейных упругих стержней, которая и была взята за основу в данной работе.



**Рис. 1.** Кольцевой резонатор микромеханического гироскопа:  
 $a$  — внешний вид чувствительного элемента [12];  $b$  — поперечное сечение резонатора, имеющее ширину  $b$  и высоту  $h$

Криволинейный стержень можно представить как линию Коссера, частицами которой являются элементарные твердые тела с векторами перемещений и малого поворота [13]. При этом внутренние взаимодействия выражаются векторами сил и моментов. Схема нагружения бесконечно малого элемента стержня показана на рис. 2.

Уравнения равновесия и кинематические соотношения гибкого криволинейного стержня в случае малых перемещений и поворотов (уравнения Кирхгофа — Клебша) являются общеизвестными [8, 9]:

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{Q}}{ds} + \mathbf{q} = 0; \\ \frac{d\mathbf{M}}{ds} + \mathbf{e}_1 \times \mathbf{Q} + \mathbf{m} = 0; \\ \frac{d\mathbf{u}}{ds} = \mathfrak{D} \times \mathbf{e}_1; \\ \frac{d\mathfrak{D}}{ds} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{M}, \end{cases} \quad (1)$$

где, как и на рис. 2,  $ds$  — малое приращение дуговой координаты;  $\mathbf{Q}$ ,  $\mathbf{M}$  — векторы внутренних сил и моментов в сечении;  $\mathbf{e}_1$  — орт касательной к оси стержня;  $\mathbf{q}$ ,  $\mathbf{m}$  — векторы внешних распределенных сил и моментов;  $\mathbf{u}$ ,  $\mathfrak{D}$  — векторы перемещений и поворотов сечения стержня;  $\mathbf{A}^{-1}$  — тензор податливости сечения при изгибе и кручении; центральной точкой и косым крестом обозначены скалярное и векторное произведения.

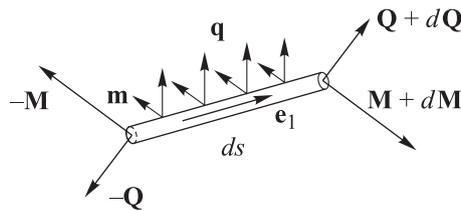


Рис. 2. Бесконечно малый элемент стержня в равновесии

Согласно стандартной методике из [10], уравнения для расчета собственных гармонических колебаний криволинейного стержня (модальный анализ) получаются из системы (1) заменой векторов статических внешних нагрузок  $\mathbf{q}$  и  $\mathbf{m}$  амплитудными значениями распределенных сил инерции и распределенных моментов инерции, которые вычисляются по следующим формулам:

$$\mathbf{q} = p^2 \rho A \mathbf{u}; \quad \mathbf{m} = p^2 \mathbf{J} \cdot \mathfrak{D}, \quad (2)$$

где  $p$  — круговая частота собственных колебаний;  $\rho$  — плотность материала кольца;  $A$  — площадь поперечного сечения;  $\mathbf{J}$  — тензор инерции вращения поперечного сечения.

Подстановка (2) в (1) приводит к искомой системе дифференциальных уравнений для вычисления частот и форм собственных колебаний кольца:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\mathbf{Q}}{ds} + p^2 \rho A \mathbf{u} = 0; \\ \frac{d\mathbf{M}}{ds} + \mathbf{e}_1 \times \mathbf{Q} + p^2 \mathbf{J} \cdot \mathfrak{D} = 0; \\ \frac{d\mathbf{u}}{ds} = \mathfrak{D} \times \mathbf{e}_1; \\ \frac{d\mathfrak{D}}{ds} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{M}. \end{array} \right. \quad (3)$$

Здесь  $\mathbf{u}$ ,  $\mathfrak{D}$ ,  $\mathbf{Q}$ ,  $\mathbf{M}$  — амплитудные значения векторов перемещений, поворотов, сил и моментов, так как при модальном анализе движение во времени явно не рассматривается.

В качестве дефекта резонатора рассмотрим случай наличия начального углового отклонения сечения от проектного положения, в котором кольцо является идеальным телом вращения:

$$\theta = \theta_n \cos(n\varphi), \quad (4)$$

где  $n$  — целое числа;  $\theta_n$  — амплитуда дефекта (начальный поворот сечения вокруг оси кольца);  $\varphi$  — полярный угол.

Далее это отклонение от идеальной формы кольца будет названо **винтовым дефектом**. Следует отметить, что винтовой дефект резонатора ММГ рассматривается **впервые**. Ранее на данный дефект не обращали внимания, но, как показано в данной статье, он может вызывать вполне ощутимое расщепление основной частоты собственных колебаний резонатора.

При указанном дефекте кольцевой резонатор будет иметь вид винтового стрежня, свернутого в кольцо, как показано на рис. 3.

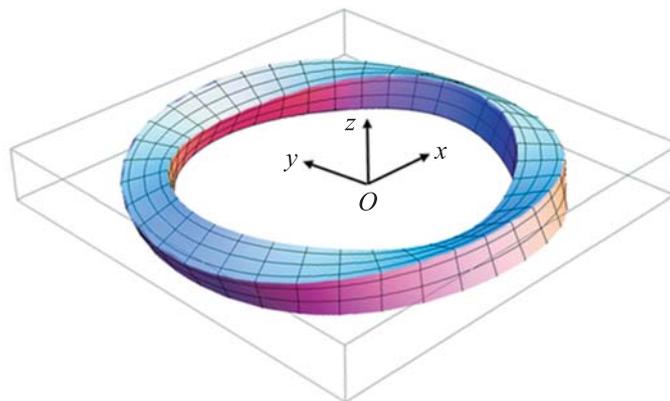


Рис. 3. Кольцевой резонатор с винтовым дефектом формы (пропорции нарушены для наглядности)

В данной работе используется комбинация тензорной и матричной алгебры. Векторы и тензоры обозначаются полужирным шрифтом. Переход от тензоров к матрицам  $3 \times 3$  выполняется в неподвижной декартовой системе координат  $Oxyz$  (см. рис. 3) и обозначается квадратными скобками [...]. Аналогичный переход от векторов (направленных отрезков) к матрицам-столбцам  $3 \times 1$  выполняется в той же системе координат  $Oxyz$  и обозначается фигурными скобками {...}.

Рассмотрим более подробно параметры, входящие в систему (1), которую удобнее всего решать с применением тензорного исчисления [14]. Введем радиус-вектор оси кольца его проекциями в декартовой системе координат:

$$\{\mathbf{r}\} = \{R \cos \varphi, R \sin \varphi, 0\}^T, \quad (5)$$

где  $R$  — радиус оси кольца.

Зададим матрицу единичного тензора, не зависящую от выбора базиса:

$$[\mathbf{E}] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Введем единичные орты срединной линии кольца (рис. 4): орт касательной

$$\{\mathbf{e}_1\} = \left\{ \frac{d\mathbf{r}}{ds} \right\} = \left\{ \frac{d\mathbf{r}}{Rd\varphi} \right\} = \{-\sin \varphi, \cos \varphi, 0\}^T; \quad (7)$$

нормаль к срединной плоскости кольца

$$\{\mathbf{e}_3\} = \{0, 0, 1\}^T; \quad (8)$$

орт внутренней нормали к окружности

$$\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1. \quad (9)$$

Зададим кососимметричный тензор [14, 15] от сопутствующего вектора  $\mathbf{e}_1$ :

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{e}_1; \quad [\mathbf{S}] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cos \varphi \\ 0 & 0 & \sin \varphi \\ -\cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \end{pmatrix}. \quad (10)$$

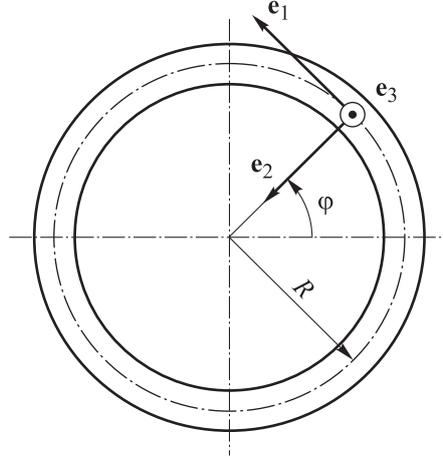


Рис. 4. Направление ортов в плоскости кольцевого резонатора

Определим геометрические характеристики прямоугольного сечения резонатора (см. рис. 1):

$$J_2 = \frac{bh^3}{12}; \quad J_3 = \frac{hb^3}{12}; \quad J_k = \beta bh^3; \quad J_p = J_2 + J_3, \quad (11)$$

где  $J_2$  — момент инерции сечения относительно оси 2;  $J_3$  — момент инерции сечения относительно оси 3;  $J_k$  — геометрическая жесткость на кручение;  $J_p$  — полярный момент инерции сечения;  $\beta$  — табличный коэффициент, зависящий от отношения  $b/h$  ( $h$  меньше  $b$ ).

Введем тензор поворота вокруг касательной к оси кольца [13, 14]:

$$\mathbf{L} = \mathbf{E} \cos \theta + \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 (1 - \cos \theta) + \mathbf{S} \sin \theta, \quad (12)$$

где  $\otimes$  — знак диадного (тензорного) умножения.

Тензор инерции вращения сечения идеального резонатора вычислялся следующим образом [9, 14]:

$$\mathbf{J}_0 = \rho(J_p \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + J_2 \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 + J_3 \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3) \quad (13)$$

(здесь и далее идеальным именуется резонатор без дефектов).

Тензор инерции вращения сечения кольца с винтовым дефектом получается поворотом (13) вокруг касательной к окружности кольца:

$$\mathbf{J} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{J}_0 \cdot \mathbf{L}^T. \quad (14)$$

Тензор податливости сечения идеального кольца соответствует матрице податливости сечения из [8, 9]:

$$\mathbf{A}_0^{-1} = \frac{1}{GJ_k} \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + \frac{1}{EJ_2} \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 + \frac{1}{EJ_3} \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3, \quad (15)$$

где  $E$  — модуль упругости первого рода;  $G$  — модуль упругости второго рода.

Тензор податливости сечения кольца с дефектом также получается поворотом (15) вокруг касательной к окружности кольца:

$$\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{A}_0^{-1} \cdot \mathbf{L}^T. \quad (16)$$

Граничные условия (условия периодичности) для системы (3) имеют вид:

$$\begin{cases} \mathbf{Q}(0) = \mathbf{Q}(2\pi R); \\ \mathbf{M}(0) = \mathbf{M}(2\pi R); \\ \mathbf{u}(0) = \mathbf{u}(2\pi R); \\ \mathfrak{V}(0) = \mathfrak{V}(2\pi R). \end{cases} \quad (17)$$

Система (3) является однородной. Согласно теории таких систем, вектор неизвестных  $\mathbf{y}(s)$  в любой точке  $s$  линейно связан с начальными условиями матрицей перехода  $[\mathbf{H}(s)]$ :

$$\mathbf{y}(s) = [\mathbf{H}(s)]\mathbf{y}(0); \quad (18)$$

$$\mathbf{y} = \{Q_x, Q_y, Q_z, M_x, M_y, M_z, u_x, u_y, u_z, \mathfrak{V}_x, \mathfrak{V}_y, \mathfrak{V}_z\}^T.$$

При этом  $[\mathbf{H}(0)]$  — единичная матрица  $12 \times 12$ . С использованием матрицы перехода (18) условия периодичности (17) приводят к однородной системе алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} [\Delta\mathbf{H}]\mathbf{y}(0) &= 0; \\ [\Delta\mathbf{H}] &= [\mathbf{H}(2\pi R)] - [\mathbf{H}(0)]. \end{aligned} \quad (19)$$

Для поиска нетривиальных решений необходимо найти корни определителя системы (19) в зависимости от параметра  $p$ . Найденные корни и являются собственными круговыми частотами резонатора. Наличие двух близких корней свидетельствует о расщеплении частоты собственных колебаний (далее — просто «расщепление»), что является наиболее существенным дефектом ММГ рассматриваемого вида.

**Расчет расщепления, вызванного винтовым дефектом на примере конкретного резонатора.** Рассмотрим реальный кольцевой резонатор ММГ из диссертации [12]. Параметры резонатора приведены ниже:

Радиус срединной окружности кольца $R$ , м .....	$2,94 \cdot 10^{-3}$
Ширина сечения $b$ , м .....	$120 \cdot 10^{-6}$
Высота сечения $h$ , м .....	$100 \cdot 10^{-6}$
Плотность $\rho$ , кг/м <sup>3</sup> .....	2330

Модуль упругости $E$ , ГПа .....	109
Коэффициент Пуассона $\mu$ .....	0,266
Коэффициент $\beta$ в формуле $J_k = \beta b h^3$ .....	0,166

Коэффициент  $\beta$  был вычислен по формуле, полученной из мембранной аналогии в задаче о кручении стержня прямоугольного поперечного сечения:

$$\beta = \frac{256}{\pi^6} \sum_{i,j=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{b^2}{i^2 j^2 (h^2 i^2 + b^2 j^2)}. \quad (20)$$

Построение определителя системы (19) с параметрами кольца, приведенными выше, выполнялось стандартными процедурами математического пакета Wolfram Mathematica [16].

В случае идеального кольца график зависимости определителя от частоты (рис. 5) не пересекает ось абсцисс, а только касается ее, что равносильно наличию двух одинаковых частот — следствие полной динамической симметрии кольца. По оси абсцисс на рис. 5 отложено приращение частоты в герцах, вычисляемое по формуле

$$\Delta f = f - f_0; \quad (21)$$

$$f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{36EJ_3}{\rho R^2 (5AR^2 + 9J_3)}},$$

где  $f_0$  — собственная частота идеального кольца, рассчитанная с учетом инерции вращения поперечных сечений вокруг 3-й оси.

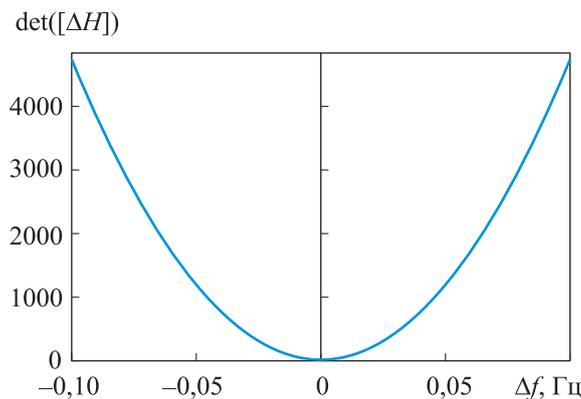
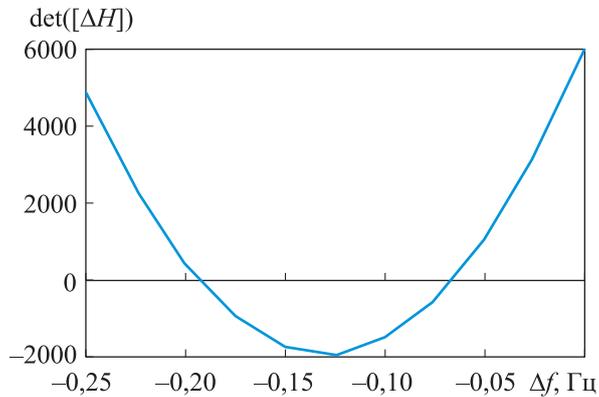


Рис. 5. Зависимость определителя системы (19) от приращения частоты в случае идеального кольца

График зависимости определителя от частоты для случая неидеального кольца с винтовым дефектом  $\theta = 0,01\cos 2\varphi$  (см. рис. 3) показан на рис. 6. Здесь график пересекает ось абсцисс в двух близко расположенных точках, что равносильно наличию расщепления частоты.



**Рис. 6.** Зависимость определителя системы (19) от приращения частоты при наличии винтового дефекта  $\theta = 0,01\cos 2\varphi$

Найденные графически из рис. 6 две собственные частоты далее уточнялись стандартными средствами пакета Wolfram Mathematica (процедура FindRoot), в результате чего обе частоты были вычислены с весьма высокой точностью:  $\Delta f_1 = -0,19398$  Гц;  $\Delta f_2 = -0,06511$  Гц, и было найдено расщепление частоты  $\psi = \Delta f_2 - \Delta f_1 = 0,129$  Гц. Поскольку частота идеального резонатора, определенная по формуле (21), равна примерно  $f_0 = 11705$  Гц, для получения столь высокой точности потребовалась арифметика длинных чисел (учитывалось 50 и более десятичных разрядов в числе).

Полученное значение расщепления  $\psi$  содержится в шестом знаке основной частоты  $f_0$ , что на первый взгляд создает впечатление незначительной величины, однако любое расщепление вызывает уход прибора. В идеале никакого расщепления не должно быть вообще, в связи с чем производят процедуру балансировки резонатора ММГ на специальном оборудовании. Интересно отметить, что точность вычисления основной частоты идеального кольца  $f_0$  не играет особой роли (эта частота подстраивается под прибор автоматически), важно вычислить именно расщепление  $\psi$ , на которое для каждого вида ММГ задается очень жесткий допуск. Результаты, приведенные в данной статье, позволяют связать величину расщепления с величиной винтового дефекта и тем самым задать допуск на величину дефекта.

Отметим также, что показанные на рис. 1 ламели (элементы, связывающие кольцо с корпусом ММГ) в случае их идеального исполнения влияют, причем довольно существенно, только на величину основной

частоты  $f_0$ , но практически не влияют на величину расщепления  $\psi$ . Этот факт проверялся несколькими способами (в том числе МКЭ), в связи с чем в данной статье ламели не учитываются. Их учет весьма существенно усложняет вычисления, не внося ничего нового в информацию о величине расщепления  $\psi$ .

Очевидно, что при увеличении амплитуды винтового дефекта расщепление также должно увеличиваться. График зависимости расщепления  $\psi$  от амплитуды винтового дефекта  $\theta_2$  показан на рис. 7. Сам винтовой дефект при этом был задан соотношением  $\theta = \theta_2 \cos 2\varphi$ .

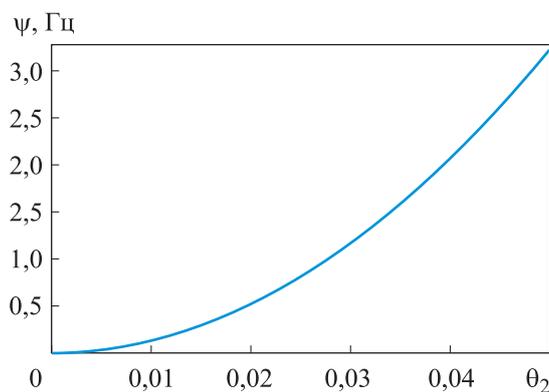


Рис. 7. Зависимость расщепления от амплитуды винтового дефекта

Согласно графику на рис. 7, расщепление  $\psi$  квадратично зависит от амплитуды дефекта на рассмотренном интервале изменения  $\theta_2$ .

Численные эксперименты показали, что при других значениях волнового числа  $n$  в формуле винтового дефекта  $\theta = \theta_n \cos(n\varphi)$  заметного расщепления не наблюдается. Таким образом, для обсуждаемого в статье винтового дефекта значение волнового числа  $n = 2$  является исключительным. Это тем более удивительно, что для рассмотренных ранее другими авторами дефектов плотности, толщины и даже отклонений формы кольца в плоскости наиболее значимыми были гармоники с волновым числом  $n = 4$  [7, 17]. Следовательно, выход из плоскости в пространство (переход от двумерных дифференциальных уравнений к трехмерным) привел к обнаружению совершенно новых эффектов в этой ставшей уже классической задаче вычисления расщепления частоты собственных колебаний кольцевого резонатора.

**Заключение.** Рассмотрен совершенно новый вид дефекта формы кольцевого резонатора ММГ, названный авторами винтовым дефектом, что привело к необходимости перейти от плоской задачи к полным трехмерным тензорным уравнениям криволинейных гибких упругих стержней. Результаты вычислений показали, что наиболее

значимыми гармониками винтового дефекта, приводящими к заметному расщеплению частоты собственных колебаний, являются либо  $\cos 2\varphi$ , либо  $\sin 2\varphi$ . Этот результат противоречит устоявшемуся мнению, что наиболее опасной гармоникой для кольцевого резонатора считается четвертая.

Установлено, что расщепление зависит от амплитуды винтового дефекта примерно квадратично.

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Маслов Д.А., Меркурьев И.В. Влияние нелинейных свойств электростатических датчиков управления на динамику цилиндрического резонатора волнового твердотельного гироскопа. *Известия Российской академии наук. Механика твердого тела*, 2021, № 6, с. 88–110. DOI: 10.31857/S0572329921050068
- [2] Некрасов Я.А. *Микромеханический гироскоп*. Пат. № 2017140882 U1 Российской Федерация, МПК G01C 19/56, 2018, бюл. № 28. EDN EPLBLC.
- [3] Матвеев В.А. *Гироскоп — это просто*. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2012, 149 с.
- [4] Киселев Р.М., Сорокин Ф.Д. Разработка и верификация энергетического метода расчета расщепления частот собственных колебаний кольцевых резонаторов гироскопических приборов. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2025, вып. 4 (160). EDN RKABAK
- [5] Sorokin F., Vakhlyarsky D., Gousskov A. High rise of ring resonator frequency split due to combination of two harmonics of density defect. *Applied Mathematical Modelling*, 2022, vol. 103, pp. 376–387. DOI: 10.1016/j.apm.2021.10.038
- [6] Нарайкин О.С., Сорокин Ф.Д., Козубняк С.А. Расщепление собственных частот упругой тонкостенной оболочки со случайными малыми неосесимметричными отклонениями параметров геометрии. *Математическое моделирование*, 2025, т. 37, № 1, с. 81–95. DOI: 10.20948/mm-2025-01-05
- [7] Журавлев В.Ф., Климов Д.М. *Волновой твердотельный гироскоп*. Москва, Наука, 1985, 125 с.
- [8] Светлицкий В.А. *Строительная механика машин. Механика стержней: в 2 томах*. Москва, Физматлит, 2009, т. 2, с. 384. ISBN 978-5-9221-1143-0
- [9] Елисеев В.В., Авксентьев А.И. Модели упругих стержней в динамике гибких роторов. *Современное машиностроение. Наука и образование*, 2014, № 4, с. 335–343. EDN SMNKGP
- [10] Бидерман В.Л. *Теория механических колебаний*. Москва, URSS: Ленанд, 2017, 416 с.
- [11] Бидерман В.Л. *Механика тонкостенных конструкций. Статика*. Москва, URSS: Ленанд, 2017, 485 с.
- [12] Косторной А.Н. *Кольцевой микромеханический гироскоп: Дис. ... канд. техн. наук*. АО «Инерциальные технологии «Технокомплекса», 2018, 128 с.
- [13] Лалин В.В., Беляев М.О. Изгиб геометрически нелинейного консольного стержня. Решение по теориям Кирхгофа и Коссера — Тимошенко. *Инженерно-строительный журнал*, 2015, № 1 (53), с. 39–55. DOI: 10.5862/MCE.53.5
- [14] Елисеев В.В. *Механика деформируемого твердого тела*. Санкт-Петербург, Изд-во Политехнического университета, 2006, 231 с. DOI: 10.18720/SPBPU/2/si20-642

- [15] Никабадзе М.У. О некоторых вопросах тензорного исчисления с приложениями к механике. *Современная математика. Фундаментальные направления*, 2015, т. 55, 194 с. EDN EUEXJF
- [16] Вавилов Н.А., Халин В.Г., Юрков А.В. *Mathematica для нематематика*. Москва, МЦНМО, 2021, 483 с. EDN RZQLNM
- [17] Киселев Р.М. Вычисление расщепления собственных частот колебаний кольцевого резонатора ММГ, вызванное отклонением его геометрии. *Современное машиностроение. Наука и образование*, 2025, № 14, с. 151–162. DOI: 10.18720/SPBPU/2/id-107

Статья поступила в редакцию 15.07.2025

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Киселев Р.М., Сорокин Ф.Д. Описание динамики кольцевого микромеханического гироскопа с дефектом формы на основе модели гибких упругих криволинейных стержней. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2025, вып. 9. EDN QCDNNH

**Киселев Роман Михайлович** — ассистент кафедр «Прикладная механика» и «Теория механизмов и машин» МГТУ им. Н.Э. Баумана. e-mail: kiselev.rom@bmstu.ru

**Сорокин Федор Дмитриевич** — д-р техн. наук, профессор кафедры «Прикладная механика» МГТУ им. Н.Э. Баумана. e-mail: sorokinfd@bmstu.ru

## Description of dynamics of a ring micromechanical gyroscope with the form defect based on a model of the flexible resilient curvilinear rods

© R.M. Kiselev, F.D. Sorokin

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, 105005, Russian Federation

*Considering dynamics of the gyroscopic device ring resonators actually means only analyzing the problem of oscillations in a plane. However, experimental data show that the resonator oscillations often go out of the resonator plane. For example, it happens due to a loss in stability from the temperature deformations. In addition, a flat model is not making it possible to describe oscillations of the resonators with spatial defects. In this regard, it is of interest to form an adequate dynamic model of the ring resonators in a spatial setting. For this purpose, this paper proposes to apply the three-dimensional tensor equations of the curvilinear flexible elastic rod mechanics to describe the ring resonator oscillations. It uses an example of the wave gyroscope real design to analyze a completely new type of the resonator shape defect called the screw defect.*

**Keywords:** micromechanical gyroscope, ring resonator, three-dimensional tensor theory of flexible elastic rods, frequency splitting of natural oscillations, screw defect

### REFERENCES

- [1] Maslov D.A., Merkuriev I.V. Vliyaniye nelineynykh svoystv elektrostatcheskikh datchikov upravleniya na dinamiku tsilindricheskogo rezonatora volnovogo tverdotelnogo giroskopa [The influence of the electrostatic control sensors on dynamics of the wave solid-state gyroscopes cylindrical resonator]. *Izvestiya Rossiyskoy akademii nauk. Mekhanika tverdogo tela — Mechanics of Solids*, 2021, vol. 56, no. 6, pp. 960–9790. <https://doi.org/10.31857/S0572329921050068>
- [2] Nekrasov Ya.A. *Mikromekhanicheskiy giroskop* [Micromechanical gyroscope]. Patent No. 2017140882 U1 Russian Federation, IPC G01C 19/56, 2018, byul. no. 28. EDN EPLBLC.
- [3] Matveev V.A. *Gyroscope – eto prosto* [Gyroscope: it is simple]. Moscow, BMSTU Publ., 2012, 149 p.
- [4] Kiselev R.M., Sorokin F.D. Razrabotka i verifikatsiya energeticheskogo metoda rascheta rasshchepeniya chastot sobstvennykh kolebaniy koltsevykh rezonatorov giroskopicheskikh priborov [Development and verification of the energy method in computing the natural oscillation frequency splitting in a gyroscope ring resonator]. *Inzhenerny zhurnal: nauka i innovatsii — Engineering Journal: Science and Innovation*, 2025, iss. 4 (160). EDN RKABAK
- [5] Sorokin F., Vakhlyarsky D., Gousov A. High rise of ring resonator frequency split due to combination of two harmonics of density defect. *Applied Mathematical Modelling*, 2022, vol. 103, pp. 376–387. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2021.10.038>
- [6] Naraykin O.S., Sorokin F.D., Kozubnyak S.A. Rasshchepenie sobstvennykh chastot uprugoy tonkostennoy obolochki so sluchaynymi malymi neosesimmetrichnymi otkloneniyami parametrov geometrii [Natural frequencies splitting of the elastic thin-walled shell with random small non-axisymmetric deviations of geometry parameters]. *Matematicheskoe modelirovanie (Mathematical Modeling)*, 2025, vol. 37, no. 1, pp. 81–95. <https://doi.org/10.20948/mm-2025-01-05>

- [7] Zhuravlev V.F., Klimov D.M. *Volnovoy tverdotelnyi girotskop* [Wave solid-state gyroscope]. Moscow, Nauka Publ., 1985, 125 p.
- [8] Svetlitsky V.A. *Stroitel'naya mekhanika mashin. Mekhanika sterzhney* [Construction mechanics of the machines. Mechanics of rods]. In 2 volumes. Moscow, Fizmatlit Publ., 2009, vol. 2, 384 p. ISBN 978-5-9221-1143-0.
- [9] Eliseev V.V., Avksentyev A.I. Modeli uprugikh sterzhney v dinamike gibkikh rotorov [Models of elastic rods in the dynamics of flexible rotors]. *Sovremennoe mashinostroenie. Nauka i obrazovanie — Modern Mechanical Engineering. Science and Education*, 2014, no. 4, pp. 335–343. EDN SMNKGP.
- [10] Biderman V.L. *Teoriya mekhanicheskikh kolebaniy* [Theory of mechanical vibrations]. Moscow, URSS, Lenand Publ., 2017, 416 p.
- [11] Biderman V.L. *Mekhanika tonkostennykh konstruksiy. Statika* [Mechanics of thin-walled structures. Statics]. Moscow, URSS, Lenand Publ., 2017, 485 p.
- [12] Kostorny A.N. *Koltsevoy mikromekhanicheskiy girotskop. Dis. ... kand. tekhn. nauk* [Ring micromechanical gyroscope. Diss. ... Cand. Sc. (Eng.)]. Inertsialnye Tekhnologii “Tekhnokompleksa” Publ., 2018, 128 p.
- [13] Lalin V.V., Belyaev M.O. Izgib geometricheski nelineynogo konsolnogo sterzhnya. Reshenie po teoriyam Kirkhgofa i Kossera – Timoshenko [Bending of geometrically nonlinear cantilever beam. Results obtained by Cosserat – Timoshenko and Kirchhoff’s rod theories]. *Inzhenerno-stroitelnyi zhurnal — Magazine of Civil Engineering*, 2015, no. 1 (53), pp. 39–55. <https://doi.org/10.5862/MCE.53.5>
- [14] Eliseev V.V. *Mekhanika deformiruemogo tverdogo tela* [Mechanics of a deformable solid]. St. Petersburg, Politekhnikheskiy University Publ., 2006, 231 p. <https://doi.org/10.18720/SPBPU/2/si20-642>
- [15] Nikabadze M.U. O nekotorykh voprosakh tenzornogo ischisleniya s prilozheniyami k mekhanike [Topics on tensor calculus with applications to mechanics]. *Sovremennaya matematika. Fundamentalnye napravleniya — Contemporary Mathematics. Fundamental Directions*, 2015, vol. 55, 194 p. EDN EUEXJF.
- [16] Vavilov N. A., Khalin V.G., Yurkov A.V. *Mathematica dlya nematematika* [Mathematica for the non-mathematicians]. Moscow, ITsNMO, 2021, 483 p. EDN RZQLNM.
- [17] Kiselev R. M. Vychislenie rasshchepleniya sobstvennykh chastot kolebaniy koltsevogo rezonatora MMG, vyzvannoe otkloneniyami ego geometrii [Computation of the natural oscillation frequencies splitting of an MMG annular resonator caused by deviations in its geometry]. *Sovremennoe mashinostroenie. Nauka i obrazovanie — Modern Mechanical Engineering. Science and Education*, 2025, no. 14, pp. 151–162. <https://doi.org/10.18720/SPBPU/2/id-107>

**Kiselev R.M.**, Assistant, Departments of Applied Mechanics and Theory of Mechanisms and Machines, Bauman Moscow State Technical University.  
e-mail: [kiselev.rom@bmstu.ru](mailto:kiselev.rom@bmstu.ru)

**Sorokin F.D.**, Dr. Sc. (Eng.), Professor, Department of Applied Mechanics, Bauman Moscow State Technical University. e-mail: [sorokinf@bmstu.ru](mailto:sorokinf@bmstu.ru)