УДК 539.3:624.04 EDN YNFSLY

О расчете надежности тонкостенных цилиндрических оболочек, находящихся в турбулентном потоке жидкости или газа, при случайных воздействиях

© С.А. Стародубцева[1], Л.В. Зинченко[2], А.А. Сахаров[1]

[1]Московский энергетический институт (национальный исследовательский университет), Москва, 111250, Российская Федерация
[2]МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Российская Федерация

Рассмотрены тонкостенные цилиндрические оболочки, находящиеся в турбулентном потоке жидкости или газа, при осесимметричном наружном или внутреннем пространственно-временном случайном поле давления, для которых определяются случайные поля нормальных перемещений, напряжений и изменение кривизны. Основная задача состоит в определении вероятности того, что параметры оболочки (перемещения, напряжения и кривизна) ни разу не превысят своих нормативных значений на всей длине и заданном интервале времени функционирования системы. В работе использованы основные понятия и методы статистической динамики механических систем — импеданс, передаточная функция, функция Грина, корреляционная функция, энергетический спектр случайных полей и процессов, др. Относительно несложные решения получены методом функции Грина для безынерционной оболочки, нагруженной распределенным по ее длине случайным стационарным полем давления, представленным в квазигармоническом виде со случайными амплитудами и частотами. Эффективные решения поставленных динамических задач получены также разложением их по собственным осесимметричным формам колебания оболочек. Рассмотрен случай, когда поле давления представимо пространственно-временным двумерным белым шумом. Показана принципиальная возможность получения точного решения поставленных задач для общего случая нагружения, когда давление на оболочку представимо в виде обобщенного двумерного преобразования Фурье по координатам и времени.

Ключевые слова: *оболочки, формы колебаний, случайные процессы, передаточная функция, надежность, механические системы, машиностроение*

Введение. Целью работы является разработка новой методики приближенного расчетного прогнозирования надежности функционирования тонкостенных цилиндрических оболочек, находящихся в турбулентном потоке жидкости или газа, при осесимметричном наружном или внутреннем пространственно-временном случайном поле значений давления.

Элементы механических систем, детали машин и конструкций часто подвергаются в процессе эксплуатации интенсивным нерегулярным силовым, кинематическим и параметрическим внешним воздействиям, для математического описания которых используют различные модели случайных процессов, основанных на гауссовских, марковских, квазигармонических и других процессах [1–5].

Гауссовские стационарные процессы $x(t)$ обычно задают их корреляционными функциями

$$K_x(\tau) = \langle x(t)x(t+\tau) \rangle$$

или их преобразованиями по Фурье, спектральными плотностями случайных процессов (энергетическими спектрами)

$$S_x(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K_x(\tau) \mathrm{e}^{-i\omega\tau} d\tau,$$

где выражение в угловых скобках $\langle \ldots \rangle$ — оператор усреднения [6–10].

Для белого шума имеем

$$K_x(\tau) = k_0 \delta(\tau); \;\; S_x(\omega) = \frac{k_0}{2\pi}; \;\; \omega \in (-\infty, \infty),$$

где $\delta(\tau)$ — импульсная дельта-функция Дирака.

Случайный процесс со скрытой периодичностью задается формулами

$$K_x(\tau) = s_x^2 \mathrm{e}^{-\alpha|\tau|} \cos(\beta\tau);$$

$$S_x(\omega) = \frac{\left(\omega^2 + \alpha^2 + \beta^2\right) s_x^2}{\left(\omega^2 - \alpha^2 - \beta^2\right) + 4\alpha^2\omega^2},$$

где α, β — параметры; s_x^2 — дисперсия процесса.

Представленные выше два случайных процесса и им подобные оказываются формально недифференцируемыми, и выявление структуры их траекторий (определение числа нулей, числа выбросов за произвольный уровень, распределения вероятностей для максимумов, для значений в точках перегиба траекторий и т. п.), необходимое для проведения расчетов надежности и долговечности элементов конструкций, оказывается некорректной математической задачей. Решению этой проблемы посвящены работы [6–10].

Оценка надежности для безынерционной системы. Рассматривается тонкостенная цилиндрическая оболочка в турбулентном потоке жидкости или газа при осесимметричном наружном или внутреннем пространственно-временном случайном поле давления $q(x, t)$. Требуется найти эффективное приближенное решение задачи по определению вероятностных характеристик случайных полей перемещений $w(x, t)$, напряжений $\sigma_x(x, t)$ и $\sigma_t(x, t)$, а также оценить надежность ее функционирования на заданном интервале времени T.

Некоторая статистическая информация о реальных полях давления жидкости и газа на сооружения и конструкции приведена в работах [1–7].

При обычно принятых в инженерных расчетах допущениях поле нормальных перемещений $w(x, t)$ определяется из решения линейного дифференциального уравнения в частных производных [1, 2].

Поле нормальных перемещений $w(x)$ определяется из решения уравнения

$$L\{w(x,t)\} = q(x,t). \tag{1}$$

Здесь L — линейный дифференциальный оператор,

$$L = D\frac{\partial^4}{\partial x^4} + \frac{Eh}{r^2} + \rho h\frac{\partial^2}{\partial t^2} + 2\rho h\varepsilon\frac{\partial}{\partial t}, \tag{2}$$

с параметрами D, E, h, r, ρ, ε, где $D = \dfrac{Eh^3}{12\left(1-\nu^2\right)}$ — цилиндрическая жесткость оболочки (ν — коэффициент Пуассона); E — модуль упругости; h — толщина стенки; r — радиус кривизны срединной поверхности; ρ — плотность материала; ε — коэффициент демпфирования.

Статика оболочки будет описываться уравнением

$$D\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{Eh}{r^2}w(x) = q(x),$$

или

$$w^{\mathrm{IV}}(x) + 4k^4 w(x) = f(x) \equiv q(x)/D, \tag{3}$$

где $q(x)$ — случайная функция со спектральной плотностью $S_q(\theta)$, волновым числом θ и параметром $k^4 = \dfrac{3}{r^2h^2}$.

Функция Грина $g(x)$ для уравнения (3), как реакция системы на окружное импульсное дельта-воздействие $\delta(x)$, будет определяться при нулевых начальных условиях из решения уравнения

$$g^{\mathrm{IV}}(x) + 4k^4 g(x) = \delta(x) \tag{4}$$

или из соответствующего однородного уравнения

$$g^{\mathrm{IV}}(x) + 4k^4 g(x) = 0 \tag{5}$$

при следующих краевых условиях:

$$g(0) = \dot{g}(0) = \ddot{g}(0) = 0,\ \dddot{g}(0) = 1.$$

Здесь дельта-функция Дирака

$$\delta(x)=\begin{cases}\infty \text{ при } x=0,\\ 0 \text{ при } x\neq 0;\end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)\,dx=1.$$

Решение уравнений (4) и (5) можно найти в виде

$$g(x)=\frac{1+i}{8k^3}\mathrm{e}^{-(1+i)kx}\sim\frac{1}{8k^3}\mathrm{e}^{-kx}(\cos kx+\sin k|x|),\tag{6}$$

где $i=\sqrt{-1}$ — мнимая единица; $\sim$ — знак перехода к действительным переменным [3].

Заметим, что интеграл от функции Грина

$$\int_0^{\infty}g(x)\,dx=\frac{1}{4k^4}.$$

В соответствии с решениями дифференциальных уравнений по методу функции Грина интеграл Дюамеля для уравнения (3) для получения стационарных решений имеет вид

$$w(x)=\int_0^{\infty}f(x-z)\,g(z)\,dz\equiv\int_{-\infty}^{x}f(z)\,g(x-z)\,dz.\tag{7}$$

При постоянном по длине оболочки давлении q для определения изменения среднего ее радиуса получаем из выражения (7) хорошо известную из курса сопротивления материалов формулу [5]

$$w=\Delta r=\frac{qr^2}{Eh}=\text{const}.$$

При изменении давления q вдоль оболочки по гармоническому закону с амплитудой q_0 и частотой $\theta\,[1/\text{м}]$, т. е. при

$$q(x)=q_0\cos\theta x\sim q\mathrm{e}^{i\theta x}$$

из выражения (7) получаем следующую формулу для расчета нормального перемещения:

$$w(x)=\frac{\dfrac{q_0}{D}}{4k^3(\theta+k)}\cos\theta x.\tag{8}$$

В этом случае кривизна $\kappa = \ddot{w}(x)$ срединной поверхности вдоль оболочки будет определяться по формуле

$$\kappa(x) = \frac{d^2 w(x)}{dx^2} = \frac{\dfrac{q_0 \theta^2}{D}}{4k^3(\theta + k)} \cos\theta x. \tag{9}$$

Аналогично по формуле (7) можно рассчитать перемещения и кривизну $\kappa(x)$ при любом изменении давления вдоль оболочки.

При этом максимальные напряжения на поверхности оболочки будут вычисляться по формулам

$$\sigma_x(x) = \frac{E}{1 - \vartheta^2}\left(\vartheta \frac{w(x)}{r} + \frac{h}{2}\kappa(x)\right); \tag{10}$$

$$\sigma_t(x) = \frac{E}{1 - \vartheta^2}\left(\frac{w(x)}{r} + \frac{h}{2}\vartheta\kappa(x)\right). \tag{11}$$

Описанное выше решение поставленной задачи можно распространить на случай, когда давление вдоль оболочки $q(x)$ будет представлять собой гауссовский стационарный процесс с заданными вероятностными характеристиками: корреляционной функцией $K_q(x)$ и спектральной плотностью $S_q(\theta)$, где θ — волновое число [7–11].

Укажем некоторые пути решения этой задачи:

1) использование для описания функции неэргодической модели случайного процесса в виде множества гармонических колебаний со случайными амплитудами λ и случайными частотами θ, т. е. в виде

$$q(x) = \lambda \cos\theta x, \tag{12}$$

где λ имеет рэлеевское распределение вероятностей с плотностью

$$f_\lambda(\lambda) = \frac{\lambda}{s_q^2} \exp\left(-\frac{\lambda^2}{2 s_q^2}\right);$$

θ — статистически независимая от λ случайная величина с плотностью распределения вероятностей, описываемой нормированной на единицу спектральной плотностью $S_q(\theta)$, т. е. как

$$f_\theta(\theta) = \frac{1}{s_q^2} S_q(\theta),$$

где s_q^2 — дисперсия функции $q(x)$.

Нетрудно доказать, что при указанных выше условиях процесс (12) также будет иметь те же, что и исходные:

1) корреляционную функцию $K_q(x)$ и спектральную плотность $S_q(\theta)$ [3];

2) использование в решении задачи метода функции Грина [2];

3) применение метода спектральных представлений Фурье [2].

В первом случае решение задач будет опираться на формулы (8)–(11), в которых следует вместо q_0 подставить случайную величину λ, а θ считать известной случайной величиной. Тогда все параметры решения задачи (перемещения, кривизна, напряжения и др.) будут функциями двух заданных случайных аргументов λ и θ, вероятностные характеристики которых определяются известными методами теории вероятностей [2, 12, 13].

Так, наиболее вероятное нормальное перемещение будет вычисляться по формуле

$$\tilde{w}(x) = \frac{\tilde{\lambda}}{4k^3\left(\tilde{\theta}+k\right)} \cos\tilde{\theta}x,$$

где $\tilde{\lambda}$ и $\tilde{\theta}$ — наиболее вероятные значения случайных величин λ и θ.

Тогда имеем:

$$\tilde{\lambda} = s_q\sqrt{\frac{\pi}{2}};\ \tilde{\theta} = \frac{s_{\dot{q}}}{s_q},$$

где s_q и $s_{\dot{q}}$ — среднее квадратичное отклонение для процесса $q(x)$ и его первой производной.

Метод функции Грина при решении поставленной задачи состоит в непосредственном использовании соотношения (7) при вычислении корреляционной функции процесса $w(x)$. Далее для простоты вычислений примем, что процесс $f(x)$ представляет собой белый шум с корреляционной функцией [14–17]

$$K_f(x) = k_f\delta(x),$$

где k_f — заданная интенсивность белого шума.

В этом случае с учетом выражения (6) получаем корреляционную функцию и дисперсии процесса $w(x)$ и его первых двух производных:

$$K_w(x) = \langle w(0)\, w(x)\rangle = k_f\int_0^\infty g(z)\, g(|x|+z)\,dz;$$

$$S_w^2 = k_f \int_0^\infty g^2(z)\,dz = \frac{k_f}{16k^7};$$

$$S_{\dot w}^2 = k_f \int_0^\infty \dot g^2(z)\,dz = \frac{k_f}{128k^5}; \qquad (13)$$

$$S_{\ddot w}^2 = k_f \int_0^\infty \ddot g^2(z)\,dz = \frac{k_f}{256k^3}. \qquad (14)$$

Ожидаемая частота (волновое число) случайной функции $w(x)$ будет вычисляться по формуле Райса [3, 4] как

$$\langle \theta \rangle = \frac{S_{\dot w}}{S_w} = \frac{k}{2\sqrt{2}}. \qquad (15)$$

Надежность как вероятность непревышения случайной функцией $w(x)$ некоторого нормативного (опасного) уровня w_* на длине l оболочки будет определяться по формуле двойной экспоненты [3]:

$$P\left\{ w(x) \le w_*,\ x \in (0,l) \right\} = \exp\left\{ -\frac{1}{2\pi} \langle \theta \rangle \exp\left(-\frac{1}{2s_w^2} w_*^2 \right) \right\}. \qquad (16)$$

Заметим, что при $l \to \infty$ имеем $P \to 0$, а при $S_w \to \infty$ и $w_* \to \infty$ имеем $P = 1$.

Формулу (16) получаем из следующих соображений. Обозначим через P_1 надежность при одном случайном воздействии. Тогда, в соответствии с теоремой о произведении вероятностей надежность при n воздействиях будет $P_n = P_1^n$.

Введя в рассмотрение величину $z = n(1 - P_1)$ и полагая

$$P_1 = 1 - \exp\left(-\beta x_*^\alpha \right),$$

где β и α — параметры, получаем

$$P_n = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{z}{n} \right)^n = \exp(-z) = \exp\left\{ n(1 - P_1) \right\} = \exp\left\{ -n \exp\left(-\beta x_*^\alpha \right) \right\}.$$

Надежность как вероятность непревышения напряжениями (10), (11) опасных уровней можно вычислить по аналогичной выражению (16) формуле:

$$P\left\{ \sigma(x) \le \sigma_*,\ x \in (0,l) \right\} = \exp\left\{ -\frac{1}{2\pi} \langle \theta \rangle \exp\left(-\frac{1}{2s_\sigma^2} \sigma_*^2 \right) \right\}. \qquad (17)$$

Здесь индексы при напряжениях σ_x и σ_t опущены.

Применим для решения поставленной вероятностной задачи метод спектральных представлений Фурье [2, 3]. Импеданс и передаточная функция (англ. amplify — усилитель амплитуд) для уравнения (3) вычисляются по формулам

$$L(i\theta) = (i\theta)^4 + 4k^4; \qquad H(i\theta) = \frac{1}{L(i\theta)} = \frac{1}{(i\theta)^4 + 4k^4}.$$

Спектральная плотность функции $w(x)$ и ее первых двух производных будут вычисляться по формулам Винера — Хинчина:

$$S_w(\theta) = \left|H(\theta)\right|^2 S_f(\theta);$$

$$S_{\dot{w}}(\theta) = \theta^2 S_w(\theta); \quad S_{\ddot{w}}(\theta) = \theta^4 S_w(\theta).$$

Дисперсии этих процессов:

$$s_w^2 = \int_0^\infty S_w(\theta)\,d\theta; \quad s_{\dot{w}}^2 = \int_0^\infty \theta^2 S_w(\theta)\,d\theta; \quad s_{\ddot{w}}^2 = \int_0^\infty \theta^4 S_w(\theta)\,d\theta. \tag{18}$$

Вычисление интегралов (18) можно выполнить по формуле

$$\int_0^\infty \frac{x^{p-1}}{\left(1+x^q\right)^2}dx = \frac{q-p}{q^2}\operatorname{cosec}\left(\frac{q-p}{q^2}\pi\right) \quad \left[p < 2q;\ q = 1, 2, 3, \ldots\right].$$

Дальнейшее решение задачи сводится к получению оценок надежности по формулам (16) и (17).

При белом шуме на входе $f(x)$ с интенсивностью k_f от уравнений (18) возвращаемся к полученным выше формулам (13)–(15).

Оценка динамической надежности. Рассмотрим теперь в вероятностном аспекте некоторые задачи динамики оболочек и вернемся к решению уравнения (1) с оператором (2), которое представим в следующем виде:

$$\mu\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + b\frac{\partial w}{\partial t} + cw = q(x,t), \tag{19}$$

где $\mu = \rho h$ — распределенная масса оболочки; $b = 2\rho h\varepsilon$ — коэффициент демпфирования; $c = D\dfrac{\partial^4}{\partial x^4} + \dfrac{Eh}{r^2}$ — упругий оператор системы.

Решение уравнения (19) ищем в виде его разложения по формам собственных колебаний $\varphi_k(x)$:

$$w(x,t) = \sum_{k=1}^\infty u_k(t)\varphi_k(x). \tag{20}$$

Кривизна оболочки будет определяться по формуле

$$\kappa(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}u_k(t)\ddot{\varphi}_k(x),$$

где для шарнирно закрепленной по концам оболочки длиной l имеем $\varphi_k(x)=\sin\frac{\pi kx}{l}$; $u_k(t)$ — функции времени, вероятностные характеристики которых подлежат определению.

Формы колебаний являются попарно ортогональными, т. е. выполняются условия

$$(\varphi_k,\varphi_j)=\int_0^l\varphi_k(x)\varphi_j dx=0 \text{ при } k\neq j;\ (\varphi_k,\varphi_k)\neq 0,$$

где запятая указывает на скалярность произведений [1–3, 10, 15].

Подставив формулу (20) в уравнение (19) и умножив записанный справа результат скалярно на функцию $\varphi_k(x)$, получаем равенства

$$\mu\sum_{\mathrm{k}=1}^{\infty}\ddot{u}_k(t)\varphi_k(x)+b\sum_{k=1}^{\infty}\dot{u}_k(t)\varphi_k(x)+c\sum_{k=1}^{\infty}u_k(t)\varphi_k(x)=q(x,\in t)\varphi_k(x),$$

$$M_k\ddot{u}_k(t)+\beta_k\dot{u}_k(t)+\lambda_k u_k(t)=Q_k(t),$$

$$\ddot{u}_k(t)+2n_k\dot{u}_k(t)+\omega_k^2u_k(t)=f_k(t), \qquad (21)$$

где $M_k=(\mu\varphi_k,\varphi_k)=\frac{\mu l}{2}$ — обобщенная масса, соответствующая k-й форме колебаний; $\beta_k=(b\varphi_k,\varphi_k)=\frac{bl}{2}$ — коэффициент демпфирования; $\lambda_k=(c\varphi_k,\varphi_k)=\frac{\mu}{2}\left(D\frac{k^4\pi^4}{l^4}+\frac{Eh}{r^2}\right)$ — обобщенная жесткость, соответствующая k-й форме колебаний; $Q_k(t)=\left(q(x,t),\varphi_k(x),f_{k(t)}\right)=$ $=\frac{q(x)}{M_k}$ — обобщенные воздействия, соответствующие k-й форме колебаний; $2n_k=\frac{\beta_k}{M_k}$ — коэффициент демпфирования; $\omega_k^2=\frac{\lambda_k}{M_k}$ — квадрат частоты по k-й форме собственных колебаний.

Функция Грина и соответствующая передаточная функция для уравнения (21) имеют вид

$$g_k(t) = \frac{1}{\omega_k} e^{-2n_k t} \sin \omega_k t;$$

$$H_k(i\omega) = \frac{1}{\omega_k^2 - \omega^2 + 2n_k i\omega}.$$

Амплитудные спектры процессов $u_k(t)$ и $u_j(t)$ будут вычисляться по амплитудным спектрам $\Phi_{f_k}(\omega)$ и $\Phi_{f_j}(\omega)$ процессов $f_k(t)$ и $f_j(t)$ как

$$\Phi_{u_k}(\omega) = H_{jk}(i\omega)\Phi_{f_k}(\omega);$$

$$\Phi_{u_j}(\omega) = H_j(i\omega)\Phi_{f_j}(\omega).$$

В соответствии с теоремой Винера о дельта-коррелированности амплитудных спектров случайных процессов имеем равенства

$$\left\langle \Phi^*{}_{u_k}(\omega_1)\Phi_{u_j}(\omega_2)\right\rangle = S_{u_k u_j}(\omega_1)\delta(\omega_1-\omega_2) =$$
$$= \left\langle H^*{}_k(i\omega_1)H_j(i\omega_2)\Phi^*{}_{f_k}(\omega_1)\Phi_{f_j}(\omega_2)\right\rangle =$$
$$= H_k^*(i\omega_1)H_j(i\omega_2)S_{f_k f_j}(\omega_1)\delta(\omega_1-\omega_2). \tag{22}$$

Здесь звездочка наверху означает переход к комплексно-сопряженным функциям, $\langle ... \rangle$ — знак усреднения.

Из выражения (22) следует, что взаимные спектральные плотности процессов будут вычисляться по формуле

$$S_{u_k u_j}(\omega) = H^*{}_k(i\omega)H_j(i\omega)S_{f_k f_j}(\omega).$$

Из уравнений (20) и (21) получаем спектральные плотности для искомых нормальных перемещений оболочки и их первых производных по времени:

$$S_w(\omega, x) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} S_{u_k u_j}(\omega)\varphi_k(x)\varphi_j(x); \tag{23}$$

$$S_{\dot{w}}(\omega, x) = \omega^2 S_w(\omega, x).$$

Отсюда определяем дисперсии для перемещений, их скоростей и среднюю частоту их изменения во времени при $x = l/2$:

$$s_w^2 = \int_{-\infty}^{\infty} S_w(\omega)d\omega; \quad s_{\dot{w}}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} S_{\dot{w}}(\omega)d\omega; \quad \langle\omega\rangle = \frac{s_{\dot{w}}}{s_w}.$$

Надежность как вероятность непревышения нормальных перемещений некоторого нормативного уровня w_* на интервале времени функционирования оболочки T будет вычисляться по формуле (16), т. е. как

$$P = P\left\{w(t) \le w_*,\, t \in (0,T)\right\} = \exp\left\{-\frac{T}{2\pi}\langle\omega\rangle \exp\left(-\frac{1}{2s_w^2}w_*^2\right)\right\}. \tag{24}$$

Из выражений (20) и (23) получаем следующую формулу для вычисления спектральной плотности кривизны оболочки:

$$S_\kappa(\omega, x) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} S_{u_k u_j}(\omega)\ddot{\varphi}_k(x)\ddot{\varphi}_j(x).$$

Надежность как вероятность непревышения напряжениями (10), (11) и кривизной своих нормативных уровней можно также вычислить по формулам (16), (17) и (24).

Для примера рассмотрим случай, когда исходное пространственно-временное поле давления на оболочку $q(x, t)$ представляет собой двумерный белый шум с интенсивностью k_0 и, следовательно, с корреляционной функцией вида

$$K_q(x_1, t_1, x_2, t_2) = \langle q(x_1, t_1)\, q(x_2, t_2)\rangle = k_0\delta(x_1 - x_2)\delta(t_1 - t_2),$$

где $\delta(x_1 - x_2),\ \delta(t_1 - t_2)$ — импульсные функции Дирака координат и времени.

Для вычисления обобщенных воздействий, входящих в уравнение (21), используем формулы

$$f_\alpha(t_1) = \frac{1}{M_\alpha}\int_0^l q(x_1, t_1)\varphi_\alpha(x_1)\,dx_1;$$

$$f_\beta(t_2) = \frac{1}{M_\beta}\int_0^l q(x_2, t_2)\varphi_\beta(x_2)\,dx_2.$$

Взаимные корреляционные функции этих воздействий будут определяться как

$$K_{f_\alpha f_\beta}(t_1, t_2) = \frac{1}{M_\alpha M_\beta}\int_0^l\int_0^l K_q(x_1, t_1, x_2, t_2)\varphi_\alpha(x_1)\varphi_\beta(x_2)\,dx_1 dx_2 =$$

$$= K_{f_\alpha f_\beta}(\tau) = \frac{2k_0 l}{m^2}\delta_{\alpha\beta}\delta(\tau), \tag{25}$$

где $\tau = t_1 - t_2$; $\delta_{\alpha\beta}$ — символы Кронекера; $\delta_{\alpha\beta} = \begin{cases} 1 \text{ при } \alpha = \beta, \\ 0 \text{ при } \alpha \ne \beta. \end{cases}$

Взаимные спектральные плотности процессов $f_\alpha(t)$ и $f_\beta(t)$ как преобразование Фурье корреляционной функции (25) будут

$$S_{f_\alpha f_\beta}(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}K_{f_\alpha f_\beta}(\tau)\,\mathrm{e}^{-i\omega\tau}d\tau=\begin{cases}\dfrac{2k_0 l}{m^2} & \text{при } \alpha=\beta,\\ 0 & \text{при } \alpha\neq\beta,\end{cases} \tag{26}$$

т. е. правые части уравнений (21) будут белыми шумами с интенсивностью (26), и дальнейшие расчеты становятся тривиальными.

Заключение. Таким образом, поставленную задачу по расчетному получению приближенных вероятностных оценок надежности функционирования оболочек, находящихся в турбулентном потоке жидкости или газа, можно считать решенной. Эффективные приближенные решения получены в предположении, что гауссовские стационарные процессы можно представить в виде квазигармонических колебаний со случайными амплитудами и частотами. Для получения точных решений могут быть использованы метод функции Грина и метод спектральных представлений Фурье.

Надежность рассматривается как вероятность непревышения перемещениями, напряжениями и кривизной некоторого нормативного уровня по всей длине и на заданном интервале времени функционирования оболочки.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Болотин В.В. *Вибрации в технике: справочник: в 6 т. Т. 1*: *Колебания линейных систем*. Москва, Машиностроение, 1999, 504 с.

[2] Болотин В.В. *Случайные колебания упругих систем*. Москва, Наука, 1979, 335 с.

[3] Гусев А.С. *Вероятностные методы в механике машин и конструкций*. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2009, 225 с.

[4] Гусев А.С. *Курс лекций по вероятностным методам в механике*. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2020, 102 с.

[5] Гусев А.С., Карунин А.Л., Крамской Н.А., Стародубцева С.А. *Надежность механических систем и конструкций при случайных воздействиях*. Москва, МАМИ, 2001, 284 с.

[6] Crandall S.H. *Random Vibration*. Cambridge, Technology Press, 1963.

[7] [7] Окопный Ю.А., Радин В.П., Чирков В.П. *Колебания линейных систем*. Москва, Спектр, 2014, 432 с.

[8] Тихонов В.И., Миронов М.А. *Марковские процессы*. Москва, Советское радио, 1977, 488 с.

[9] Гусев А.С., Карунин А.Л., Крамской Н.А., Стародубцева С.А., Щербаков В.И. *Теория колебаний в автомобиле- и тракторостроении*. Москва, МГТУ «МАМИ», 2007, 336 с.

[10] Гусев А.С., Найденов С.О. Анализ траекторий недифференцируемых случайных процессов. *Известия вузов. Сер. Машиностроение*, 2014, № 9, с. 3–8.

[11] Roberts J.B., Spanos P.D. *Random vibration and statistical linearization*. New York, John Willey, 1990, 407 p.

[12] Чирков В.П. *Вопросы надежности механических систем*. Москва, Знание, 1981, 54 с.

[13] Махутов Н.А. Критериальная база прочности, ресурса, надежности, живучести машин и человеко-машинных комплексов. *Проблемы машиностроения и надежности машин*, 2013, № 5, с. 25–36.

[14] Николаенко Н.А. *Вероятностные методы динамического расчета машиностроительных конструкций*. Москва, Машиностроение, 1967, 367 с.

[15] Колесников К.С. *Динамика ракет*. Москва, Машиностроение, 1980, 376 с.

[16] Гусев А.С., Щербаков В.И., Чуканин Ю.П., Стародубцева С.А. Метод статистической линеаризации в динамике нелинейных систем мобильных машин. *Известия МГТУ «МАМИ»*, 2014, т. 1 (19), с. 84–86.

[17] Пановко Я.Г., Губанова И.И. *Устойчивость и колебания упругих систем. Современные концепции, парадоксы и ошиб*ки. 7-е изд. Москва, Ленанд, 2015, 350 с.

Статья поступила в редакцию 23.06.2025

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Стародубцева С.А., Зинченко Л.В., Сахаров А.А. О расчете надежности тонкостенных цилиндрических оболочек, находящихся в турбулентном потоке жидкости или газа, при случайных воздействиях. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2025, вып. 8. EDN YNFSLY

Стародубцева Светлана Александровна — канд. техн. наук, доцент, доцент кафедры «Инновационные технологии наукоемких отраслей» Национального исследовательского университета «МЭИ». e-mail: starodubtseva_sa@mail.ru

Зинченко Лариса Витальевна — канд. техн. наук, доцент кафедры «Прикладная механика» МГТУ им. Н.Э. Баумана. e-mail: zinlar@bmstu.ru

Сахаров Алексей Александрович — старший преподаватель кафедры «Инновационные технологии наукоемких отраслей» Национального исследовательского университета «МЭИ». e-mail: SakharovAlA@mpei.ru

On calculating the reliability of thin-walled cylindrical shells located in a turbulent liquid or gas flow under random actions

© S.A. Starodubtseva[1], L.V. Zinchenko[2], A.A. Sakharov[1]

[1]National Research University "Moscow Power Engineering Institute" (MPEI), Moscow, 000000, Russian Federation
[2]Bauman Moscow State Technical University, Moscow, 105005, Russian Federation

The paper considers thin-walled cylindrical shells in turbulent liquid or gas flows under the axisymmetric external or internal spatio-temporal random pressure field. For such shells, the paper determines random fields of the normal displacements, stresses and curvature alterations. The main objective is to identify probabilities of the events that the shell parameters (displacements, stresses and curvature) would never exceed their standard values over the entire length, and the given time interval of the system operation. The paper uses the basic concepts and statistical dynamics methods of the mechanical systems, including impedance, transfer function, Green's function, correlation function, energy spectrum of the random fields and processes, etc. Relatively simple solutions are obtained by the Green's function method for the inertialess shells loaded with a random stationary pressure field distributed along its length and presented in a quasi-harmonic form with the random amplitudes and frequencies. Efficient solutions to the stated dynamic problems are also obtained by expanding them in terms of the proper axisymmetric modes of the shell oscillation, as well as for the case, where the pressure field could be represented by the spatio-temporal two-dimensional white noise. The paper shows a fundamental possibility of obtaining an exact solution to the stated problems for the general case of loading, when pressure on the shell could be represented as a generalized two-dimensional Fourier transform in coordinates and time.

Keywords: *shells, oscillation shape, random processes, transfer function, reliability, mechanical systems, mechanical engineering*

REFERENCES

[1] Bolotin V.V. *Vibratsii v tekhnike: Spravochnik: v 6 t. T. 1. Kolebaniya lineynykh sistem* [Oscillations in engineering: Handbook: in 6 volumes. Vol. 1. Oscillations of the linear systems]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1999, 504 p.

[2] Bolotin V.V. *Sluchaynye kolebaniya uprugikh sistem* [Random oscillations of the elastic systems]. Moscow, Nauka Publ., 1979, 335 p.

[3] Gusev A.S. *Veroyatnostnye metody v mekhanike mashin i konstruktsiy* [Probabilistic methods in mechanics of machines and structures]. Moscow, BMSTU Publ., 2009, 225 p.

[4] Gusev A.S. *Kurs lektsiy po veroyatnostnym metodam v mekhanike* [Lecture course on probabilistic methods in mechanics]. Moscow, BMSTU Publ., 2020, 102 p.

[5] Gusev A.S., Karunin A.L., Kramskoy N.A., Starodubtseva S.A. *Nadezhnost mekhanicheskikh sistem i konstruktsiy pri sluchaynykh vozdeystviyakh* [Reliability of mechanical systems and structures under random impacts]. Moscow, MAMI Publ., 2001, 284 p.

[6] Grandall S. H. *Random Vibration*. Cambridge, Technology Press, 1963.

[7] Okopny Yu.A., Radin V.P., Chirkov V.P. *Kolebaniya lineynykh sistem* [Oscillations of the linear systems]. Moscow, Spektr Publ., 2014, 432 p.

[8] Tikhonov V.I., Mironov M.A. *Markovskie protsessy* [Markov processes]. Moscow, Sovetskoe Radio Publ., 1977, 488 p.
[9] Gusev A.S., Karunin A.L., Kramskoy N.A., Starodubtseva S.A., Shcherbakov V.I. *Teoriya kolebaniy v avtomobile- i traktorostroenii* [Theory of oscillations in the automobile and tractor manufacturing]. Moscow, MGTU “MAMI” Publ., 2007, 336 p.
[10] Gusev A.S., Naydenov S.O. Analiz traektoriy nedifferentsiruemykh sluchaynykh protsessov [Analysis of trajectories of non-differentiable random processes]. *Izvestia vuzov. Mashinostroyenie — BMSTU Journal of Mechanical Engineering*, 2014, no. 9, pp. 3–8.
[11] Roberts J.B., Spanos P.D. *Random vibration and statistical linearization*. New York, John Willey, 1990, 407 p.
[12] Chirkov V.P. *Voprosy nadezhnosti mekhanicheskikh sistem* [Reliability issues of the mechanical systems]. Moscow, Znanie Publ., 1981, 54 p.
[13] Makhutov N.A. Kriterialnaya baza prochnosti, resursa, nadezhnosti, zhivuchesti mashin i cheloveko-mashinnykh kompleksov [Criterion base of strength, resource, reliability, survivability and safety of machines and man-machine complexes]. *Problemy mashinostroeniya i nadezhnosti mashin — Journal of Machinery Manufacture and Reliability*, 2013, no. 5, pp. 25–36.
[14] Nikolaenko N.A. *Veryatnostnye metody dinamicheskogo rascheta mashinostroitelnykh konstruktsiy* [Probabilistic methods of dynamic computation of the mechanical engineering structures]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1967, 367 p.
[15] Kolesnikov K.S. *Dinamika raket* [Dynamics of rockets]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1980, 376 p.
[16] Gusev A.S., Scherbakov V.I., Chukanin Y.P., Starodubtseva S.A. Metod statisticheskoy linearizatsii v dinamike nelineynykh sistem mobilnykh mashin [Method of statistical linearization of nonlinear dynamics in system of mobile machines]. *Izvestiya MGTU MAMI*, 2014, vol. 1, no. 19, pp. 84–86.
[17] Panovko Ya.G., Gubanova I.I. *Ustoychivost i kolebaniya uprugikh sistem. Sovremennye kontseptsii, paradoksy i oshibki* [Stability and oscillations of the elastic systems. Modern concepts, paradoxes and errors]. 7th ed. Moscow, Lenand Publ., 2015, 350 p.

Starodubtseva S.A., Cand. Sc. (Eng.), Associate Professor, Associate Professor of the Department of Innovative Technologies in Science-Intensive Industries, National Research University “Moscow Power Engineering Institute” (MPEI).
e-mail: starodubtseva_sa@mail.ru

Zinchenko L.V., Cand. Sc. (Eng.), Associate Professor, Department of Applied Mechanics, Bauman Moscow State Technical University. e-mail: zinlar@bmstu.ru

Sakharov A.A., Senior Lecturer, Department of Innovative Technologies in Science-Intensive Industries, National Research University “Moscow Power Engineering Institute” (MPEI). e-mail: SakharovAlA@mpei.ru