

Математическая модель углового движения спускаемого аппарата, управляемого смещением центра масс

© А.С. Кухаренко, В.В. Корянов, А.И. Игнатов

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Российская Федерация

В работе составлены уравнения математической модели движения спускаемого аппарата, управляемого изменением положения центра масс. Перемещение центра масс выполнено посредством поворота внутренней подвижной массы, которой является полезная нагрузка. При записи математической модели спускаемый аппарат рассматривается как система двух твердых тел, соединенных сферическим шарниром. Уравнения получены с использованием уравнения Лагранжа 2-го рода. Кинетическая энергия выражена в координатах, не привязанных к центру масс аппарата, а начальная точка системы координат совпадает с центром шарнира, что значительно упрощает вывод уравнений. Показана возможность описать движение спускаемого аппарата уравнениями углового движения при известных значениях аэродинамических моментов. Для проверки правильности полученных уравнений разработана схема механического устройства.

Ключевые слова: изменение положения центра масс, надувное тормозное устройство, поворот полезной нагрузки, поворотное устройство, несущее тело, несомое тело

Введение. В научных межпланетных миссиях планируется проведение исследований и экспериментов на поверхности небесных тел Солнечной системы. Реализуются программы по исследованию Марса и Венеры, с которых намечено доставлять на Землю образцы грунта [1, 2]. Для обеспечения надежной посадки космических аппаратов (КА) на поверхности планет необходимо управлять их движением в процессе спуска. По способам создания управляющих воздействий выделяют аэродинамические и газодинамические органы управления [3], а также управление методом изменения положения центра масс (ЦМ) летательного аппарата (ЛА) [4].

При управлении движением за счет изменения положения центра масс отсутствует взаимодействие механизмов управления с окружающей средой, что повышает надежность технической системы. Кроме того, отсутствуют газообразные выбросы в окружающую среду, что благоприятствует работе систем управления по оптическим датчикам [5].

Метод управления изменением положения ЦМ применяется в управлении движением КА, подводных роботов, вращающихся снарядов, беспилотных летательных аппаратов [4, 6–8].

Цель данного исследования — разработка математической модели углового движения спускаемого аппарата, управляемого смещением центра масс.

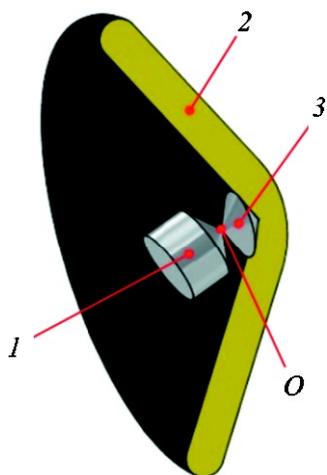


Рис. 1. Конструктивная схема спускаемого аппарата, управляемого изменением положения центра масс O посредством внутренней подвижной массы:

1 — полезная нагрузка (космический аппарат); 2 — надувное тормозное устройство; 3 — поворотное устройство

При описании движения ЛА, управляемого изменением положения центра масс, конструктивная схема которого представлена на рис. 1, использовать систему координат, связанную с ЦМ, нецелесообразно. Это обусловлено тем, что при управлении движением ЦМ изменяет свое положение, а также изменяются инерционные свойства элементов спускаемого аппарата (СА) относительно центра масс [5]. Предполагается, что привязка начала подвижной системы координат не к ЦМ исследуемого объекта позволит упростить выражения уравнений движения.

Управление движением спускаемого аппарата осуществляется следующим образом. Внутри надувного тормозного устройства расположена полезная нагрузка, выполняющая роль подвижной массы, которая соединена с ним сферическим шарниром, обеспечивающим ее поворот в двух взаимно перпендикулярных плоскостях. Изменение углового положения полезной нагрузки приводит к смещению центра масс СА относительно продольной оси надувного тормозного устройства, за счет чего и осуществляется управление движением аппарата.

Прежде чем выводить уравнения движения СА, управляемого изменением положения ЦМ, необходимо составить уравнения движения твердого тела с использованием уравнения Лагранжа 2-го рода.

Уравнения движения твердого тела. Для того чтобы составить уравнения движения СА, управляемого изменением положения центра масс, записано выражение кинетической энергии твердого тела, совершающего движение в одной плоскости. Данное выражение составлено в системе координат, не связанной с его ЦМ. Чтобы упростить вывод уравнения, движение твердого тела рассматривается в одной из плоскостей неподвижной системы координат. Так, данная плоскость обозначена Ox на рис. 2.

Неподвижная система координат совершает только поступательное движение. Положение произвольной точки m_k твердого тела по отношению к неподвижному центру O определяет радиус-вектор

$$\bar{\rho}_k = \bar{R}_c + \bar{R}_{O'} + \bar{R}_k. \quad (1)$$

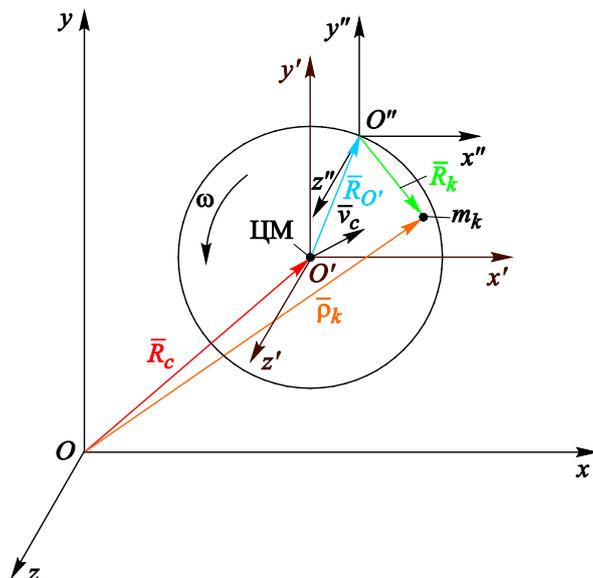


Рис. 2. Схема к выводу выражения кинетической энергии в подвижной системе координат, не связанной с центром масс твердого тела:

$\bar{\rho}_k$ — радиус-вектор, соединяющий начало инерциальной системы координат $Oxyz$ с точечной массой твердого тела; \bar{R}_c — радиус-вектор, соединяющий начало инерциальной системы координат $Oxyz$ с центром масс твердого тела; $\bar{R}_{O'}$ — радиус-вектор, соединяющий центр масс твердого тела с началом системы координат $O''x''y''z''$; \bar{R}_k — радиус-вектор, соединяющий начало системы координат $O''x''y''z''$ с точечной массой твердого тела m_k ; $Oxyz$ — неподвижная система координат; $O'x'y'z'$ — система координат с началом в центре масс твердого тела, совершающая поступательное движение; $O''x''y''z''$ — система координат, связанная с твердым телом, начало которой не совпадает с центром масс твердого тела

После дифференцирования выражения (1) по времени получено выражение вектора скорости произвольной точки твердого тела:

$$\bar{v}_k = \bar{v}_c + \bar{v}_{O'}^{(r)} + \bar{v}_k^{(r)}. \quad (2)$$

Преобразовав с учетом (2) выражение кинетической энергии, можно получить

$$T = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N m_k \cdot \bar{v}_k^2 = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N m_k \cdot \left(\bar{v}_c + \bar{v}_{O'}^{(r)} + \bar{v}_k^{(r)} \right)^2. \quad (3)$$

Теперь следует раскрыть квадрат суммы скоростей в выражении (3):

$$\begin{aligned} \left(\bar{v}_c + \bar{v}_{O'}^{(r)} + \bar{v}_k^{(r)} \right)^2 &= \bar{v}_c^2 + \bar{v}_c \cdot \bar{v}_{O'}^{(r)} + \bar{v}_c \cdot \bar{v}_k^{(r)} + \bar{v}_c \cdot \bar{v}_{O'}^{(r)} + \left(\bar{v}_{O'}^{(r)} \right)^2 + \\ &+ \bar{v}_k^{(r)} \cdot \bar{v}_{O'}^{(r)} + \bar{v}_c \cdot \bar{v}_k^{(r)} + \bar{v}_k^{(r)} \cdot \bar{v}_{O'}^{(r)} + \left(\bar{v}_k^{(r)} \right)^2 = \\ &= \bar{v}_c^2 + \left(\bar{v}_{O'}^{(r)} \right)^2 + \left(\bar{v}_k^{(r)} \right)^2 + 2 \cdot \bar{v}_c \cdot \left(\bar{v}_{O'}^{(r)} + \bar{v}_k^{(r)} \right) + 2 \cdot \bar{v}_k^{(r)} \cdot \bar{v}_{O'}^{(r)}. \end{aligned} \quad (4)$$

Затем в результате преобразования выражения (3) с учетом (4) получено выражение кинетической энергии твердого тела через скорости движения точечных масс:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N m_k \cdot \bar{v}_k^2 = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N m_k \cdot \bar{v}_c^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N m_k \cdot (\bar{v}_{O'}^{(r)})^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N m_k \cdot (\bar{v}_k^{(r)})^2 + \sum_{k=1}^N m_k \cdot \bar{v}_c \cdot (\bar{v}_{O'}^{(r)} + \bar{v}_k^{(r)}) + \sum_{k=1}^N m_k \cdot \bar{v}_k^{(r)} \cdot \bar{v}_{O'}^{(r)}. \quad (5)$$

Выражение кинетической энергии (5) следует преобразовать, для того чтобы представить его через скорость поступательного движения твердого тела и угловую скорость движения относительно ЦМ твердого тела. Преобразование первого слагаемого в выражении (5) позволяет выразить его через скорость движения ЦМ и массу твердого тела:

$$\frac{1}{2} \sum_{k=1}^N m_k \cdot \bar{v}_c^2 = \frac{Mv_c^2}{2}. \quad (6)$$

В результате преобразований второе слагаемое выражения (5) записано через массу, угловую скорость твердого тела и расстояние от ЦМ до подвижной системы координат $O''x''y''z''$:

$$\frac{1}{2} \sum_{k=1}^N m_k \cdot (\bar{v}_{O'}^{(r)})^2 = \frac{M\omega^2 (R_{O'})^2}{2}. \quad (7)$$

Третье слагаемое в (5) после преобразований выражено через осевой момент инерции твердого тела относительно оси $O''z''$ и угловую скорость ω твердого тела относительно этой же оси:

$$\frac{1}{2} \sum_{k=1}^N m_k \cdot (\bar{v}_k^{(r)})^2 = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N m_k \cdot \omega^2 \cdot (R_k)^2 = \frac{J_{z''}\omega^2}{2}, \quad (8)$$

где $J_{z''}$ — момент инерции твердого тела относительно оси $O''z''$.

Четвертое слагаемое в (5) эквивалентно нулю:

$$\sum_{k=1}^N m_k \cdot \bar{v}_c \cdot (\bar{v}_{O'}^{(r)} + \bar{v}_k^{(r)}) = \bar{v}_c \cdot \frac{d}{dt} \sum_{k=1}^N m_k \cdot (\bar{R}_{O'} + \bar{R}_k) = 0. \quad (9)$$

Это обусловлено тем, что сумма статических моментов масс точек относительно ЦМ равна нулю, т. е. $\sum_{k=1}^N m_k \cdot (\bar{R}_{O'} + \bar{R}_k) = 0$.

Пятое слагаемое в (5) в результате преобразований представлено через массу и угловую скорость твердого тела, а также расстояние от ЦМ до подвижной системы координат $O''x''y''z''$:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^N m_k \cdot \bar{v}_k^{(r)} \cdot \bar{v}_{O'}^{(r)} &= \bar{v}_{O'}^{(r)} \cdot \sum_{k=1}^N m_k \cdot \bar{v}_k^{(r)} = \bar{v}_{O'}^{(r)} \cdot \sum_{k=1}^N m_k \cdot \frac{d\bar{R}_k}{dt} = \\ &= \bar{v}_{O'}^{(r)} \cdot \frac{d}{dt} \sum_{k=1}^N m_k \cdot \bar{R}_k = \bar{v}_{O'}^{(r)} \cdot \frac{d}{dt} M \cdot (-\bar{R}_{O'}) = -M \cdot \omega^2 \cdot (\bar{R}_{O'})^2. \end{aligned} \quad (10)$$

После подстановки (6)–(10) в выражение (5) получено следующее выражение кинетической энергии:

$$T = \frac{Mv_c^2}{2} + \frac{M\omega^2(\bar{R}_{O'})^2}{2} + \frac{J_{z''}\omega^2}{2} - M\omega^2(\bar{R}_{O'})^2, \quad (11)$$

которое после преобразований примет вид

$$T = \frac{M \cdot v_c^2}{2} + \frac{(J_{z''} - (R_{O'})^2 M) \omega^2}{2},$$

где M — масса твердого тела; \bar{v}_c — вектор скорости ЦМ твердого тела, $v_c = |\bar{v}_c|$; $J_{z''}$ — момент инерции твердого тела относительно оси $O''z''$; $\bar{R}_{O'}$ — радиус-вектор, соединяющий начало инерциальной системы координат $Oxyz$ и ЦМ твердого тела; $\bar{\omega}$ — вектор угловой

скорости твердого тела, $\bar{\omega} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_z \end{pmatrix}$.

Таким образом, получено выражение для расчета кинетической энергии твердого тела в подвижной системе координат $O''x''y''z''$, не связанной с его ЦМ.

Задача о движении двух связанных тел. Схема к составлению выражения кинетической энергии представлена на рис. 3. На ней СА представлен как система двух твердых тел 1 и 2. В качестве подвижной системы координат принята система $O''x''y''z''$ с началом в точке сопряжения твердых тел 1 и 2. Ось $O''z''$ представляет собой цилиндрический шарнир. Система координат $O''x''y''z''$ совершает поступательное движение. С центром масс системы двух твердых тел связана система координат $O'x'y'z'$, совершающая поступательное движение.

Положение произвольных точек m_i и m_k , соответствующих твердому телу 1 и 2, по отношению к неподвижному центру O определяют следующие два радиуса-вектора:

$$\bar{\rho}_i = \bar{R}_c + \bar{R}_{O'} + \bar{R}_i, \quad (12)$$

$$\bar{\rho}_k = \bar{R}_c + \bar{R}_{O''} + \bar{R}_k. \quad (13)$$

Здесь \bar{R}_c — радиус-вектор, соединяющий начало инерциальной системы координат Oxy и ЦМ двух связанных тел; $\bar{R}_{O'}$ — радиус-вектор, соединяющий ЦМ двух связанных тел и начало подвижной системы координат $O''x''y''$; \bar{R}_i — радиус-вектор, соединяющий начало подвижной системы координат $O''x''y''$ и точку твердого тела 1; \bar{R}_k — радиус-вектор, соединяющий начало подвижной системы координат $O''x''y''$ и точку твердого тела 2.

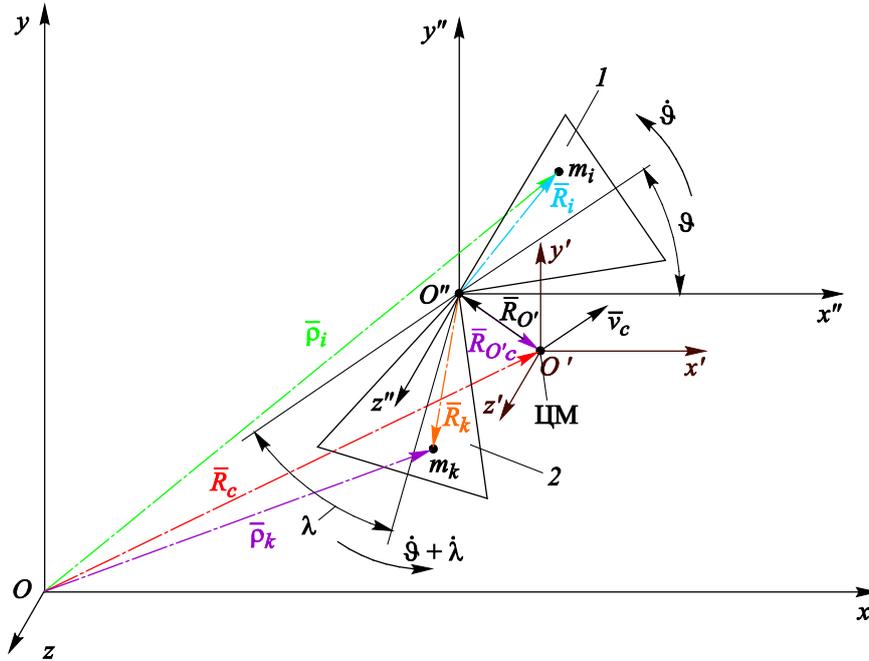


Рис. 3. Схема к решению задачи о двух связанных твердых телах 1 и 2

Дифференцированием (12) и (13) по времени получены выражения векторов скоростей для произвольных точек твердых тел 1 и 2:

$$\bar{v}_i = \bar{v}_c + \bar{v}_{O'} + \bar{v}_i ; \tag{14}$$

$$\bar{v}_k = \bar{v}_c + \bar{v}_{O'} + \bar{v}_k . \tag{15}$$

С учетом (14), (15) было преобразовано выражение кинетической энергии системы двух связанных тел:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N m_k \cdot \bar{v}_k^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \cdot \bar{v}_i^2 = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N m_k \cdot (\bar{v}_c + \bar{v}_{O'} + \bar{v}_k)^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \cdot (\bar{v}_c + \bar{v}_{O'} + \bar{v}_i)^2 . \end{aligned} \tag{16}$$

Раскрытием квадрата суммы скоростей в (16) были получены два выражения:

$$\begin{aligned} (\bar{v}_c + \bar{v}_{O'} + \bar{v}_k)^2 &= \bar{v}_c^2 + \bar{v}_c \cdot \bar{v}_{O'} + \bar{v}_c \cdot \bar{v}_k + \bar{v}_c \cdot \bar{v}_{O'} + (\bar{v}_{O'})^2 + \\ &+ \bar{v}_k \cdot \bar{v}_{O'} + \bar{v}_c \cdot \bar{v}_k + \bar{v}_k \cdot \bar{v}_{O'} + (\bar{v}_k)^2 = \\ &= \bar{v}_c^2 + (\bar{v}_{O'})^2 + (\bar{v}_k)^2 + 2 \cdot \bar{v}_c \cdot (\bar{v}_{O'} + \bar{v}_k) + 2 \cdot \bar{v}_k \cdot \bar{v}_{O'}; \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} (\bar{v}_c + \bar{v}_{O'} + \bar{v}_i)^2 &= \bar{v}_c^2 + \bar{v}_c \cdot \bar{v}_{O'} + \bar{v}_c \cdot \bar{v}_i + \bar{v}_c \cdot \bar{v}_{O'} + (\bar{v}_{O'})^2 + \\ &+ \bar{v}_i \cdot \bar{v}_{O'} + \bar{v}_c \cdot \bar{v}_i + \bar{v}_i \cdot \bar{v}_{O'} + (\bar{v}_i)^2 = \\ &= \bar{v}_c^2 + (\bar{v}_{O'})^2 + (\bar{v}_i)^2 + 2 \cdot \bar{v}_c \cdot (\bar{v}_{O'} + \bar{v}_i) + 2 \cdot \bar{v}_i \cdot \bar{v}_{O'}. \end{aligned} \quad (18)$$

Преобразование выражения (16) с учетом (17), (18) позволило представить кинетическую энергию через скорости точечных масс системы твердых тел:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N m_k \cdot \bar{v}_k^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \cdot \bar{v}_i^2 = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N m_k \cdot \bar{v}_c^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N m_k \cdot (\bar{v}_{O'})^2 + \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N m_k \cdot (\bar{v}_k)^2 + \sum_{k=1}^N m_k \cdot \bar{v}_c \cdot (\bar{v}_{O'} + \bar{v}_k) + \sum_{k=1}^N m_k \cdot \bar{v}_k \cdot \bar{v}_{O'} + \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \cdot \bar{v}_c^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \cdot (\bar{v}_{O'})^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \cdot (\bar{v}_i)^2 + \\ &+ \sum_{i=1}^N m_i \cdot \bar{v}_c \cdot (\bar{v}_{O'} + \bar{v}_i) + \sum_{i=1}^N m_i \cdot \bar{v}_i \cdot \bar{v}_{O'}. \end{aligned} \quad (19)$$

Преобразование выражения (19) было выполнено для того, чтобы представить его через известные характеристики движения системы твердых тел (скорость поступательного движения, угловые скорости движения твердых тел 1 и 2). Затем были преобразованы слагаемые

$\sum_{k=1}^N m_k \cdot \bar{v}_c \cdot (\bar{v}_{O'} + \bar{v}_k) + \sum_{i=1}^N m_i \cdot \bar{v}_c \cdot (\bar{v}_{O'} + \bar{v}_i)$ в выражении (19):

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^N m_k \cdot \bar{v}_c \cdot (\bar{v}_{O'} + \bar{v}_k) + \sum_{i=1}^N m_i \cdot \bar{v}_c \cdot (\bar{v}_{O'} + \bar{v}_i) = \\ &= \bar{v}_c \cdot \left(\sum_{k=1}^N m_k \cdot (\bar{v}_{O'} + \bar{v}_k) + \sum_{i=1}^N m_i \cdot (\bar{v}_{O'} + \bar{v}_i) \right) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \bar{v}_c \cdot \frac{d}{dt} \left(\sum_{k=1}^N m_k \cdot (\bar{R}_{O^r} + \bar{R}_k) + m_i \cdot (\bar{R}_{O^r} + \bar{R}_i) \right) = \\
 &= \bar{v}_c \cdot \frac{d}{dt} \left(\sum_{k=1}^N m_k \cdot \bar{R}_{O^r} + m_k \cdot \bar{R}_k + m_i \cdot \bar{R}_{O^r} + m_i \cdot \bar{R}_i \right),
 \end{aligned}$$

где $\sum_{k=1}^N m_k \cdot \bar{R}_{O^r} + m_k \cdot \bar{R}_k + m_i \cdot \bar{R}_{O^r} + m_i \cdot \bar{R}_i = 0$ — сумма статических мо-

ментов масс точек относительно центра масс.

Получено равенство $\sum_{k=1}^N m_k \cdot \bar{v}_c \cdot (\bar{v}_{O^r} + \bar{v}_k) + \sum_{i=1}^N m_i \cdot \bar{v}_c \cdot (\bar{v}_{O^r} + \bar{v}_i) = 0$.

Преобразование слагаемых $\frac{1}{2} \sum_{k=1}^N m_k \cdot \bar{v}_c^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \cdot \bar{v}_c^2$ в выражении (19) позволило их представить через массу системы твердых тел и скорость движения ЦМ системы:

$$\frac{1}{2} \sum_{k=1}^N m_k \cdot \bar{v}_c^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \cdot \bar{v}_c^2 = \frac{M \cdot v_c^2}{2}. \quad (20)$$

В результате преобразования слагаемые $\frac{1}{2} \sum_{k=1}^N m_k \cdot (\bar{v}_{O^r})^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \cdot (\bar{v}_{O^r})^2$ выражения (19) записаны через массу системы твердых тел и производную от радиуса-вектора, соединяющего ЦМ системы с началом системы координат $O''x''y''z''$:

$$\begin{aligned}
 &\frac{1}{2} \sum_{k=1}^N m_k \cdot (\bar{v}_{O^r})^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \cdot (\bar{v}_{O^r})^2 = \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{k=1; i=1}^N (m_k + m_i) \left(\frac{d\bar{R}_{O^r}}{dt} \right)^2 = \frac{M}{2} \left(\frac{d\bar{R}_{O^r}}{dt} \right)^2. \quad (21)
 \end{aligned}$$

После преобразования слагаемое $\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \cdot (\bar{v}_i)^2$ выражено через момент инерции твердого тела I относительно начала системы координат $O''x''y''z''$ и угловую скорость движения $\dot{\Phi}$ твердого тела I :

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \cdot (\bar{v}_i)^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \cdot \dot{\vartheta}^2 \cdot R_i^2 = \frac{J_{z''}^{(1)} \cdot \dot{\vartheta}^2}{2}. \quad (22)$$

Слагаемое $\frac{1}{2} \sum_{k=1}^N m_k \cdot (\bar{v}_k)^2$ после преобразований представлено через момент инерции твердого тела 2 относительно оси $O''z''$ и угловые скорости движения $\dot{\vartheta}$ твердого тела 1 и $\dot{\lambda}$ твердого тела 2:

$$\frac{1}{2} \sum_{k=1}^N m_k \cdot (\bar{v}_k)^2 = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N m_k \cdot (\dot{\vartheta} + \dot{\lambda})^2 \cdot R_k^2 = \frac{J_{z''}^{(2)} \cdot (\dot{\vartheta} + \dot{\lambda})^2}{2}. \quad (23)$$

Преобразование слагаемых $\sum_{k=1}^N m_k \cdot \bar{v}_k \cdot \bar{v}_{O''} + \sum_{i=1}^N m_i \cdot \bar{v}_i \cdot \bar{v}_{O''}$ выражения (19) позволило записать его через массу твердого тела и производную от радиуса-вектора, соединяющего ЦМ системы с началом системы координат $O''x''y''z''$:

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^N m_k \cdot \bar{v}_k \cdot \bar{v}_{O''} + \sum_{i=1}^N m_i \cdot \bar{v}_i \cdot \bar{v}_{O''} = \bar{v}_{O''} \cdot \sum_{k=1}^N m_k \cdot \bar{v}_k + \bar{v}_{O''} \cdot \sum_{i=1}^N m_i \cdot \bar{v}_i = \\ & = \bar{v}_{O''} \cdot \sum_{k=1; i=1}^N m_k \cdot \frac{d\bar{R}_k}{dt} + m_i \cdot \frac{d\bar{R}_i}{dt} = \bar{v}_{O''} \cdot \frac{d}{dt} \sum_{k=1; i=1}^N m_k \cdot \bar{R}_k + m_i \cdot \bar{R}_i = \\ & = \bar{v}_{O''} \cdot \frac{d}{dt} \sum_{k=1; i=1}^N (m_k \cdot \bar{R}_k + m_i \cdot \bar{R}_i) \cdot \frac{M}{M} = \\ & = M \cdot \bar{v}_{O''} \cdot \frac{d}{dt} \sum_{k=1; i=1}^N \frac{(m_k \cdot \bar{R}_k + m_i \cdot \bar{R}_i)}{M} = \\ & = (-1) \cdot M \cdot \bar{v}_{O''} \cdot \frac{dR_{O''}}{dt} = (-1) \cdot M \cdot \left(\frac{dR_{O''}}{dt} \right)^2. \end{aligned} \quad (24)$$

Подстановка (20)–(24) в выражение (19) приводит к выражению кинетической энергии системы двух связанных тел следующего вида:

$$T = \frac{M \cdot v_c^2}{2} + \frac{J_{z''}^{(1)} \cdot \dot{\vartheta}^2}{2} + \frac{J_{z''}^{(2)} \cdot (\dot{\vartheta} + \dot{\lambda})^2}{2} - \frac{M}{2} \left(\frac{d\bar{R}_{O''}}{dt} \right)^2. \quad (25)$$

Выражение (25) получено для расчета кинетической энергии двух связанных тел с использованием системы координат $O''x''y''z''$, не связанной с его ЦМ, в котором $M = M_1 + M_2$ — масса системы твердых тел; M_1 — масса твердого тела 1 системы; M_2 — масса твердого тела 2 системы; \bar{v}_c — вектор скорости центра масс системы твердых

тел; $J_{z''}^{(1)}$; $J_{z''}^{(2)}$ — моменты инерции твердого тела 1 и 2 относительно оси $O''z''$; $\dot{\vartheta}$ — угловая скорость твердого тела 1; $\dot{\lambda}$ — угловая скорость твердого тела 2 относительно 1; $\bar{R}_{O'}$ — вектор, соединяющий ЦМ системы твердых тел и начало подвижной системы координат (вектор, соединяющий начало системы координат $O'x'y'z'$ с началом системы координат $O''x''y''z''$); $\frac{d\bar{R}_{O'}}{dt} = -\frac{d\bar{R}_{O''c}}{dt}$; $\bar{R}_{O''c}$ — вектор, противоположный вектору $\bar{R}_{O'}$ и соединяющий начало системы координат $O''x''y''z''$ с ЦМ системы твердых тел (началом системы координат $O'x'y'z'$).

В соответствии с построениями на рис. 3 вектор $\bar{R}_{O''c}$ можно представить в следующем виде:

$$\bar{R}_{O''c} = \begin{pmatrix} \frac{M_1 R_{ЦМ}^{(1)} \cos \vartheta + M_2 R_{ЦМ}^{(2)} \cos(180^\circ + \lambda + \vartheta)}{M_1 + M_2} \\ \frac{M_1 R_{ЦМ}^{(1)} \sin \vartheta + M_2 R_{ЦМ}^{(2)} \sin(180^\circ + \lambda + \vartheta)}{M_1 + M_2} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{M_1 R_{ЦМ}^{(1)} \cos \vartheta - M_2 R_{ЦМ}^{(2)} \cos(\lambda + \vartheta)}{M_1 + M_2} \\ \frac{M_1 R_{ЦМ}^{(1)} \sin \vartheta - M_2 R_{ЦМ}^{(2)} \sin(\lambda + \vartheta)}{M_1 + M_2} \\ 0 \end{pmatrix},$$

где $R_{ЦМ}^{(1)}$ — расстояние от начала системы координат $O''x''y''z''$ до ЦМ твердого тела 1; $R_{ЦМ}^{(2)}$ — расстояние от начала системы координат $O''x''y''z''$ до ЦМ твердого тела 2.

После вычисления производной от вектора $\bar{R}_{O''c}$ в системе координат $O''x''y''z''$ получено следующее выражение производной этого вектора [9]:

$$\frac{d\bar{R}_{O''c}}{dt} = \begin{pmatrix} \frac{-M_1 R_{ЦМ}^{(1)} \cdot \sin(\vartheta) \cdot \dot{\vartheta} + M_2 R_{ЦМ}^{(2)} \cdot \sin(\lambda + \vartheta) \cdot (\dot{\lambda} + \dot{\vartheta})}{M_1 + M_2} \\ \frac{M_1 R_{ЦМ}^{(1)} \cdot \cos(\vartheta) \cdot \dot{\vartheta} - M_2 R_{ЦМ}^{(2)} \cdot \cos(\lambda + \vartheta) \cdot (\dot{\lambda} + \dot{\vartheta})}{M_1 + M_2} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Рассчитав величину $\left(\frac{d\bar{R}_{O^r c}}{dt}\right)^2$, можно записать выражение

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\bar{R}_{O^r c}}{dt}\right)^2 &= \frac{1}{(M_1 + M_2)^2} \left[\left(-M_1 \cdot R_{ЦМ}^{(1)} \cdot \sin(\vartheta) \cdot \dot{\vartheta} + \right. \right. \\ &+ M_2 \cdot R_{ЦМ}^{(2)} \cdot \sin(\lambda + \vartheta) \cdot (\dot{\lambda} + \dot{\vartheta}) \left. \right)^2 + \left(M_1 \cdot R_{ЦМ}^{(1)} \cdot \cos(\vartheta) \cdot \dot{\vartheta} - \right. \\ &\left. - M_2 \cdot R_{ЦМ}^{(2)} \cdot \cos(\lambda + \vartheta) \cdot (\dot{\lambda} + \dot{\vartheta}) \right)^2 \left. \right], \end{aligned} \quad (26)$$

а затем следует раскрыть сумму квадратов выражения (26):

$$\begin{aligned} &\left(-M_1 \cdot R_{ЦМ}^{(1)} \cdot \sin(\vartheta) \cdot \dot{\vartheta} + M_2 \cdot R_{ЦМ}^{(2)} \cdot \sin(\lambda + \vartheta) \cdot (\dot{\lambda} + \dot{\vartheta}) \right)^2 = \\ &= (M_1)^2 \cdot \left(R_{ЦМ}^{(1)} \right)^2 \cdot \sin^2(\vartheta) \cdot \dot{\vartheta}^2 + (M_2)^2 \cdot \left(R_{ЦМ}^{(2)} \right)^2 \cdot \sin^2(\lambda + \vartheta) \cdot (\dot{\lambda} + \dot{\vartheta})^2 - \\ &- 2 \cdot M_1 \cdot M_2 \cdot R_{ЦМ}^{(1)} \cdot R_{ЦМ}^{(2)} \cdot \sin(\vartheta) \cdot \sin(\lambda + \vartheta) \cdot \dot{\vartheta} \cdot (\dot{\lambda} + \dot{\vartheta}); \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} &\left(M_1 \cdot R_{ЦМ}^{(1)} \cdot \cos(\vartheta) \cdot \dot{\vartheta} - M_2 \cdot R_{ЦМ}^{(2)} \cdot \cos(\lambda + \vartheta) \cdot (\dot{\lambda} + \dot{\vartheta}) \right)^2 = \\ &= (M_1)^2 \cdot \left(R_{ЦМ}^{(1)} \right)^2 \cdot \cos^2(\vartheta) \cdot \dot{\vartheta}^2 + (M_2)^2 \cdot \left(R_{ЦМ}^{(2)} \right)^2 \cdot \cos^2(\lambda + \vartheta) \cdot (\dot{\lambda} + \dot{\vartheta})^2 - \\ &- 2 \cdot M_1 \cdot M_2 \cdot R_{ЦМ}^{(1)} \cdot R_{ЦМ}^{(2)} \cdot \cos(\vartheta) \cdot \cos(\lambda + \vartheta) \cdot \dot{\vartheta} \cdot (\dot{\lambda} + \dot{\vartheta}). \end{aligned} \quad (28)$$

Выполнив преобразование выражения (26), в результате подстановки (27), (28):

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\bar{R}_{O^r c}}{dt}\right)^2 &= \frac{1}{(M_1 + M_2)^2} \left[(M_1)^2 \cdot \left(R_{ЦМ}^{(1)} \right)^2 \cdot \sin^2(\vartheta) \cdot \dot{\vartheta}^2 + \right. \\ &+ (M_2)^2 \cdot \left(R_{ЦМ}^{(2)} \right)^2 \cdot \sin^2(\lambda + \vartheta) \cdot (\dot{\lambda} + \dot{\vartheta})^2 - \\ &- 2 \cdot M_1 \cdot M_2 \cdot R_{ЦМ}^{(1)} \cdot R_{ЦМ}^{(2)} \cdot \sin(\vartheta) \cdot \sin(\lambda + \vartheta) \cdot \dot{\vartheta} \cdot (\dot{\lambda} + \dot{\vartheta}) + \\ &+ (M_1)^2 \cdot \left(R_{ЦМ}^{(1)} \right)^2 \cdot \cos^2(\vartheta) \cdot \dot{\vartheta}^2 + (M_2)^2 \cdot \left(R_{ЦМ}^{(2)} \right)^2 \cdot \cos^2(\lambda + \vartheta) \cdot (\dot{\lambda} + \dot{\vartheta})^2 - \\ &\left. - 2 \cdot M_1 \cdot M_2 \cdot R_{ЦМ}^{(1)} \cdot R_{ЦМ}^{(2)} \cdot \cos(\vartheta) \cdot \cos(\lambda + \vartheta) \cdot \dot{\vartheta} \cdot (\dot{\lambda} + \dot{\vartheta}) \right]; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\bar{R}_{O^r c}}{dt}\right)^2 &= \frac{1}{(M_1 + M_2)^2} \left[(M_1)^2 \cdot \left(R_{ЦМ}^{(1)} \right)^2 \cdot \dot{\vartheta}^2 \cdot \left\{ \sin^2(\vartheta) + \cos^2(\vartheta) \right\} + \right. \\ &+ (M_2)^2 \cdot \left(R_{ЦМ}^{(2)} \right)^2 \cdot (\dot{\lambda} + \dot{\vartheta})^2 \cdot \left\{ \sin^2(\lambda + \vartheta) + \cos^2(\lambda + \vartheta) \right\} - \\ &\left. - 2 \cdot M_1 \cdot M_2 \cdot R_{ЦМ}^{(1)} \cdot R_{ЦМ}^{(2)} \cdot \dot{\vartheta} \cdot (\dot{\lambda} + \dot{\vartheta}) \cdot \left\{ \sin(\vartheta) \cdot \sin(\lambda + \vartheta) + \cos(\vartheta) \cdot \cos(\lambda + \vartheta) \right\} \right]; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin^2(\vartheta) + \cos^2(\vartheta) &= 1; \\ \sin^2(\lambda + \vartheta) + \cos^2(\lambda + \vartheta) &= 1; \\ \sin(\vartheta) \cdot \sin(\lambda + \vartheta) + \cos(\vartheta) \cdot \cos(\lambda + \vartheta) &= \\ &= \sin(\vartheta) \cdot [\sin(\lambda) \cos(\vartheta) + \cos(\lambda) \sin(\vartheta)] + \\ &+ \cos(\vartheta) [\cos(\lambda) \cos(\vartheta) - \sin(\lambda) \sin(\vartheta)] = \\ &= \sin^2(\vartheta) \cos(\lambda) + \sin(\vartheta) \cos(\vartheta) \sin(\lambda) + \\ &+ \cos^2(\vartheta) \cos(\lambda) - \sin(\vartheta) \cos(\vartheta) \sin(\lambda) = \\ &= \cos(\lambda) [\sin^2(\vartheta) + \cos^2(\vartheta)] = \cos(\lambda). \end{aligned}$$

Получено следующее выражение квадрата производной $\left(\frac{d\bar{R}_{O^*c}}{dt}\right)^2$:

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\bar{R}_{O^*c}}{dt}\right)^2 &= \frac{(M_1)^2 \cdot (R_{ЦМ}^{(1)})^2 \cdot \dot{\vartheta}^2 + (M_2)^2 \cdot (R_{ЦМ}^{(2)})^2 \cdot (\dot{\lambda} + \dot{\vartheta})^2}{(M_1 + M_2)^2} - \\ &- \frac{2 \cdot M_1 \cdot M_2 \cdot R_{ЦМ}^{(1)} \cdot R_{ЦМ}^{(2)} \cdot \dot{\vartheta} \cdot (\dot{\lambda} + \dot{\vartheta}) \cdot \cos(\lambda)}{(M_1 + M_2)^2}. \end{aligned} \quad (29)$$

С учетом (29) выражение кинетической энергии (25) примет следующий вид:

$$\begin{aligned} T &= \frac{M \cdot v_c^2}{2} + \frac{J_{z''}^{(1)} \cdot \dot{\vartheta}^2}{2} + \frac{J_{z''}^{(2)} \cdot (\dot{\vartheta} - \dot{\lambda})^2}{2} - \frac{M}{2} \left(\frac{d\bar{R}_{z''}}{dt}\right)^2 = \\ &= \frac{M \cdot v_c^2}{2} + \frac{J_{z''}^{(1)} \cdot \dot{\vartheta}^2}{2} + \frac{J_{z''}^{(2)} \cdot (\dot{\vartheta} - \dot{\lambda})^2}{2} - \\ &- \frac{(M_1)^2 \cdot (R_{ЦМ}^{(1)})^2 \cdot \dot{\vartheta}^2 + (M_2)^2 \cdot (R_{ЦМ}^{(2)})^2 \cdot (\dot{\lambda} + \dot{\vartheta})^2}{2M} + \\ &+ \frac{2 \cdot M_1 \cdot M_2 \cdot R_{ЦМ}^{(1)} \cdot R_{ЦМ}^{(2)} \cdot \dot{\vartheta} \cdot (\dot{\lambda} + \dot{\vartheta}) \cdot \cos(\lambda)}{2M}. \end{aligned} \quad (30)$$

Подстановка выражения кинетической энергии двух связанных тел в уравнение Лагранжа 2-го рода. Для рассматриваемого СА уравнения Лагранжа 2-го рода [10, 11] имеют вид

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial T}{\partial x} = Q_x,$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{y}} \right) - \frac{\partial T}{\partial y} = Q_y,$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\vartheta}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \vartheta} = Q_{\vartheta},$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\lambda}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \lambda} = Q_{\lambda}.$$

Здесь

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial T}{\partial \vartheta} = 0, \quad (31)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \lambda} = - \frac{M_1 \cdot M_2 \cdot R_{ЦМ}^{(1)} \cdot R_{ЦМ}^{(2)} \cdot \dot{\vartheta} \cdot (\dot{\lambda} + \dot{\vartheta}) \cdot \sin(\lambda)}{M}; \quad (32)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{d}{dt} \frac{\partial (M \cdot v_c^2)}{\partial \dot{x}}; \quad (33)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{y}} \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{d}{dt} \frac{\partial (M \cdot v_c^2)}{\partial \dot{y}}, \quad (34)$$

где

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\vartheta}} = J_{O'}^{(1)} \cdot \dot{\vartheta} + J_{O'}^{(2)} \cdot (\dot{\vartheta} + \dot{\lambda}) - \frac{(M_1)^2 \cdot (R_{ЦМ}^{(1)})^2 \cdot \dot{\vartheta}}{M} -$$

$$- \frac{(M_2)^2 \cdot (R_{ЦМ}^{(2)})^2 \cdot (\dot{\vartheta} + \dot{\lambda})}{M} + \frac{M_1 \cdot M_2 \cdot R_{ЦМ}^{(1)} \cdot R_{ЦМ}^{(2)} \cdot \cos(\lambda) \cdot (2\dot{\vartheta} + \dot{\lambda})}{M},$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\lambda}} = J_{O'}^{(2)} \cdot (\dot{\vartheta} + \dot{\lambda}) - \frac{(M_2)^2 \cdot (R_{ЦМ}^{(2)})^2 \cdot (\dot{\vartheta} + \dot{\lambda})}{M} +$$

$$+ \frac{M_1 \cdot M_2 \cdot R_{ЦМ}^{(1)} \cdot R_{ЦМ}^{(2)} \cdot \dot{\vartheta} \cdot \cos(\lambda)}{M};$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \ddot{\vartheta}} = & J_{O'}^{(1)} \cdot \ddot{\vartheta} + J_{O'}^{(2)} \cdot (\ddot{\vartheta} + \ddot{\lambda}) - \frac{(M_1)^2 \cdot (R_{ЦМ}^{(1)})^2 \cdot \ddot{\vartheta}}{M} - \\ & - \frac{(M_2)^2 \cdot (R_{ЦМ}^{(2)})^2 \cdot (\ddot{\vartheta} + \ddot{\lambda})}{M} + \\ & + \frac{M_1 \cdot M_2 \cdot R_{ЦМ}^{(1)} \cdot R_{ЦМ}^{(2)} \cdot (\cos(\lambda) \cdot (2\ddot{\vartheta} + \ddot{\lambda}) - \sin(\lambda) \cdot \dot{\lambda} \cdot (2\dot{\vartheta} + \dot{\lambda}))}{M}; \end{aligned} \quad (35)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\lambda}} = & J_{O'}^{(2)} \cdot (\ddot{\vartheta} + \ddot{\lambda}) - \frac{(M_2)^2 \cdot (R_{ЦМ}^{(2)})^2 \cdot (\ddot{\vartheta} + \ddot{\lambda})}{M} + \\ & + \frac{M_1 \cdot M_2 \cdot R_{ЦМ}^{(1)} \cdot R_{ЦМ}^{(2)} \cdot (\ddot{\vartheta} \cdot \cos(\lambda) - \dot{\vartheta} \cdot \dot{\lambda} \cdot \sin(\lambda))}{M}. \end{aligned} \quad (36)$$

Подстановка (31)–(36) в уравнения Лагранжа позволила получить уравнения, описывающие движение системы двух твердых тел, связанных между собой цилиндрическим шарниром:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{d}{dt} \frac{\partial (M \cdot v_c^2)}{\partial \dot{x}} = Q_x; \quad (37)$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{d}{dt} \frac{\partial (M \cdot v_c^2)}{\partial \dot{y}} = Q_y; \quad (38)$$

$$\begin{aligned} J_{O'}^{(1)} \cdot \ddot{\vartheta} + J_{O'}^{(2)} \cdot (\ddot{\vartheta} + \ddot{\lambda}) - \frac{(M_1)^2 \cdot (R_{ЦМ}^{(1)})^2 \cdot \ddot{\vartheta}}{M} - \frac{(M_2)^2 \cdot (R_{ЦМ}^{(2)})^2 \cdot (\ddot{\vartheta} + \ddot{\lambda})}{M} + \\ + \frac{M_1 \cdot M_2 \cdot R_{ЦМ}^{(1)} \cdot R_{ЦМ}^{(2)} \cdot (\cos(\lambda) \cdot (2\ddot{\vartheta} + \ddot{\lambda}) - \sin(\lambda) \cdot \dot{\lambda} \cdot (2\dot{\vartheta} + \dot{\lambda}))}{M} = Q_{\vartheta}; \end{aligned} \quad (39)$$

$$\begin{aligned} J_{O'}^{(2)} \cdot (\ddot{\vartheta} + \ddot{\lambda}) - \frac{(M_2)^2 \cdot (R_{ЦМ}^{(2)})^2 \cdot (\ddot{\vartheta} + \ddot{\lambda})}{M} + \\ + \frac{M_1 \cdot M_2 \cdot R_{ЦМ}^{(1)} \cdot R_{ЦМ}^{(2)} \cdot (\ddot{\vartheta} \cdot \cos(\lambda) - \dot{\vartheta} \cdot \dot{\lambda} \cdot \sin(\lambda))}{M} = Q_{\lambda}. \end{aligned} \quad (40)$$

Уравнения (37) и (38) описывают поступательное движение системы твердых тел, а (39) и (40) — угловое движение системы твердых тел.

Принято, что СА совершает движение при действии на него переменных аэродинамических моментов, значения которых могут быть в функции от времени рассчитаны заранее на основании известной

траектории движения СА. При таком допущении движение СА можно описать уравнениями (39) и (40).

В уравнениях (37)–(40) Q_x , Q_y , Q_ϑ и Q_λ — работа обобщенных сил, действующих на СА. Распределение сил и моментов, действующих на СА, представлено на рис. 4.

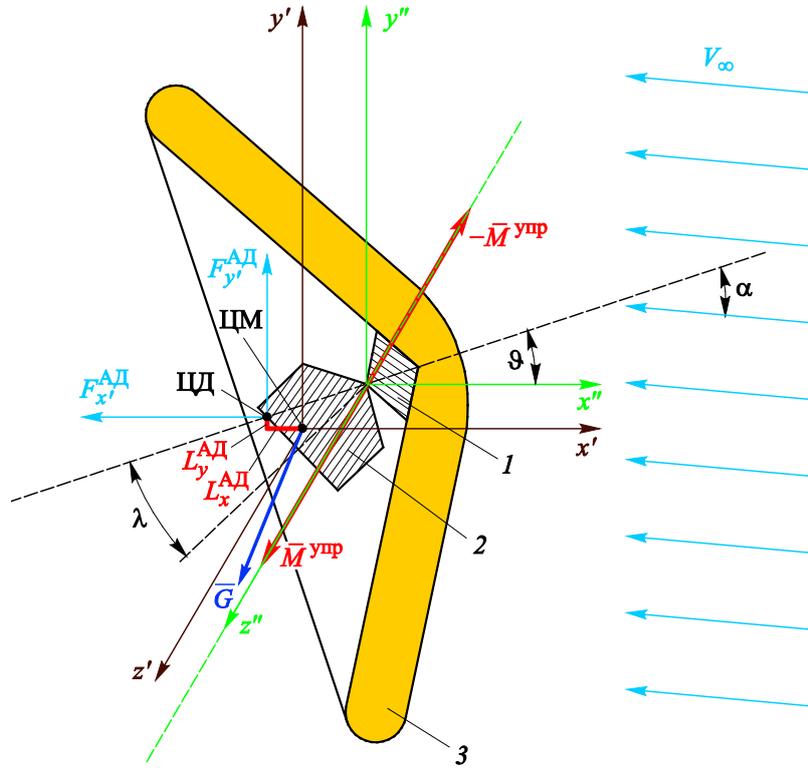


Рис. 4. Схема сил, действующих на спускаемый аппарат:

1 — поворотное устройство; 2 — внутренняя подвижная масса (КА); 3 — тормозное устройство;

$F_{x'}^{AD}$ — проекция аэродинамической силы на ось Ox' ; $F_{y'}^{AD}$ — проекция аэродинамической силы на ось Oy' ; $L_{x'}^{AD}$ — проекция вектора, соединяющего ЦМ СА с точкой приложения аэродинамических сил (центром давления — ЦД) на ось Ox' ; $L_{y'}^{AD}$ — проекция отрезка, соединяющего ЦМ СА с точкой приложения аэродинамических сил (ЦД) на ось Oy' ; \vec{G} — вектор гравитационной силы; \vec{V}_∞ — вектор скорости набегающего потока; $\vec{M}^{упр}$ — вектор управляющего

момента, $\vec{M}^{упр} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ M_z^{упр} \end{pmatrix}$; α — угол атаки; $\vec{M}_{Ox'y'z'}^{AD}$ — вектор момента аэродинамической

силы, $\vec{M}_{Ox'y'z'}^{AD} = \vec{L}^{AD} \times \vec{F}^{AD}$; \vec{L}^{AD} — вектор, соединяющий ЦМ СА с точкой приложения

аэродинамических сил (ЦД), $\bar{L}^{AD} = \begin{pmatrix} L_x^{AD} \\ L_y^{AD} \\ 0 \end{pmatrix}$; \bar{F}^{AD} — вектор аэродинамической силы,

$$\bar{F}^{AD} = \begin{pmatrix} -F_x^{AD} \\ F_y^{AD} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

После расчета аэродинамического момента $\bar{M}_{z'}^{AD} = L_{x'}^{AD} \cdot F_{y'}^{AD} + L_{y'}^{AD} F_{x'}^{AD}$ относительно оси $O'z'$ выполнен его пересчет относительно оси $O''z''$:

$$F_{x'}^{AD} = f(q; \alpha; S_M); F_{y'}^{AD} = f(q; \alpha; S_M); L_{x'}^{AD} = f(\lambda); L_{y'}^{AD} = f(\lambda).$$

Поясним, что представляют собой обобщенные силы (Q_ϑ и Q_λ) применительно к угловому движению. Пусть тело, как показано на рис. 5, имеет одну степень свободы и вращается вокруг оси $O''z''$. Угол поворота тела (т. е. обобщенная координата) обозначен ϑ , а его приращение — $\delta\vartheta$.

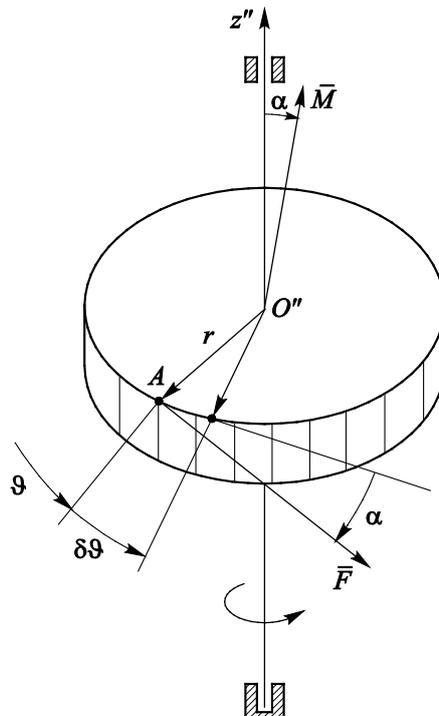


Рис. 5. Схема к пояснению, что представляют собой обобщенные силы в угловом движении

Пусть также на тело действует момент \bar{M} , составляющий с осью вращения угол α . Заменяв момент \bar{M} силой \bar{F} , приложенной к телу в точке A с плечом $r = |\bar{M}|/|\bar{F}|$, можно записать выражение для элементарной работы в виде [12]

$$\delta A = \bar{F} \cdot d\bar{S} = F \cos(\vartheta) \cdot r \cdot \delta\vartheta = M \cos(\vartheta) \delta\vartheta, \quad (41)$$

где $d\bar{S}$ — перемещение, которое совершило твердое тело под действием силы \bar{F} .

Отсюда следует, что в случае углового движения обобщенная сила равна проекции действующего на тело момента на ось элементарного поворота (для рассматриваемой обобщенной координаты), т. е. [11]:

$$Q_{\vartheta} = \frac{\delta A}{\delta\vartheta} = \frac{M \cos(\vartheta) \cdot \delta\vartheta}{\delta\vartheta} = M \cos \vartheta. \quad (42)$$

Экспериментальное устройство для верификации уравнений углового движения спускаемого аппарата. Для верификации уравнений углового движения СА разработано экспериментальное устройство. Рассматриваемый СА представлен системой двух твердых тел. Для того чтобы упростить уравнения движения, принято, что они соединены цилиндрическим шарниром. Надувное тормозное устройство, совмещенное с поворотным устройством, условно названо несущим телом, а установленную в нем полезную нагрузку принято именовать несомым телом [13]. Поворот несомого тела относительно несущего осуществляется под действием управляющего момента. На несущее тело помимо управляющего момента действуют моменты внешних сил, которые через поворотное устройство также передаются и несомому телу. Ось цилиндрического шарнира является главной осью инерции как для несущего, так и для несомого тела. Таким образом, стенд для верификации математической модели должен состоять из двух твердых тел. Соединение между двумя твердыми телами должно быть выполнено цилиндрическим шарниром. К одному из твердых тел должен быть приложен момент внешней силы, который через поворотное устройство передается на несомое тело, вращающееся относительно несущего под действием управляющего момента, создаваемого поворотным устройством. В случае отсутствия управляющего момента несомый диск неподвижен относительно несущего. Ось цилиндрического шарнира должна быть главной осью инерции несущего и несомого тела.

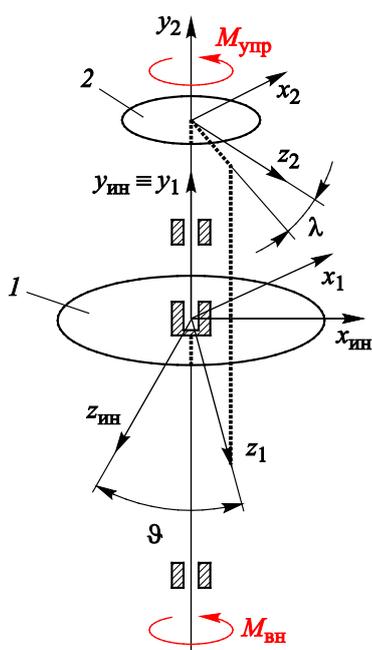


Рис. 6. Схема экспериментального устройства:

1 — несущее тело (выполняющее роль надувного тормозного устройства, совмещенного с поворотным устройством); 2 — несомое тело (выполняющее роль полезной нагрузки)

При разработке стенда было принято, что ось цилиндрического шарнира будет главной центральной осью инерции несущего и несомого тел, т. е. центр масс как несущего, так и несомого тела будет совпадать с осью цилиндрического шарнира. Тогда рассматриваемое экспериментальное устройство будет иметь схему, представленную на рис. 6.

Ось цилиндрического шарнира, соединяющего несомое тело и несущее тело, — главная центральная ось инерции. В результате этого упрощения расстояния от оси цилиндрического шарнира до центра масс несущего и несомого тела равны нулю, а уравнения углового движения элементов экспериментального устройства имеют вид

$$J_{O'}^{(1)} \cdot \ddot{\vartheta} + J_{O'}^{(2)} \cdot (\ddot{\vartheta} + \ddot{\lambda}) = Q_{\vartheta};$$

$$J_{O'}^{(2)} \cdot (\ddot{\vartheta} + \ddot{\lambda}) = Q_{\lambda},$$

где $Q_{\vartheta} = M_{\text{вн}}$; $Q_{\lambda} = M_{\text{упр}}$ ($M_{\text{вн}}$ — момент внешней силы, действующий на несущее тело;

$M_{\text{упр}}$ — управляющий момент, изменяющий угловое положение несомого тела относительно несущего тела).

Таким образом, предлагаемый стенд позволит получить зависимости изменения угловых величин элементов стенда от времени. Сравнение характера изменения измеренных угловых скоростей элементов стенда с теоретическими значениями угловых скоростей, полученных в результате решения математической модели, дает возможность подтвердить правильность записанной математической модели движения спускаемого аппарата.

Заключение. Разработана (составлена) математическая модель движения спускаемого аппарата, управляемого смещением центра масс. Для записи математической модели использовано уравнение Лагранжа 2-го рода. Выполнено математическое моделирование движения спускаемого аппарата, управление которым осуществляется методом смещения центра масс. Сделан вывод о том, что возможно разделение движения спускаемого аппарата на поступательное, в котором выбран в качестве полюса центр масс, и угловое движение

относительно выбранного полюса. Для верификации уравнений углового движения спускаемого аппарата предложена схема экспериментального устройства. Следует, однако, отметить, что верификация математической модели является темой для отдельного исследования.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Earth Return Orbiter. Overview. *NASA*. URL: <https://science.nasa.gov/mission/mars-sample-return/earth-return-orbiter/> (дата обращения: 23.05.2025).
- [2] Seager S., Petkowski J.J., Carr Ch.E., Grinspoon D., Ehlmann B., Saikia S.J., et al. Venus Life Finder Mission Study. *arXiv preprint arXiv:2112.05153* (2021) <https://doi.org/10.48550/arXiv.2112.05153>
- [3] Калугин В.Т. *Аэрогазодинамика органов управления полетом летательных аппаратов*. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2004, 688 с.
- [4] Atkins В.М. *Mars precision entry vehicle guidance using internal moving mass actuators: Ph.D. dissertation*. Virginia Tech, 2014.
- [5] Menon P., Sweriduk G., OhlmeIntegrated E. Guidance and control of moving mass actuated kinetic warheads. *Journal of Guidance Control & Dynamics*, 2004, no. 27, pp. 118–126.
- [6] Li J., Gao Ch., Li Ch., Jing W. A survey on moving mass control technology. *Aerosp. Sci. Technol.*, 2018, vols. 82–83, pp. 594–606. <https://doi.org/10.1016/j.ast.2018.09.033>
- [7] Кухаренко А. С., Корянов В. В. Угловое движение спускаемого аппарата при управлении методом поворота полезной нагрузки. *Вестник Московского авиационного института*, 2023, т. 30, № 3, с. 174–186.
- [8] Balam J. Sherpa moving mass entry descent landing system. In: *ASME 2005 International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference*. American Society of Mechanical Engineers, 2005, pp. 63–79.
- [9] Лурье А.И. *Аналитическая механика*. Москва, Физматгиз, 1961, 824 с.
- [10] Раус Э. Динамика системы твердых тел: пер. с англ.: в 2 томах. Т. 1. Ю.А. Архангельский, В.Г. Демин, ред. Москва, Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1983, 464 с.
- [11] Дмитриевский А.А., Казаковцев В.П., Устинов В.Ф., Лысенко Л.Н., Жилейкин В.Д., Кольцов Ю.Ф. *Движение ракет*. Москва, Военное изд-во, 1968.
- [12] Стрелков С.П. *Механика*. Москва, Физматлит, 1975, 560 с.
- [13] Борисов А.В., Мамаев И.С. *Динамика твердого тела. Гамильтоновы методы, интегрируемость, хаос*. Москва–Ижевск, Институт компьютерных исследований, 2005, 576 с.

Статья поступила в редакцию 15.05.2025

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Кухаренко А.С., Корянов В.В., Игнатов А.И. Математическая модель углового движения спускаемого аппарата, управляемого смещением центра масс. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2025, вып. 7. EDN COYUGP

Кухаренко Андрей Сергеевич — аспирант 3-го курса кафедры «Динамика и управление полетом ракет и космических аппаратов» МГТУ им. Н.Э. Баумана. e-mail: kuharenko-as@mail.ru

Корянов Всеволод Владимирович — канд. техн. наук, доцент, заместитель заведующего кафедрой «Динамика и управление полетом ракет и космических аппаратов» МГТУ им. Н.Э. Баумана; автор более 200 научных работ в области моделирования баллистики и динамики движения космических и спускаемых аппаратов. e-mail: vkoryanov@bmstu.ru

Игнатов Александр Иванович — канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры «Теоретическая механика» МГТУ им. Н.Э. Баумана. Область научных интересов: управление угловым движением космических аппаратов. e-mail: ignatov@bmstu.ru

Mathematical model of the descent vehicle angular motion controlled by the center-of-mass displacement

© A.S. Kukhareno, V.V. Koryanov, A.I. Ignatov

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, 105005, Russian Federation¹

The paper presents the compiled mathematical model equations of a module descent motion controlled by alteration in the center-of-mass displacement. The center-of-mass position is changed by altering angular position of the internal movable mass, which is the payload. When deriving the equations, the descent module is presented as a system of two rigid bodies connected to each other by a spherical hinge. Compiling the mathematical model applies the Lagrange equation of the second kind. Expression of the kinetic energy used in the Lagrange equation of the second kind is compiled in a coordinate system not related to the center of mass of the descent module. The kinetic energy expression is compiled in a coordinate system originating from the hinge center and making it possible to simplify registering expression of the descent module kinetic energy. The paper proposes the experimental device diagram to verify the compiled equations of the descent module motion.

Keywords: center-of-mass position alteration, inflatable braking device, payload rotation, rotating device, carrying body, carried body

REFERENCES

- [1] Earth Return Orbiter. Overview. *NASA*. Available at: <https://science.nasa.gov/mission/mars-sample-return/earth-return-orbiter/> (accessed May 05, 2025).
- [2] Seager S., Petkowski J.J., Carr Ch.E., Grinspoon D., Ehlmann B., Saikia S.J., et al. Venus Life Finder Mission Study. *arXiv preprint arXiv:2112.05153* (2021) <https://doi.org/10.48550/arXiv.2112.05153>
- [3] Kalugin V.T. *Aerogidrodinamika organov upravleniya poletom letatelnykh apparatov* [Aerogas dynamics of aircraft flight controls]. Moscow, BMSTU Publ., 2004, 688 p.
- [4] Atkins B.M. *Mars precision entry vehicle guidance using internal moving mass actuators: Ph.D. dissertation*. Virginia Tech, 2014.
- [5] Menon P., Sweriduk G., OhlmeIntegrated E. Guidance and control of moving mass actuated kinetic warheads. *Journal of Guidance Control & Dynamics*, 2004, no. 27, pp. 118–126.
- [6] Li J., Gao Ch., Li Ch., Jing W. A survey on moving mass control technology. *Aerosp. Sci. Technol.*, 2018, vols. 82–83, pp. 594–606. <https://doi.org/10.1016/j.ast.2018.09.033>
- [7] Kukhareno A.S., Koryanov V.V. Uglovoe dvizhenie spuskayemogo apparata pri upravlenii metodom povorota poleznoy nagruzki [Angular motion of a descent vehicle under control by the payload rotation method]. *Vestnik Moskovskogo aviatsionnogo instituta — Aerospace MAI Journal*, 2023, vol. 30, no. 3, pp. 174–186.
- [8] Balaran J. Sherpa moving mass entry descent landing system. In: *ASME 2005 International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference*. American Society of Mechanical Engineers, 2005, pp. 63–79.

- [9] Lurie A.I. *Analiticheskaya mekhanika* [Analytical Mechanics]. Moscow, Fizmatgiz Publ., 1961, 824 p.
- [10] Routh E.J. *Dynamics of a system of rigid bodies*. London [In Russ.: Dinamika sistemy tverdykh tel: v dvukh tomakh. Moscow, Nauka Publ., 1983, tom 1, 464 p].
- [11] Dmitrievskiy A.A., Kazakovtsev V.P., Ustinov V.F., Lysenko L.N., Zhileykin V.D., Koltsov Yu.F. *Dvizhenie raket* [Motion of rockets]. Moscow, Voennoe Publ., 1968.
- [12] Strelkov S.P. *Mekhanika* [Mechanics]. Moscow, Fizmatlit Publ., 1975, 560 p.
- [13] Borisov A.V., Mamaev I.S. *Dinamika tverdogo tela. Gamiltonovy metody, integriruyemost, khaos* [Solid body dynamics. Hamilton methods, integrity, chaos]. Moscow—Izhevsk, Institut Kompyuternykh Issledovaniy Publ., 2005, 576 p.

Kukhareno A.S., 3rd year Postgraduate, Department of Dynamics and Flight Control of Rockets and Spacecraft, Bauman Moscow State Technical University.
e-mail: kuharenko-as@mail.ru

Koryanov V.V., Cand. Sc. (Eng.), Associate Professor, Deputy Head of the Department of Dynamics and Flight Control of Rockets and Spacecraft, Bauman Moscow State Technical University; author of more than 200 scientific papers in ballistics simulation and motion dynamics of the spacecraft and descent vehicles.
e-mail: vkoryanov@bmstu.ru

Ignatov A.I., Cand. Sc. (Phys.-Math.), Assistant Professor, Department of Theoretical Mechanics, Bauman Moscow State Technical University. Scientific interests: spacecraft angular motion control. e-mail: general_z@mail.ru