

## Расчет преднагруженных металлических конструкций в комплексе MSC Nastran на стойкость к воздействию случайной вибрационной нагрузки. Часть 2

© А.А. Шульга<sup>1</sup>, Н.А. Аликин<sup>1,2</sup>, Д.В. Барышева<sup>1</sup>

<sup>1</sup>ПАО «Яковлев», Москва, 125315, Российская Федерация

<sup>2</sup>МГТУ им. Н. Э. Баумана, Москва, 105005, Российская Федерация

*Представлен расчет в комплексе MSC Nastran предварительно растянутой металлической пластины с линейно-упругой моделью материала на стойкость к воздействию случайной вибрационной нагрузки. Получено аналитическое решение данной задачи для двух моделей изгиба пластины: учитывающей сдвиги и пренебрегающей ими. Проведено сравнение аналитических и численных (методом конечных элементов) решений. В задаче о собственных колебаниях сравниваемыми величинами выбраны собственные частоты колебаний, а в задаче о случайных колебаниях — прогиб, напряжение и усталостная повреждаемость в центральной точке конструкции пластины. Результаты расчета усталостной повреждаемости отвечают требованиям, предъявляемым к решению инженерных задач динамической прочности, поскольку обладают достаточно высокой точностью. Так, относительное отклонение сравниваемых величин составило не более 2 %.*

**Ключевые слова:** случайная вибрация, поперечные колебания, преднагружение, пластина, аналитическое решение, метод конечных элементов, усталостная повреждаемость

**Введение.** Во многих отраслях машиностроения, таких как авиастроение, ракетостроение, автомобилестроение и др., принято проектировать силовую конструкцию в виде комбинации стержневых и тонкостенных элементов. Поскольку технические изделия в процессе эксплуатации подвергаются воздействию внешних переменных нагрузок, имеющих зачастую стохастичный характер, при анализе прочности и усталости данных конструкций важно учитывать случайную составляющую данного воздействия [1]. В частности, самолет во время полета нагружен случайными силами, обусловленными работой двигателей, турбулентным пограничным слоем, срывными аэродинамическими явлениями и т. д. На крейсерском режиме полета можно считать данные стохастические процессы нагружения стационарными и эргодическими [2, 3]. Так, вероятностные характеристики случайной вибрационной нагрузки для испытаний бортового авиационного оборудования представлены в Квалификационных требованиях КТ-160G/14G [4] разделе 8 «Вибрация».

Настоящая статья является продолжением работы [5], в которой изложена методика расчета металлических конструкций на стойкость к воздействию случайной вибрационной нагрузки с помощью метода

конечных элементов в комплексе MSC Nastran, а также дано аналитическое решение данной задачи для линейных систем с распределенными параметрами. В качестве примера расчета в работе приведено сравнение аналитического и численного решений для прорастянутого стержня. Однако, как было упомянуто, помимо стержней технические изделия зачастую содержат большое количество тонкостенных конструкций [6]. Примерами подобных конструктивных элементов в самолете являются обшивка фюзеляжа, панели крыла, стенки лонжеронов, нервюр, шпангоутов и т. д.

Цель данной статьи — провести сравнение результатов численных и аналитических решений для предварительно растянутой шарнирно опертой прямоугольной пластины.

**Аналитическое решение задачи случайных поперечных колебаний растянутой прямоугольной пластины.** Для исследования поведения пластины используется модель Тимошенко — Рейснера [7]. Вызываемые изгибом перемещения вдоль осей  $Ox$ ,  $Oy$  и  $Oz$  —  $u$ ,  $v$  и  $w$  соответственно, исходя из кинематической гипотезы модели, имеют вид

$$u = -z \vartheta_x(x, y), \quad v = -z \vartheta_y(x, y), \quad w = w(x, y), \quad (1)$$

где  $x, y, z$  — координаты в направлении осей  $Ox$ ,  $Oy$  и  $Oz$ ;  $\vartheta_x$  и  $\vartheta_y$  — повороты нормали деформированной срединной поверхности «в сторону» осей  $Ox$  и  $Oy$  [8].

Соответствующие им деформации пластины определяются с помощью соотношений Коши [8]:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = -z \frac{\partial \vartheta_x}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = -z \frac{\partial \vartheta_y}{\partial y}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = -z \left( \frac{\partial \vartheta_x}{\partial y} + \frac{\partial \vartheta_y}{\partial x} \right), \\ \gamma_{0yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial y} - \vartheta_y, \quad \gamma_{0xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial x} - \vartheta_x, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $\gamma_{0yz}$  и  $\gamma_{0xz}$  — средние углы сдвигов  $\gamma_{yz}$  и  $\gamma_{xz}$  соответственно.

Для определения зависимости между интенсивностью поперечной силы  $Q_x$  и средним углом сдвига  $\gamma_{0xz}$  выражается энергия сдвига в плоскости  $Ozx$ , накопленная в малом элементе пластины  $dx dy$ , через работу касательных напряжений  $\tau_{xz}$  и силы  $Q_x$  при статическом нагружении [1]:

$$\frac{1}{2} Q_x \gamma_{0xz} dx dy = \frac{1}{2} \int_{-h/2}^{h/2} (\tau_{xz} \gamma_{xz} dx dy) dz. \quad (3)$$

Согласно закону Гука,  $\tau_{xz} = G\gamma_{xz}$ , где  $G$  — модуль сдвига. Используется предложенная Э. Рейснером связь между  $\tau_{xz}$  и  $Q_x$  [7]:

$$\tau_{xz} = \frac{Q_x}{2h/3} \left[ 1 - \left( \frac{z}{h/2} \right)^2 \right], \quad (4)$$

где  $h$  — толщина пластины.

В результате вычисления интеграла (3) получается

$$Q_x = k_2 Gh \gamma_{0xz}, \quad Q_y = k_2 Gh \gamma_{0yz}, \quad k_1 = \frac{5}{6}. \quad (5)$$

Различные гипотезы распределения касательных напряжений  $\tau_{xz}$ ,  $\tau_{yz}$  по толщине пластины (4) приводят к разным значениям  $k_1$ , которые могут давать более «точные» результаты для некоторых задач [7].

Оставшиеся компоненты напряженного состояния, обусловленного изгибом, согласно закону Гука, определяются с помощью следующих соотношений [8]:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= -\frac{Ez}{1-\mu^2} \left( \frac{\partial \vartheta_x}{\partial x} + \mu \frac{\partial \vartheta_y}{\partial y} \right), \\ \sigma_y &= -\frac{Ez}{1-\mu^2} \left( \frac{\partial \vartheta_y}{\partial y} + \mu \frac{\partial \vartheta_x}{\partial x} \right), \\ \tau_{xy} &= -\frac{Ez}{2(1+\mu)} \left( \frac{\partial \vartheta_x}{\partial y} + \frac{\partial \vartheta_y}{\partial x} \right). \end{aligned} \quad (6)$$

где  $E$  и  $\mu$  — модуль упругости и коэффициент Пуассона материала соответственно.

Тогда интенсивности изгибающих и крутящего моментов определяются соотношениями [8]

$$\begin{aligned} M_x &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x z dz = -D_c \left( \frac{\partial \vartheta_x}{\partial x} + \mu \frac{\partial \vartheta_y}{\partial y} \right), \quad M_y = -D_c \left( \frac{\partial \vartheta_y}{\partial y} + \mu \frac{\partial \vartheta_x}{\partial x} \right), \\ M_{xy} &= \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} z dz = -\frac{D_c}{2} (1-\mu) \left( \frac{\partial \vartheta_x}{\partial y} + \frac{\partial \vartheta_y}{\partial x} \right), \end{aligned} \quad (7)$$

где  $D_c = Eh^3 / 12(1-\mu^2)$  — цилиндрическая жесткость.

Для получения уравнений движения пластины рассматривается ее малый участок площадью  $dx \times dy$ , который, помимо уже введенных внутренних силовых факторов (рис. 1, а), нагружен постоянными мембранными усилиями  $T_x$  и  $T_y$  (рис. 1, б), т. е.  $dT_x = dT_y = 0$ .

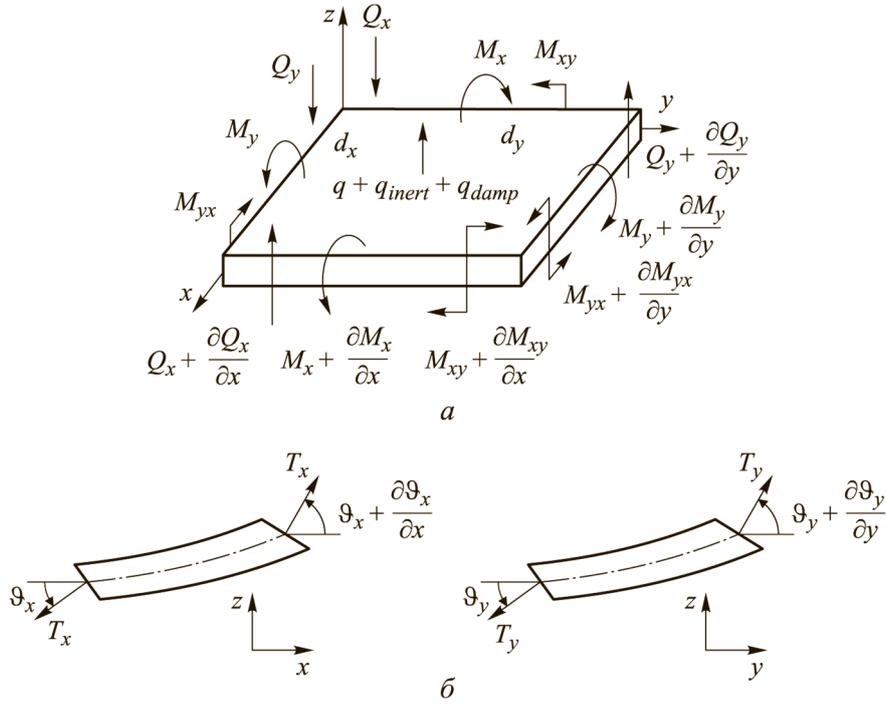


Рис. 1. Равновесие малого участка пластины:

а — моменты сил и поперечные силы; б — мембранные усилия

Рассмотрение динамического равновесия системы по силам в направлении оси  $Oz$ , а также по моментам вокруг осей  $Ox$  и  $Oy$  позволяет получить систему уравнений вида

$$\begin{cases} T_x \frac{\partial \vartheta_x}{\partial x} + T_y \frac{\partial \vartheta_y}{\partial y} + \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + q_{inert} + q_{damp} + q = 0, \\ \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - Q_x = 0, \\ \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} - Q_y = 0, \end{cases} \quad (8)$$

где  $q_{inert} dx dy = -\rho h \ddot{w} dx dy$  — сила инерции;  $q_{damp} dx dy = -\alpha_1 \dot{w} dx dy$  — сила сопротивления;  $\rho$  — плотность материала;  $\alpha_1$  — коэффициент сопротивления;  $q$  — внешнее давление.

Подстановкой в (8) выражений (5) и (7) получается разрешающая система уравнений движения пластины относительно  $w$ ,  $\vartheta_x$  и  $\vartheta_y$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} T_x \frac{\partial \vartheta_x}{\partial x} + T_y \frac{\partial \vartheta_y}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \left[ k_1 Gh \left( \frac{\partial w}{\partial x} - \vartheta_x \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ k_1 Gh \left( \frac{\partial w}{\partial y} - \vartheta_y \right) \right] - \\ \quad - \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \alpha_1 \frac{\partial w}{\partial t} + q = 0; \\ \frac{\partial}{\partial x} \left[ D_c \left( \frac{\partial \vartheta_x}{\partial x} + \mu \frac{\partial \vartheta_y}{\partial y} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{D_c (1-\mu)}{2} \left( \frac{\partial \vartheta_x}{\partial y} + \frac{\partial \vartheta_y}{\partial x} \right) \right] + \\ \quad + k_1 Gh \left( \frac{\partial w}{\partial x} - \vartheta_x \right) = 0; \\ \frac{\partial}{\partial y} \left[ D_c \left( \frac{\partial \vartheta_y}{\partial y} + \mu \frac{\partial \vartheta_x}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{D_c (1-\mu)}{2} \left( \frac{\partial \vartheta_x}{\partial y} + \frac{\partial \vartheta_y}{\partial x} \right) \right] + \\ \quad + k_1 Gh \left( \frac{\partial w}{\partial y} - \vartheta_y \right) = 0. \end{array} \right. \quad (9)$$

Далее приводится решение (9) для растянутой шарнирно опертой прямоугольной пластины постоянной толщины  $h$  со сторонами  $a$  и  $b$  (рис. 2).

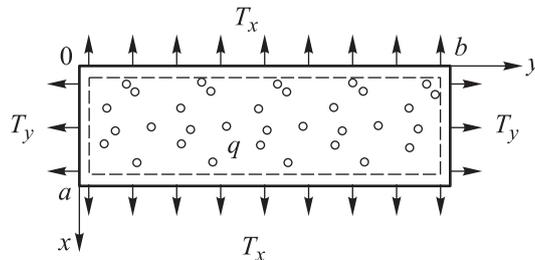


Рис. 2. Расчетная схема пластины

Рассматривается задача случайных колебаний линейной системы с распределенными детерминированными параметрами под действием случайной нагрузки. Как и в работе [5], используется метод разложения движения системы по собственным формам колебаний [1, 7].

Решение задачи свободных колебаний  $q = 0$  без учета демпфирования  $\alpha_1 = 0$  определяется в виде суперпозиции собственных форм колебаний:

$$\begin{aligned}
 w(x, y, t) &= \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} F_{jk} u_{jk}(x, y) \cos(p_{jk} t); \\
 \vartheta_x(x, y, t) &= \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} G_{jk} \theta_{jk}^x(x, y) \cos(p_{jk} t); \\
 \vartheta_y(x, y, t) &= \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} V_{jk} \theta_{jk}^y(x, y) \cos(p_{jk} t),
 \end{aligned} \tag{10}$$

для которого граничные условия (ГУ) на торцах  $w|_{x=0,a} \text{ или } y=0,b = 0$ ,  $M_x|_{x=0,a} = 0$ ,  $M_y|_{y=0,b} = 0$  выполняются автоматически.

Здесь  $u_{jk}(x, y) = \sin(\varphi_{xj} x) \sin(\varphi_{yk} y)$ ,  $\theta_{jk}^x(x, y) = \cos(\varphi_{xj} x) \sin(\varphi_{yk} y)$  и  $\theta_{jk}^y(x, y) = \sin(\varphi_{xj} x) \cos(\varphi_{yk} y)$  — собственные формы колебаний системы, соответствующие собственные частоты (СЧ)  $p_{jk}$ ;  $\varphi_{xj} = j\pi/a$ ,  $\varphi_{yk} = k\pi/b$  — вводимые параметры.

Подстановкой (10) в (9) с учетом свойства ортогональности форм колебаний [9] получается система линейных алгебраических уравнений относительно констант  $F_{jk}$ ,  $G_{jk}$  и  $V_{jk}$  для каждой собственной формы. Условие существования ее ненулевого решения для каждой такой системы приводит к следующему выражению для СЧ  $p_{jk}$ :

$$p_{jk} = \sqrt{\frac{k_2 G}{\rho} \cdot \frac{D_c (\varphi_{xk}^2 + \varphi_{yj}^2)^2 + T_x \varphi_{xj}^2 + T_y \varphi_{yk}^2}{D_c (\varphi_{xk}^2 + \varphi_{yj}^2) + k_2 G h}}. \tag{11}$$

Пусть  $q$  — случайное стационарное давление с нулевым математическим ожиданием  $M[q] = 0$ . Тогда стационарное решение неоднородной системы (9) с учетом  $n \times m$  собственных форм колебаний имеет вид

$$\begin{aligned}
 w(x, y, t) &\approx \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m u_{jk}(x, y) [r_{jk0} + r_{jk}(t)]; \\
 \vartheta_x(x, y, t) &\approx \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m \theta_{jk}^x(x, y) [\chi_{jk0}^x + \chi_{jk}^x(t)]; \\
 \vartheta_y(x, y, t) &\approx \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m \theta_{jk}^y(x, y) [\chi_{jk0}^y + \chi_{jk}^y(t)],
 \end{aligned} \tag{12}$$

где  $[r_{jk0} + r_{jk}(t)]$ ,  $[\chi_{jk0}^x + \chi_{jk}^x(t)]$  и  $[\chi_{jk0}^y + \chi_{jk}^y(t)]$  — главные координаты прогиба  $w$  и углов поворота  $\vartheta_x$ ,  $\vartheta_y$  соответственно с постоянными  $r_{jk0}$ ,  $\chi_{jk0}^x$ ,  $\chi_{jk0}^y$  и переменными  $r_{jk}(t)$ ,  $\chi_{jk}^x(t)$ ,  $\chi_{jk}^y(t)$  составляющими.

Для анализа прочности конструкции необходимо определить вероятностные характеристики системы. В работе [5] показано, что определение вероятностных характеристик линейных систем с распределенными параметрами сводится к определению собственных форм колебаний и частотных функций.

Собственные формы колебаний определены ранее. Рассуждения, аналогичные представленным в работе [5] для поперечных колебаний шарнирно опертой балки, в случае пластины, нагруженной внешней нагрузкой  $q(x, y, t) = q_1(x, y)q_0(t)$  со случайной  $q_0(t)$  и детерминированной  $q_1(x, y)$  компонентами, приводят к следующим частотным функциям  $r_{jk}$ ,  $\chi_{jk}^x$  и  $\chi_{jk}^y$ :

$$\begin{aligned} H_{r_{jk}}(i\omega) &= \tilde{a}_{0jk} H_{0jk}(i\omega); H_{\chi_{jk}^x}(i\omega) = \tilde{b}_{0jk} H_{0jk}(i\omega); \\ H_{\chi_{jk}^y}(i\omega) &= \tilde{c}_{0jk} H_{0jk}(i\omega); H_{0jk}(i\omega) = \frac{\tilde{d}_{0jk}}{p_{jk}^2 - \omega^2 + 2i\zeta_{jk} p_{jk} \omega}, \end{aligned} \quad (13)$$

где  $H_{r_{jk}}$ ,  $H_{\chi_{jk}^x}$  и  $H_{\chi_{jk}^y}$  — частотные функции  $r_{jk}$ ,  $\chi_{jk}^x$  и  $\chi_{jk}^y$  соответственно;  $\tilde{a}_{0jk}$ ,  $\tilde{b}_{0jk}$ ,  $\tilde{c}_{0jk}$ ,  $\tilde{d}_{0jk}$  и  $\zeta_{jk}$  — параметры, вводимые для обозначений и определяющиеся следующими выражениями:

$$\begin{aligned} \tilde{a}_{0jk} &= 1/\rho h; \tilde{b}_{0jk} = \frac{k_2 G \varphi_{xj}}{\rho [D_c (\varphi_{xj}^2 + \varphi_{yk}^2) + k_2 Gh]}; \\ \tilde{c}_{0jk} &= \frac{k_2 G \varphi_{yk}}{\rho [D_c (\varphi_{xj}^2 + \varphi_{yk}^2) + k_2 Gh]}; \\ \tilde{d}_{0jk} &= \frac{4}{ab} \int_0^b \int_0^a q_1(x, y) u_{jk}(x, y) dx dy; \zeta_{jk} = \frac{\alpha_2}{2\rho h p_{jk}}. \end{aligned} \quad (14)$$

Использование модели Кирхгофа, не учитывающей сдвига, для описания поведения изгиба шарнирно опертой прямоугольной пластины приводит к такой формуле для расчета СЧ  $p_{jk}$  [9]:

$$p_{jk} = \sqrt{\frac{1}{\rho h} \left[ D_c (\varphi_{xj}^2 + \varphi_{yk}^2)^2 + T_x \varphi_{xj}^2 + T_y \varphi_{yk}^2 \right]}. \quad (15)$$

Выражение для частотной функции  $r_{jk}$  в этом случае совпадает с (13), если вместо выражения для СЧ  $p_{jk}$  в него подставить (15).

Определяются вероятностные характеристики максимальных растягивающих напряжений  $\sigma_{x \max}$  вдоль оси  $x$ . Согласно (6) и (10), центрированная величина  $\sigma_{x \max}$

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{\sigma}_{x \max}(x, y, t) &= \frac{Eh}{2(1-\mu^2)} \left( \frac{\partial \overset{\circ}{\vartheta}_x}{\partial x} + \mu \frac{\partial \overset{\circ}{\vartheta}_y}{\partial y} \right) = \\ &= \frac{Eh}{2(1-\mu^2)} \sum_j^n \sum_k^m \left[ \frac{\partial \theta_{jk}^x(x, y)}{\partial x} \chi_{jk}^x(t) + \mu \frac{\partial \theta_{jk}^y(x, y)}{\partial y} \chi_{jk}^y(t) \right]. \end{aligned} \quad (16)$$

Тогда автокорреляционная функция  $\sigma_{x \max}$  имеет вид

$$\begin{aligned} K_{\sigma_{x \max}}(x, y, t_1, t_2) &= M \left[ \overset{\circ}{\sigma}_{x \max}(x, y, t_1) \overset{\circ}{\sigma}_{x \max}(x, y, t_2) \right] = \left[ \frac{Eh}{2(1-\mu^2)} \right]^2 \times \\ &\times M \left( \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m \sum_{s=1}^n \sum_{g=1}^m \left[ a_{jksg}(x, y) \chi_{jk}^x(t_1) \chi_{sg}^x(t_2) + b_{jksg}(x, y) \chi_{jk}^x(t_1) \chi_{sg}^y(t_2) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + c_{jksg}(x, y) \chi_{jk}^y(t_1) \chi_{sg}^x(t_2) + d_{jksg}(x, y) \chi_{jk}^y(t_1) \chi_{sg}^y(t_2) \right] \right). \end{aligned} \quad (17)$$

Здесь  $a_{jksg}$ ,  $b_{jksg}$ ,  $c_{jksg}$  и  $d_{jksg}$  — параметры, вводимые для обозначений:

$$\begin{aligned} a_{jksg}(x, y) &= \frac{\partial \theta_{jk}^x(x, y)}{\partial x} \frac{\partial \theta_{sg}^x(x, y)}{\partial x}, \\ b_{jksg}(x, y) &= \mu \frac{\partial \theta_{jk}^x(x, y)}{\partial x} \frac{\partial \theta_{sg}^y(x, y)}{\partial y}, \\ c_{jksg}(x, y) &= \mu \frac{\partial \theta_{jk}^y(x, y)}{\partial y} \frac{\partial \theta_{sg}^x(x, y)}{\partial x}, \\ d_{jksg}(x, y) &= \mu^2 \frac{\partial \theta_{jk}^y(x, y)}{\partial y} \frac{\partial \theta_{sg}^y(x, y)}{\partial y}. \end{aligned} \quad (18)$$

Оператор математического ожидания вносится под сумму в выражении (17):

$$K_{\sigma_{x \max}}(x, y, t_1, t_2) = \left[ \frac{Eh}{2(1-\mu^2)} \right]^2 \times \\ \times \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m \sum_{s=1}^n \sum_{g=1}^m \left[ a_{jks g} K_{\chi_{jk}^x \chi_{sg}^x}(t_1, t_2) + b_{jks g} K_{\chi_{jk}^x \chi_{sg}^y}(t_1, t_2) + \right. \\ \left. + c_{jks g} K_{\chi_{jk}^y \chi_{sg}^x}(t_1, t_2) + d_{jks g} K_{\chi_{jk}^y \chi_{sg}^y}(t_1, t_2) \right]. \quad (19)$$

При стационарной случайной внешней нагрузке  $q_1(t)$  случайные функции  $w$ ,  $\vartheta_x$ ,  $\vartheta_y$  и, следовательно,  $\sigma_{x \max}$  будут также являться стационарными [1]. В этом случае корреляционные функции  $K_{\chi_{jk}^x \chi_{sg}^x}$ ,  $K_{\chi_{jk}^x \chi_{sg}^y}$ ,  $K_{\chi_{jk}^y \chi_{sg}^x}$  и  $K_{\chi_{jk}^y \chi_{sg}^y}$  будут зависеть только от разности значений времени  $t_2 - t_1 = \tau$  и могут быть определены по теореме Винера — Хинчина с помощью обратного преобразования Фурье [1]:

$$K_{\chi_{jk}^x \chi_{sg}^x}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S_{\chi_{jk}^x \chi_{sg}^x}(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega, \\ K_{\chi_{jk}^x \chi_{sg}^y}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S_{\chi_{jk}^x \chi_{sg}^y}(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega, \\ K_{\chi_{jk}^y \chi_{sg}^x}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S_{\chi_{jk}^y \chi_{sg}^x}(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega, \\ K_{\chi_{jk}^y \chi_{sg}^y}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S_{\chi_{jk}^y \chi_{sg}^y}(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega, \quad (20)$$

где спектральные плотности  $S_{\chi_{jk}^x \chi_{sg}^x}$ ,  $S_{\chi_{jk}^x \chi_{sg}^y}$ ,  $S_{\chi_{jk}^y \chi_{sg}^x}$  и  $S_{\chi_{jk}^y \chi_{sg}^y}$  могут быть определены соответственно из выражений [1]

$$S_{\chi_{jk}^x \chi_{sg}^x}(\omega) = H_{\chi_{jk}^x}(i\omega) H_{\chi_{sg}^x}^*(i\omega) S_q(\omega), \\ S_{\chi_{jk}^x \chi_{sg}^y}(\omega) = H_{\chi_{jk}^x}(i\omega) H_{\chi_{sg}^y}^*(i\omega) S_q(\omega), \\ S_{\chi_{jk}^y \chi_{sg}^x}(\omega) = H_{\chi_{jk}^y}(i\omega) H_{\chi_{sg}^x}^*(i\omega) S_q(\omega), \\ S_{\chi_{jk}^y \chi_{sg}^y}(\omega) = H_{\chi_{jk}^y}(i\omega) H_{\chi_{sg}^y}^*(i\omega) S_q(\omega). \quad (21)$$

**Особенности анализа усталости.** Для анализа усталости пластины используется одномоментный метод, применение которого для решения рассматриваемой задачи описано в [5]. Данная методика расчета усталостной повреждаемости  $D$  заключается в определении интенсивности усталостной повреждаемости  $d = D/T$ , где  $T = 3$  ч — длительность процесса, принимаемая согласно КТ-160G/14G [4] разделу 8 «Вибрация» как время воздействия случайной жесткой вибрации на оборудование самолета с неподвижным крылом. Для вычисления  $d$  необходима спектральная плотность эквивалентного напряжения  $S_{\sigma_{\text{экв}}}$ . В случае когда максимальные нормальные напряжения  $\sigma_{x \text{ max}}$  и  $\sigma_{y \text{ max}}$  одного знака, для расчета спектральной плотности эквивалентного (по теории прочности Хубера — Мизеса) напряжения принимается выражение [10]

$$S_{\sigma_{\text{экв}}}(x, y, \omega) \approx S_{\sigma_{x \text{ max}}}(x, y, \omega) + S_{\sigma_{y \text{ max}}}(x, y, \omega) - \sqrt{S_{\sigma_{x \text{ max}}}(x, y, \omega)S_{\sigma_{y \text{ max}}}(x, y, \omega)} + 3S_{\tau_{xy \text{ max}}}(x, y, \omega), \quad (22)$$

где  $S_{\sigma_{x \text{ max}}}$ ,  $S_{\sigma_{y \text{ max}}}$  и  $S_{\tau_{xy \text{ max}}}$  — спектральные плотности максимальных напряжений (в верхних или нижних волокнах пластины)  $\sigma_{x \text{ max}}$ ,  $\sigma_{y \text{ max}}$  и  $\tau_{xy \text{ max}}$  соответственно.

**Численное решение задачи случайных поперечных колебаний растянутой прямоугольной пластины.** Для конечно-элементного анализа применяются комплекс MSC Nastran и методика анализа случайных колебаний преднагруженных конструкций, приведенная в [5]. Используется четырехузловой билинейный плоский конечный элемент оболочки (SHELL), основанный на теории оболочек Миндлина — Рейснера [11], которая учитывает дополнительные сдвиги подобно теории Тимошенко — Рейснера. Ввиду наличия компонент матрицы масс, соответствующих поворотным степеням свободы, конечный элемент оболочки учитывает инерцию поворотов сечений.

В комплексе MSC Nastran для конечного элемента типа оболочки поддерживаются две формулировки матрицы масс — согласованная и несогласованная [12]. Аналогично конечно-элементному решению задачи случайных поперечных колебаний растянутого стержня, приведенного в [5], выполняется сравнение решения для различных матриц масс.

**Сравнительный анализ.** Проводится сравнение аналитического и конечно-элементного решений задачи свободных и вынужденных стационарных случайных поперечных колебаний шарнирно закрепленной прямоугольной пластины постоянной толщины (см. рис. 2). Пластина

нагружена продольными постоянными детерминированными растягивающими усилиями  $T_x$ ,  $T_y$  и случайным равномерно распределенным давлением  $q$  с нулевым математическим ожиданием.

Исходные данные: длина  $a = 0,5$  м, ширина  $b = 1$  м и толщина  $h = 0,004$  м пластины; модуль упругости  $E = 68,65$  ГПа; предел текучести  $\sigma_T = 300$  МПа; коэффициент Пуассона  $\mu = 0,3$  и плотность  $\rho = 2700$  кг/м<sup>3</sup> материала пластины; константа и степень кривой усталости  $A_{-1} = 10^{14}$  МПа<sup>*m*</sup> и  $m = 4$  соответственно; демпфирование  $\zeta = 0,04$  в долях от критического; спектральная плотность внешней нагрузки  $S_q = 1$  Па<sup>2</sup>/Гц при  $f = [1, 100]$  Гц. Следует отметить, что значения свойств материала и усталостных характеристик совпадают с соответствующими значениями для стержня [5].

В аналитическом решении для каждой собственной формы используется значение коэффициента демпфирования  $\alpha_1$ , определяемое выражением

$$\alpha_1 = 2\rho h \zeta p_{jk}. \quad (23)$$

При аналитическом и конечно-элементном расчетах принимается одинаковое значение коэффициента неравномерности распределения касательных напряжений по толщине  $k_1 = 5/6$ .

Для конечно-элементного решения используется по 20 элементов вдоль каждой стороны пластины.

Шесть низших СЧ системы при разных растягивающих усилиях  $T_x$ ,  $T_y$  представлены в табл. 1 и 2. Результаты аналитического решения получены для моделей пластины Тимошенко — Рейснера и Кирхгофа, а конечно-элементного решения — при использовании согласованной и несогласованной матриц масс.

Таблица 1

Собственные частоты нерастянутой пластины,  $T_x = T_y = 0$

Метод	$p_{1,1}$ , Гц	$p_{1,2}$ , Гц	$p_{1,3}$ , Гц	$p_{2,1}$ , Гц	$p_{1,4}$ , Гц	$p_{2,2}$ , Гц
<i>Аналитическое решение</i>						
Тимошенко	47,93227	76,68644	124,6014	162,9256	191,6642	191,6642
Кирхгофа	47,93767	76,70028	124,6379	162,9881	191,7509	191,7509
<i>MSC Nastran</i>						
Матрица масс:						
несогласованная	47,76995	76,01557	123,0836	162,3227	189,0090	189,2332
согласованная	47,96680	76,80109	125,6403	164,0000	195,7307	192,3717

Таблица 2

**Собственные частоты растянутой пластины,  $T_x = 3000$  Н/м,  $T_y = 0$**

Метод	$p_{1,1}$ , Гц	$p_{1,2}$ , Гц	$p_{1,3}$ , Гц	$p_{2,1}$ , Гц	$p_{1,4}$ , Гц	$p_{2,2}$ , Гц
<i>Аналитическое решение</i>						
Тимошенко	50,74660	78,47603	125,7105	166,2979	192,3869	194,5387
Кирхгофа	50,75232	78,49019	125,7473	166,3617	192,4736	194,6264
<i>MSC Nastran</i>						
Матрица масс:						
несогласованная	50,57103	77,77367	124,1436	165,6603	189,6713	192,0512
согласованная	50,77943	78,57737	126,7224	167,3721	196,4165	195,2364

Среднеквадратичные отклонения прогиба пластины и максимального напряжения в центральной точке  $x = a/2$ ,  $y = b/2$  при разных мембранных усилиях с учетом шести низших СЧ приведены в табл. 3–6.

Таблица 3

**Среднеквадратичное отклонение прогиба в центральной точке пластины**

Метод	$\sigma_w \left( \frac{a}{2}, \frac{b}{2} \right) \cdot 10^5$ , м, $T_x = T_y = 0$	$\sigma_w \left( \frac{a}{2}, \frac{b}{2} \right) \cdot 10^5$ , м, $T_x = 3000$ Н/м, $T_y = 0$
<i>Аналитическое решение</i>		
Тимошенко	5,066733	4,649245
Кирхгофа	5,065869	4,648449
<i>MSC Nastran</i>		
Матрица масс:		
несогласованная	5,081930	4,654910
согласованная	5,091870	4,663970

Таблица 4

**Среднеквадратичное отклонение максимальных нормальных напряжений в направлении  $Ox$  в центральной точке пластины**

Метод	$\sigma_{\sigma_x \max} \left( \frac{a}{2}, \frac{b}{2} \right)$ , МПа, $T_x = T_y = 0$	$\sigma_{\sigma_x \max} \left( \frac{a}{2}, \frac{b}{2} \right)$ , МПа, $T_x = 3000$ Н/м, $T_y = 0$
<i>Аналитическое решение</i>		
Тимошенко	0,324396	0,297652
Кирхгофа	0,324413	0,297668
<i>MSC Nastran</i>		
Матрица масс:		
несогласованная	0,323196	0,296114
согласованная	0,323806	0,296666

Графики спектральной плотности максимального нормального напряжения в направлении  $Ox$  в центре пластины представлены на рис. 3. Полученные аналитические и численные решения оказались достаточно близки, поэтому на графике показано только одно аналитическое решение и одно численное.

Значения усталостной повреждаемости в центральной точке пластины приведены в табл. 5.

Следует отметить, что MSC Nastran по умолчанию определяет значения спектральной плотности напряжений в центре SHELL элемента, поэтому ввиду четного числа элементов — 20 — в направлении осей  $Ox$  и  $Oy$  показания на рис. 3 и в табл. 5 соответствуют точке пластины  $0,95(a/2, b/2)$  и для аналитических, и для конечно-элементных решений.

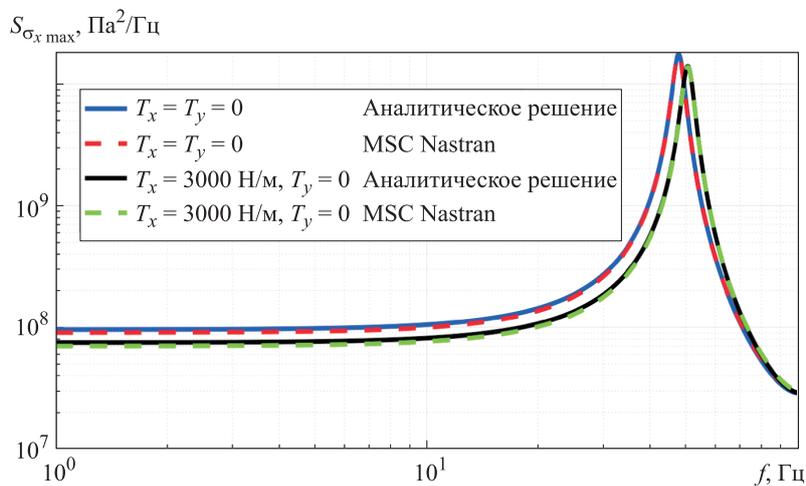


Рис. 3. Спектральная плотность  $S_{\sigma_{x \max}}(x, y, f)$  максимального нормального напряжения в направлении оси  $Ox$  в центре пластины  $x = a/2, y = b/2$

Таблица 5

**Усталостная повреждаемость в центральной точке пластины**

Метод	$D\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right) \cdot 10^{10},$ $T_x = T_y = 0$	$D\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right) \cdot 10^{10},$ $T_x = 3000 \text{ Н/м}, T_y = 0$
	<i>Аналитическое решение</i>	
Тимошенко	2,453919	1,842228
Кирхгофа	2,454701	1,842811
<i>MSC Nastran</i>		
Матрица масс: несогласованная согласованная	2,418940	1,807517
	2,446076	1,827596

Средние относительные отклонения результатов, полученных с использованием различных аналитических моделей и конечно-элементных подходов приведены в табл. 6. Относительное отклонение двух произвольных величин  $A$  и  $B$  вычисляется по формуле  $(A - B)/A \cdot 100\%$ .

Таблица 6

Средние относительные отклонения результатов анализа пластины, %

Методы	Собственные частоты	$\sigma_w \left( \frac{a}{2}, \frac{b}{2} \right)$	$\sigma_{\sigma_{x \max}} \left( \frac{a}{2}, \frac{b}{2} \right)$	$D \left( \frac{a}{2}, \frac{b}{2} \right)$
Тимошенко и Кирхгофа	-0,03	0,02	< -0,01	-0,03
Согласованная и несогласованная матрицы масс	1,59	0,19	0,19	1,10
Тимошенко и несогласованная матрица масс	0,92	-0,21	0,44	1,65
Тимошенко и согласованная матрица масс	-0,69	-0,41	0,26	0,56

Следует заметить, что аналогично рассмотренным колебаниям балки, в табл. 6 указаны средние результаты для преднагруженной и не преднагруженной пластины.

При анализе пластины с помощью конечно-элементного решения получилась оценка «снизу». Аналитическое решение в центре пластины оказалось менее податливым по сравнению с численным.

**Заключение.** Для проработанной шарнирно опертой прямоугольной пластины выполнено сравнение аналитического и численного решений задачи случайных колебаний. Аналитическое решение получено с учетом сдвигов и без их учета, численное решение — в комплексе MSC Nastran с использованием согласованной и несогласованной матриц масс. Анализ усталости пластины проводится с применением одномоментного метода.

В задаче о собственных колебаниях сравниваемыми величинами выбраны собственные частоты колебаний, а в задаче о случайных колебаниях — прогиб, напряжение и усталостная повреждаемость в центральной точке конструкции.

Как и в случае стержня [[5]], усталостная повреждаемость предварительно растянутой пластины получилась ниже, чем у конструкции без такой преднагрузки. Напряжения от растяжения при выбранных условиях задачи оказались значительно меньше изгибных. Поэтому возрастание собственных частот, обусловленное повышением жесткости пластины, повлияло сильнее, чем добавление напряжений от растяжения.

При расчете среднеквадратичных отклонений напряжений с помощью конечно-элементного анализа пластины получены значения в узлах элементов, вычисленные с помощью билинейной интерполяции значений в гауссовых точках, а при расчете усталостной повреждаемости использованы спектральные плотности напряжений в центрах элементов.

При сравнении численного и аналитического решений задачи случайных колебаний для балки [[5]] получилась консервативная оценка с относительным отклонением сравниваемых величин не более 1 %. В случае пластины оценка оказалась неконсервативной, однако результат также достаточно точный, с относительным отклонением не более 2 %.

Таким образом, результаты проведенных численных экспериментов демонстрируют высокую точность использованной методики: относительное отклонение сравниваемых величин не превысило 2 %. Это свидетельствует о том, что методика является эффективной для решения инженерных задач анализа прочности и усталости конструкций.

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Светлицкий В.А. *Случайные колебания механических систем*. Москва, Машиностроение, 1976, 216 с.
- [2] Шульга А.А., Барышева Д.В., Медведский А.Л. Оценка вклада высокочастотной составляющей нагрузки в усталостную повреждаемость металлических конструкций. *Сборник тезисов научно-практической конференции аспирантов (Жуковский, Технопарк ЦАГИ, 27 сентября 2023 г.)*. Жуковский, ЦАГИ, 2023, с. 39–46.
- [3] Шульга А.А., Никитин Е.А., Медведский А.Л. Оценка вклада высокочастотной составляющей нагрузки в усталостную повреждаемость авиационных конструкций одномоментным методом. *Материалы IX Всероссийской научно-технической конференции «Проблемы и перспективы развития авиации, наземного транспорта и энергетики (АНТЭ-2024)» (Казань, 03–04 октября 2024 г.)*. Казань, КАИ, 2024, с. 46–48.
- [4] *Квалификационные требования. КТ-160G/14G*. Условия эксплуатации и окружающей среды для бортового авиационного оборудования (Внешние воздействующие факторы — ВВФ). Требования, нормы и методы испытаний. 2015, 462 с.
- [5] Шульга А.А., Аликин Н.А., Барышева Д.В. Расчет преднагруженных металлических конструкций в комплексе MSC Nastran на стойкость к воздействию случайной вибрационной нагрузки. Часть 1. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2025, вып. 6. EDN IFMLUF.
- [6] Сагдиев Т.А., Норкобилов Б.Н. Исследование и классификация свойств узлов и панелей конструкции планера самолета. *Мировая наука*, 2022, № 6 (63), с. 158–165.
- [7] Timoshenko S.P., Woinowsky-Krieger S. *Theory of plates and shells*. Second edition. New York, McGraw-Hill Book Company, 1959, 580 p.
- [8] Бидерман В.Л. *Механика тонкостенных конструкций: Статика*. Москва, ЛЕНАНД, 2017, 496 с.

- [9] Бидерман В.Л. *Теория механических колебаний*. Москва, ЛЕНАНД, 2017, 416 с.
- [10] Bonte M.H.A., de Boera A., Liebrechts R. Determining the von Mises stress power spectral density for frequency domain fatigue analysis including out-of-phase stress components. *Journal of Sound and Vibration*, 2007, no. 302, pp. 379–386.
- [11] *MSC NASTRAN 2022.1 Quick Reference Guide*. Newport Beach, MSC Software Corporation, 2022, 3418 p.
- [12] Bathe K.J. *Finite Element Procedure*. Second edition. Klaus-Jurgen Bathe, 2014, 1065 p.

Статья поступила в редакцию 21.04.2025

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Шульга А.А., Аликин Н.А., Барышева Д.В. Расчет преднагруженных металлических конструкций в комплексе MSC Nastran на стойкость к воздействию случайной вибрационной нагрузки. Часть 2. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2025, вып. 7. EDN EYQHOL

**Шульга Александр Андреевич** — инженер-конструктор II категории ПАО «Яковлев». e-mail: sozencz@mail.ru

**Аликин Николай Анатольевич** — студент кафедры «Прикладная механика» МГТУ им. Н.Э. Баумана, инженер-конструктор ПАО «Яковлев». e-mail: nickalikin@gmail.com

**Барышева Дарья Валерьевна** — начальник отдела ПАО «Яковлев». e-mail: dariya.barysheva@yakovlev.ru

## Random response analysis of preloaded metal designs using the MSC Nastran software package. Part 2

© A.A. Shulga<sup>1</sup>, N.A. Alikin<sup>1,2</sup>, D.V. Barysheva<sup>1</sup>

<sup>1</sup>JSC Yakovlev Corporation, Moscow, 125315, Russian Federation

<sup>2</sup>Bauman Moscow State Technical University, Moscow, 105005, Russian Federation

*The paper presents computation in the MSC Nastran software package of a stretched metal plate with the material linear elastic model in regard to its resistance to the random vibration loading. An analytical solution to this problem is obtained for two models of plate bending, taking into account the shears and neglecting them. The analytical and numerical (finite element method) solutions are compared. In the problem of natural vibrations, the compared values are the natural vibration frequencies, and in the problem of random vibrations — deflection, stress and fatigue damage in the central point of the plate structure. Results of computing the fatigue damage are meeting the requirements in solving the dynamic strength engineering problems, since they are of sufficiently high accuracy. Thus, relative deviation in the compared values is no more than 2%.*

**Keywords:** random vibration, transverse vibrations, preloading, plate, analytical solution, finite element method, fatigue damage

### REFERENCES

- [1] Svetlitskiy V.A. *Sluchainye kolebaniya mekhanicheskikh sistem* [Random oscillations in the mechanical systems]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1976, 216 p.
- [2] Shulga A.A., Barysheva D.V., Medvedskiy A.L. Otsenka vklada vysokochastotnoy sostavlyayushchey nagruzki v ustalostnuyu povrezhdaemost metallicheskikh konstruksii [Assessment of contribution of the load high-frequency component to fatigue damage of the metal structures]. *Sbornik tezisov II nauchno-prakticheskoy konferentsii aspirantov (g. Zhukovskiy, Tekhnopark TsAGI, 27 sentyabrya 2023 g.)* [Collection of abstracts of the II Scientific and Practical Conference of the Postgraduate Students (Zhukovsky, TsAGI Technopark, September 27, 2023)]. Zhukovskiy, TsAGI Publ., 2023, pp. 39–46.
- [3] Shulga A.A., Nikitin E.A., Medvedskiy A.L. Otsenka vklada vysokochastotnoy sostavlyayushchey nagruzki v ustalostnuyu povrezhdaemost aviatsionnykh konstruksiy odnomomentnym metodom [Assessment of contribution of the load high-frequency component to fatigue damage of the aircraft structures using the one-stage method]. *Sbornik dokladov IX Vserossiyskoy nauchno-tekhnicheskoy konferentsii "Problemy i perspektivy razvitiya aviatsii, nazemnogo transporta i energetiki" (g. Kazan, KNITU "KAI", 3–4 oktyabrya 2024 g.)* [Collection of reports of the IX All-Russian Scientific and Technical Conference "Problems and Prospects for the Development of Aviation, Land Transport and Energy" (Kazan, KNITU "KAI", October 3–4, 2024)]. Kazan, KAI Publ., 2024, pp. 46–48.
- [4] *Kvalifikatsionnye trebovaniya. KT-160G/14G* [Qualification requirements. KT-160G/14G]. Usloviya ekspluatatsii i okruzhayushchey sredy dlya bortovogo aviatsionnogo oborudovaniya (Vneshnie vozdeystvuyushchie faktory – VVF). Trebovaniya, normy i metody ispytaniy [Operating and environmental conditions for the on-board aviation equipment (External influencing factors – EIF). Requirements, standards and test methods]. 2015, 462 p.
- [5] Shulga A.A., Alikin N.A., Barysheva D.V. Raschet prednagruzhennykh metallicheskikh konstruksiy v komplekse MSC Nastran na stoykost k vozdeistviyu

- sluchaynoy vibratsionnoy nagruzki. Chast 1 [Preloaded metal structure computation in the MSC Nastran software package in regard to its resistance to the random oscillation loading. Part 1]. *Inzhenerny zhurnal: nauka i innovatsii — Engineering Journal: Science and Innovation*, 2025, iss.6. EDN IFMLUF
- [6] Sagdiev T.A., Norkobilov B.N. Issledovanie i klassifikatsiya svoystv uzlov i paneley konstruksii planera samoleta [Research and classification of the properties of assembly and panels of the aircraft structure]. *Mirovaya nauka*, 2022, no. 6 (63), pp. 158–165.
- [7] Timoshenko S.P., Woinowsky-Krieger S. *Theory of plates and shells*. Second edition. New York, McGraw-Hill Book Company, 1959, 580 p.
- [8] Biderman V.L. *Mekhanika tonkostennykh konstruksii: Statika* [Mechanics of thin-walled structures: Statics]. Moscow, LENAND Publ., 2017, 496 p.
- [9] Biderman V.L. *Teoriya mekhanicheskikh kolebaniy* [Theory of mechanical oscillations]. Moscow, LENAND Publ., 2017, 416 p.
- [10] Bonte M.H.A., de Boera A., Liebrechts R. Determining the von Mises stress power spectral density for frequency domain fatigue analysis including out-of-phase stress components. *Journal of Sound and Vibration*, 2007, no. 302, pp. 379–386.
- [11] *MSC NASTRAN 2022.1 Quick Reference Guide*. Newport Beach, MSC Software Corporation, 2022, 3418 p.
- [12] Bathe K. J. *Finite Element Procedure*. Second edition. Klaus-Jurgen Bathe, 2014, 1065 p.

**Shulga A.A.**, Design Engineer of the II category, JSC Yakovlev Corporation.  
e-mail: sozencz@mail.ru

**Alikin N.A.**, Student, Department of Applied Mechanics, Bauman Moscow State Technical University; Design Engineer, JSC Yakovlev Corporation.  
e-mail: nickalikin@gmail.com

**Barysheva D.V.**, Department Head, JSC Yakovlev Corporation.  
e-mail: dariya.barysheva@yakovlev.ru