УДК 681.5.015

С.Л. Зенкевич, А.В. Назарова

О МАКСИМАЛЬНЫХ УСКОРЕНИЯХ СХВАТА МАНИПУЛЯТОРА

Рассмотрено решение задачи поиска максимального линейного ускорения схвата манипулятора с произвольной кинематической схемой. Ускорения определяются для каждой допустимой конфигурации манипулятора, при этом учитываются ограничения, накладываемые на скорости и ускорения, развиваемые в сочленениях. Для решения используются методы теории оптимального управления для дискретных систем.

E-mail: zenkev@mx.bmstu.ru, avn@mx.bmstu.ru

Ключевые слова: *схват манипулятора, обобщенные координаты, линейные ускорения, динамические системы, оптимальное управление, кинематическая схема.*

Задача поиска максимальных линейных ускорений схвата манипулятора или некоторого объекта, тем или иным способом соединенного со схватом, представляет значительный интерес. Одно из приложений, где эта задача чрезвычайно важна – выполнение транспортных операций манипулятором, в схвате которого находится переносимый груз. Напряжения, возникающие в конструкции в процессе движения, зависят от многих факторов. Среди таковых определяющим, безусловно, является ускорение, с которым перемещается схват или произвольно выбранная точка (для линейных ускорений) твердого тела, неподвижная относительно схвата. Знание ускорений в этой точке позволяет вычислить распределение линейных ускорений всех точек конструкции, а также оценить возникающие в процессе движения напряжения в элементах переносимой конструкции. В том случае, когда напряжения превышают допустимые и, следовательно, могут привести к поломке конструкции, соответствующее перемещение следует считать недопустимым.

Задачи такого типа возникают, например, в автомобильной промышленности при выполнении манипулятором транспортных операций по переносу тяжелых элементов конструкции автомобиля с использованием специальных приспособлений. Эти приспособления должны быть, с одной стороны, легкими, а с другой – обеспечивать безопасную транспортировку элементов к сборочным позициям. При этом следует иметь в виду, что производительность сборочного конвейера напрямую связана со скоростью выполнения сборочной операции. Поэтому манипулятор должен двигаться настолько быстро, насколько это возможно.

Постановка задачи. Рассмотрим N-звенный манипулятор с произвольной кинематической схемой (далее, для определенности, будем рассматривать манипулятор с вращательными звеньями). Положение схвата $\boldsymbol{s}$, включающее его ориентацию и декартовы координаты начала связанной со схватом системы координат, задаются соотношением [1]:

$$\boldsymbol{s} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{q}), \tag{1}$$

где $\boldsymbol{q} = (q_1, q_2, \dots, q_N)^{\mathrm{T}}$ – вектор обобщенных (угловых) координат.

Двукратное дифференцирование соотношения (1) приводит к выражению для ускорений схвата $\boldsymbol{w}$:

$$\boldsymbol{w} = J(\boldsymbol{q})\ddot{\boldsymbol{q}} + \dot{J}(\boldsymbol{q})\dot{\boldsymbol{q}}, \tag{2}$$

где $\boldsymbol{w} = (\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{a}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$ – 6x1-вектор ускорений, при этом $\boldsymbol{\varepsilon}$ – 3x1-вектор углового ускорения, $\boldsymbol{a}$ – 3x1-вектор линейного ускорения; $J(\boldsymbol{q})$ – 6xN-матрица Якоби; $\dot{\boldsymbol{q}}, \ddot{\boldsymbol{q}}$ – векторы скоростей и ускорений в сочленениях.

Здесь необходимо сделать два замечания. Во-первых, в качестве схвата может выступать любое твердое тело, жестко присоединенное к последнему звену манипулятора, при этом сохраняется определенная свобода в выборе связанной системы координат. Во-вторых, соотношение (2) можно декомпозировать, сформировав отдельно выражения для углового и линейного ускорений:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = J_{\varepsilon}(\boldsymbol{q})\ddot{\boldsymbol{q}} + \dot{J}_{\varepsilon}(\boldsymbol{q})\dot{\boldsymbol{q}}; \tag{3}$$

$$\boldsymbol{a} = J_{a}(\boldsymbol{q})\ddot{\boldsymbol{q}} + \dot{J}_{a}(\boldsymbol{q})\dot{\boldsymbol{q}}, \tag{4}$$

где 3xN-матрицы $J_{\varepsilon}(\boldsymbol{q})$ и $J_a(\boldsymbol{q})$ являются соответствующими блоками матрицы Якоби $J(\boldsymbol{q})$. Соотношения (2) или (3) и (4) позволяют вычислить ускорения схвата при заданных векторах $\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, \ddot{\boldsymbol{q}}$.

Обозначим через

$$Q_i = \{\, q_i \mid q_i^{\min} \le q_i \le q_i^{\max} \,\},$$

$$\dot{Q}_i = \{\, \dot{q}_i \mid \dot{q}_i^{\min} \le \dot{q}_i \le \dot{q}_i^{\max} \,\},$$

$$\ddot{Q}_i = \{\, \ddot{q}_i \mid \ddot{q}_i^{\min} \le \ddot{q}_i \le \ddot{q}_i^{\max} \,\}$$

области, которым принадлежат обобщенные координаты, скорости и ускорения i-го подвижного сочленения. Соответствующие величины, задающие эти области, определяются конструктивными параметрами, а также свойствами приводов сочленений и являются известными.

Далее рассмотрим только линейные ускорения. Обозначим квадрат длины вектора линейного ускорения схвата

$$\boldsymbol{a}^2 = \boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a} = \dot{\boldsymbol{q}}^{\mathrm{T}}\left(\dot{J}_a^{\mathrm{T}}\dot{J}_a\right)\dot{\boldsymbol{q}} + 2\dot{\boldsymbol{q}}^{\mathrm{T}}\left(\dot{J}_a^{\mathrm{T}}J_a\right)\ddot{\boldsymbol{q}} + \ddot{\boldsymbol{q}}^{\mathrm{T}}\left(J_a^{\mathrm{T}}J_a\right)\ddot{\boldsymbol{q}} \geq 0. \qquad (5)$$

Тогда задача состоит в поиске максимума скалярной функции, задаваемой соотношением (5):

$$\boldsymbol{a}^2_{\max}(\boldsymbol{q}) = \max_{\dot{q},\ddot{q}}\left(a^2(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},\ddot{\boldsymbol{q}})\right),$$

а также в нахождении значений $\dot{\boldsymbol{q}}^*, \ddot{\boldsymbol{q}}^*$, на которых этот максимум достигается:

$$\left(\dot{\boldsymbol{q}}^*(\boldsymbol{q}), \ddot{\boldsymbol{q}}^*(\boldsymbol{q})\right) = \arg\max_{\dot{q},\ddot{q}}\left(a^2(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},\ddot{\boldsymbol{q}})\right),$$

и соответствующего вектора ускорения

$$\boldsymbol{a}^*(\boldsymbol{q}) = \boldsymbol{a}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}^*, \ddot{\boldsymbol{q}}^*)$$

в каждой точке пространства обобщенных координат $Q = Q_1 \times Q_2 \times \ldots \times Q_N$. При этом поиск осуществляется в многомерном пространстве

$$U = \dot{Q} \times \ddot{Q} = \dot{Q}_1 \times \dot{Q}_2 \times \ldots \times \dot{Q}_N \times \ddot{Q}_1 \times \ddot{Q}_2 \times \ldots \times \ddot{Q}_N.$$

В вычислительном смысле решение поставленной задачи является весьма сложным. Так, для шестизвенного манипулятора необходимо искать максимум функции 12 переменных в каждой точке шестимерного пространства.

Применение методов оптимального терминального управления. Воспользуемся известными рекуррентными соотношениями для скоростей и ускорений звеньев манипулятора [1] (как и выше, для определенности рассмотрим случай вращательных сочленений):

$$\boldsymbol{\omega}_{i+1} = \boldsymbol{\omega}_i + \boldsymbol{z}_i\dot{q}_{i+1}; \qquad (6)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{i+1} = \boldsymbol{\varepsilon}_i + \boldsymbol{\omega}_i \times \boldsymbol{z}_i\dot{q}_{i+1} + \boldsymbol{z}_i\ddot{q}_{i+1}; \qquad (7)$$

$$\boldsymbol{a}_{i+1} = \boldsymbol{a}_i + \boldsymbol{\omega}_{i+1} \times (\boldsymbol{\omega}_{i+1} \times \boldsymbol{p}_{i,i+1}) + \boldsymbol{\varepsilon}_{i+1} \times \boldsymbol{p}_{i,i+1}, \qquad (8)$$

где $i = 0, 1, 2, \ldots, N-1$; $\boldsymbol{p}_{i,i+1}$ – вектор, проведенный из начала i-й (связанной с механизмом) системы координат в начало $(i+1)$-й системы координат; $\boldsymbol{\omega}_0$ и $\boldsymbol{\varepsilon}_0$ заданы (для манипуляторов с неподвижным основанием).

Подставим (6) и (7) в (8) и заменим все входящие векторные произведения $\boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\beta}$ на выражения $\boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\beta} = \Omega(\boldsymbol{\alpha})\boldsymbol{\beta} = -\Omega(\boldsymbol{\beta})\boldsymbol{\alpha}$, где $\Omega(\boldsymbol{\alpha})$, $\Omega(\boldsymbol{\beta})$ – кососимметрические матрицы вида

$$\Omega(\boldsymbol{\alpha}) = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha_z & \alpha_y \\ \alpha_z & 0 & -\alpha_x \\ -\alpha_y & \alpha_x & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда после соответствующих преобразований система (6) – (8) примет вид

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega}_{i+1} &= \boldsymbol{\omega}_i + \boldsymbol{z}_i \dot{q}_{i+1}; \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{i+1} &= \boldsymbol{\varepsilon}_i + \Omega(\boldsymbol{z}_i)\boldsymbol{\omega}_i \dot{q}_{i+1} + \boldsymbol{z}_i \ddot{q}_{i+1}; \end{aligned} \qquad (9)$$

$$\boldsymbol{a}_{i+1} = \boldsymbol{a}_i + \Omega^2(\boldsymbol{\omega}_i)\boldsymbol{p}_{i,i+1} - \Omega(\boldsymbol{p}_{i,i+1})\boldsymbol{\varepsilon}_i - 2\Omega(\boldsymbol{z}_i \times \boldsymbol{p}_{i,i+1})\boldsymbol{\omega}_i \dot{q}_{i+1} +$$

$$+ \Omega^2(\boldsymbol{z}_i)\boldsymbol{p}_{i,i+1}\dot{q}_{i+1}^2 + \Omega(\boldsymbol{z}_i)\boldsymbol{p}_{i,i+1}\ddot{q}_{i+1}.$$

Введем фазовый 9x1-вектор

$$\boldsymbol{x}_i = (\boldsymbol{\omega}_i^{\mathrm{T}} \quad \boldsymbol{\varepsilon}_i^{\mathrm{T}} \quad \boldsymbol{a}_i^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$$

и 2x1-вектор управления

$$\boldsymbol{u}_i = (\dot{q}_{i+1} \quad \ddot{q}_{i+1})^{\mathrm{T}}. \qquad (10)$$

Тогда систему (9) можно представить в виде

$$\boldsymbol{x}_{i+1} = f(\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{u}_i),\ \boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{x}^0; \qquad (11)$$

$$\boldsymbol{u}_i \subset U. \qquad (12)$$

Введем функционал

$$J = \varphi(\boldsymbol{x}_N) = \frac{1}{2}\boldsymbol{x}_N^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Phi}\ \boldsymbol{x}_N = \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{a}_{xN}^2 + \boldsymbol{a}_{yN}^2 + \boldsymbol{a}_{zN}^2\right), \qquad (13)$$

где $\boldsymbol{\Phi} = \mathrm{diag}(0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 1\ 1)$ – вырожденная матрица.

Таким образом, наша задача может быть сформулирована следующим образом: для нелинейной нестационарной дискретной динамической системы (11) найти допустимое управление (10), удовлетворяющее ограничениям (12) и переводящее систему из заданного начального состояния в конечное за N шагов так, чтобы значение функционала (13) было максимальным (напомним, что N – число звеньев манипулятора). Это полностью совпадает с постановкой задачи оптимального терминального управления дискретной системой [2].

Для ее решения воспользуемся дискретным принципом максимума [3].

В соответствии с этим принципом уравнение для 9x1-вектора вспомогательных переменных λ_i имеет вид

$$\boldsymbol{\lambda}_i = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_i}\right)^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\lambda}_{i+1}, \quad \boldsymbol{\lambda}_N = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_N}\right)^{\mathrm{T}}. \tag{14}$$

В нашем случае

$$\boldsymbol{\lambda}_N = (0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ \boldsymbol{a}_{xN}\ \boldsymbol{a}_{yN}\ \boldsymbol{a}_{zN})^{\mathrm{T}}; \tag{15}$$

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_i} = \begin{pmatrix} \mathrm{E}_3 & \mathrm{O}_3 & \mathrm{O}_3 \\ -\Omega(\boldsymbol{z}_i)\dot{q}_{i+1} & \mathrm{E}_3 & \mathrm{O}_3 \\ -2\Omega(\boldsymbol{z}_i \times \boldsymbol{p}_{i,i+1})\dot{q}_{i+1} + L(\boldsymbol{\omega}_i) & -\Omega(\boldsymbol{p}_{i,i+1}) & \mathrm{E}_3 \end{pmatrix}, \tag{16}$$

где O_3 – нулевая 3x3-матрица; E_3 – единичная 3x3-матрица, а $L(\boldsymbol{\omega}_i)$ – 3x3-матрица, содержит элементы, линейные по компонентам вектора $\boldsymbol{\omega}_i$.

Представим теперь $\boldsymbol{\lambda}_i$ в виде

$$\boldsymbol{\lambda}_i = (\boldsymbol{\lambda}_i^{\omega\mathrm{T}} \boldsymbol{\lambda}_i^{\varepsilon\mathrm{T}} \boldsymbol{\lambda}_i^{a\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}.$$

Тогда с учетом (15) и (16) уравнение (14) для λ_i будет иметь вид

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\lambda}_i^{\omega} &= \boldsymbol{\lambda}_{i+1}^{\omega}, \\ \boldsymbol{\lambda}_i^{\varepsilon} &= \boldsymbol{\lambda}_{i+1}^{\varepsilon} - \Omega(\boldsymbol{z}_i)\dot{q}_{i+1}\boldsymbol{\lambda}_{i+1}^{\omega}, \\ \boldsymbol{\lambda}_i^{a} &= \boldsymbol{\lambda}_{i+1}^{a} + (-(2\Omega(\boldsymbol{z}_i \times \boldsymbol{p}_{i,\,i+1})\dot{q}_{i+1} + L(\boldsymbol{\omega}_i))\boldsymbol{\lambda}_{i+1}^{\omega} - \Omega(\boldsymbol{p}_{i,\,i+1})\boldsymbol{\lambda}_{i+1}^{\varepsilon}. \end{aligned} \tag{17}$$

Нетрудно заметить, что с учетом краевых условий $\boldsymbol{\lambda}_N^{\omega} = \boldsymbol{\lambda}_N^{\varepsilon} = 0$, $\boldsymbol{\lambda}_N^{a} = \boldsymbol{a}_N$ решение системы (17) имеет вид

$$\boldsymbol{\lambda}_i^{\omega} = \boldsymbol{\lambda}_i^{\varepsilon} = 0, \ \boldsymbol{\lambda}_i^{a} = a_N. \tag{18}$$

Функция Гамильтона $H_i = \boldsymbol{\lambda}_{i+1}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{f}_i$ в нашем случае с учетом (18) выглядит следующим образом:

$$
\begin{aligned}
H_i &= \boldsymbol{a}_N^{\mathrm{T}}\Big(\boldsymbol{a}_i - \Omega(\boldsymbol{p}_{i,i+1})\boldsymbol{\varepsilon}_i - 2\Omega(\boldsymbol{z}_i \times \boldsymbol{p}_{i,i+1})\boldsymbol{\omega}_i \dot{q}_{i+1} + \\
&+ \Omega^2(\boldsymbol{\omega}_i)\boldsymbol{p}_{i,i+1} + \Omega^2(\boldsymbol{z}_i)\boldsymbol{p}_{i,i+1}\dot{q}_{i+1}^2 + \Omega(\boldsymbol{z}_i)\boldsymbol{p}_{i,i+1}\ddot{q}_{i+1}\Big) = \\
&= \alpha_{i+1}\dot{q}_{i+1} + \beta_{i+1}\dot{q}_{i+1}^2 + \gamma_{i+1}\ddot{q}_{i+1} + \delta_i.
\end{aligned} \tag{19}
$$

Из выражения (19) видно, что максимум функции H_i по компоненте $\ddot{q}_{i+1}$ вектора управления достигается, когда $\ddot{q}_{i+1}$ принимает одно из своих граничных значений: $\ddot{q}_{i+1}^{\max}$ или $\ddot{q}_{i+1}^{\min}$. Что касается компоненты $\dot{q}_{i+1}$, то максимум достигается либо в граничных точках $\dot{q}_{i+1}^{\max}$ или $\dot{q}_{i+1}^{\min}$, либо в точке $\dot{q}_{i+1}^{*} = -\alpha_{i+1} / 2\beta_{i+1}$, если она является внутренней точкой этого отрезка и $\beta_{i+1} \neq 0$ (числа α_{i+1} и β_{i+1} задаются соотношением (19)). Отсюда следует, что максимум ускорения достигается в одной из точек, лежащих на гранях гиперпараллелепипеда U, координаты которых принадлежат множеству

$$
\mathrm{M} = \{\ddot{q}_i^{\min},\ \ddot{q}_i^{\max},\ \dot{q}_i^{\min},\ \dot{q}_i^{\max},\ \dot{q}_i^{*}\}.
$$

Полученный результат существенно сужает область поиска экстремума.

Заключение. В работе рассмотрено решение весьма важной с практической точки зрения задачи, связанной с поиском максимального ускорения схвата манипулятора при выполнении технологических операций. Предложенный метод позволяет существенно понизить вычислительную сложность алгоритма поиска. Продолжение работ в этом направлении связано с верификацией и созданием системы моделирования для манипуляторов с различными кинематическими схемами.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Зенкевич С. Л., Ющенко А. С. Основы управления манипуляционными роботами. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2004. – 480с.
2. Куо В. Теория и проектирование цифровых систем управления. – М.: Машиностроение, 1986. – 448 с.
3. Пропой А. И. Элементы теории оптимальных дискретных процессов. – М.: Наука, 1973. – 256 с.

Статья поступила в редакцию 28.06.2012