

Влияние давления на аэродинамические потери и несущую способность смазочного слоя для различных инертных газов

© М.А. Веренин^{1,2}

¹АО ГНЦ «Центр Келдыша», Москва, 125438, Российская Федерация

²Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет), Долгопрудный, 141701, Российская Федерация

Газовая смазка широко применяется в промышленности, поэтому ее математическое моделирование является актуальной исследовательской задачей. Для расчета течения газа требуется корректно определить его теплофизические свойства, в связи с чем неизбежно возникает вопрос о влиянии на них макроскопических параметров: давления и температуры. В частности, согласно результатам многочисленных экспериментов, с повышением давления значения вязкости расходятся с предсказаниями теории Чапмена — Энскога. В представленном исследовании сущестующая методика учета влияния высокого давления на свойства бинарных смесей инертных газов применяется к вычислению важнейших характеристик газового смазочного слоя: аэродинамических потерь и несущей способности. Приведены количественные оценки указанных эффектов в диапазоне температур 400...1200К и давлений 1...7 МПа. Рассмотренный метод может быть использован при написании и оптимизации программных кодов для решения задач газовой смазки.

Ключевые слова: смесь инертных газов, газовая смазка, несущая способность смазочного слоя, аэродинамические потери

Введение. Появление в промышленности машин и механизмов с движущимися относительно друг друга и разделенными тонким слоем смазочного масла поверхностями предвосхитило развитие гидродинамической теории смазки, одним из основоположников которой стал русский ученый Н.Н. Петров. Вопросы данной теории изложены в сборнике [1] и книгах [2, 3]. В конце XIX века в обиход вошли механизмы на воздушной смазке, обусловив повышенный интерес к исследованиям, посвященным проблемам построения соответствующей теории газовой смазки. Классическими трудами на эту тему являются монографии [4, 5]. Современные подходы к математическому моделированию газовой смазки подробно изложены в работах [6–8]. В частности, в них показано, что основными являются уравнения пограничного слоя, граничные условия для решения которых принципиально отличаются от условий в задачах обтекания, а также построены численные решения стационарных и нестационарных задач о газовой смазке.

Наиболее перспективной областью применения газовой смазки считается разработка лепестковых газодинамических подшипников (ЛГП) — опор для роторов турбомашин различного назначения. Первые

исследования по их расчету на русском языке были изложены в работах [9, 10], где рассматривались стационарные режимы. Изучение переходных процессов в лепестковых газодинамических подшипниках получило мощный импульс к развитию после создания эффективного метода совместного решения соответствующих уравнений в работе [11]. Исследование устойчивости движения ротора турбомшины на ЛГП и его динамики при воздействии вибрации выполнено в работах [12–14]. Подробнейшее описание подшипников разных типов на газовой смазке и методик их расчета можно найти в книге [15].

В силу ряда преимуществ (в частности, высокого ресурса работы — десятки тысяч часов) лепестковые газодинамические подшипники рассматриваются как опоры для ротора турбокомпрессора-генератора мощной (мегаваттного класса) ядерной энергодвигательной установки космического назначения с газотурбинным преобразованием энергии по замкнутому циклу Брайтона [16], где рабочим телом служат инертные газы и их бинарные смеси [17–20]. Температура в таких установках варьируется от 400К до 1400К, а давление — от 0,1 МПа до 20 МПа. При столь высоком давлении наблюдается отклонение свойств газов от значений, предсказываемых кинетической теорией Чепмена — Энскога. Накопленный к настоящему времени объемный багаж экспериментальных данных о свойствах чистых инертных газов и их смесей [21] позволяет построить эмпирические закономерности для аппроксимации этих отклонений. В работах [22–24] описана методика вычисления термодинамических (плотности, коэффициента сжимаемости, энтальпии, теплоемкости, показателя адиабаты) и тепло-физических (динамической вязкости, теплопроводности) свойств пяти инертных газов (гелия, неона, аргона, криптона, ксенона) и 10 их бинарных смесей при температуре до 1400К и давлении до 20 МПа.

Подводя итог вышеизложенному, следует подчеркнуть необходимость разработки математического аппарата, описывающего влияние давления на важнейшие характеристики газового смазочного слоя: несущую способность и аэродинамические потери.

После подробного анализа существующей методики расчета плотности и динамической вязкости бинарных смесей инертных газов с учетом высокого давления описана методика численного интегрирования уравнения Рейнольдса газовой смазки. Рассматривается стационарная ламинарная изотермическая постановка для подшипника бесконечной длины (т. е. одномерный случай). Затем указанные методы применяются к вычислению несущей способности (силы реакции газового слоя) в выбранной геометрии течения. Аэродинамические потери в двух характерных случаях вычисляются по методикам из [3, 25, 26].

Теоретическая часть. *Вычисление плотности и динамической вязкости чистых инертных газов.* По заданным температуре T

и давлению p значение *плотности* газа ρ может быть восстановлено из решения уравнения состояния в вириальной форме:

$$p = (\rho_M Z) \cdot (R_g T) = (\rho_M + B\rho_M^2 + C\rho_M^3) R_g T, \quad (1)$$

где $\rho_M = \rho / M$ — молярная плотность газа; M — молярная масса газа; B и C — второй и третий вириальные коэффициенты соответственно; $R_g = 8,314$ Дж/(моль · К) — универсальная газовая постоянная; $Z := 1 + B\rho_M + C\rho_M^2$ — коэффициент сжимаемости.

Кубическое уравнение (1), как известно, допускает аналитическое решение с помощью формулы Кардано, однако его можно решать и численно: например, методом Ньютона — Рафсона, выбрав за начальное приближение молярную плотность совершенного газа при температуре T и давлении p :

$$\rho_M^{(0)} = p / (R_g T).$$

Краеугольным камнем определения плотности является расчет вириальных коэффициентов. Согласно работе [22], для гелия второй вириальный коэффициент аппроксимируется выражением

$$B_{\text{He}} \left[\text{см}^3 / \text{моль} \right] = 8,4 - 0,0018T + \frac{115,0}{\sqrt{T}} - \frac{835,0}{T}, \quad (2)$$

а третьим вириальным коэффициентом для него при давлении меньше 30 МПа можно пренебречь [21]:

$$C_{\text{He}} = 0. \quad (3)$$

Для остальных инертных газов используются соотношения

$$\frac{B}{V^*} = -102,6 + \left(102,732 - 0,001\tau - \frac{0,44}{\tau^{1,22}} \right) \text{th} \left(4,5\sqrt{\tau} \right) \stackrel{\text{def}}{=} \Psi_B(\tau); \quad (4)$$

$$\frac{C}{V^{*2}} = 0,0757 + \left(-0,0862 - 3,6 \cdot 10^{-5}\tau + \frac{0,0237}{\tau^{0,059}} \right) \text{th} (0,84\tau), \quad (5)$$

где $\tau := T / T_{cr}$ — приведенная температура; T_{cr} — критическая температура; p_{cr} — критическое давление; $V^* := (R_g T_{cr}) / p_{cr}$.

Значения критических параметров инертных газов приведены в табл. 1.

Следует отметить, что введенная выше величина V^* не совпадает с критическим молярным объемом V_{cr} , так как при низкой температуре (близкой к критическому значению) существенную роль играет

неидеальность газа, вследствие чего он не подчиняется закону Менделеева — Клапейрона, в соответствии с которым V^* вводится по определению.

Таблица 1

Критические параметры инертных газов

Параметр	Гелий	Неон	Аргон	Криптон	Ксенон
M , г/моль	4,003	20,179	39,948	83,80	131,29
T_{cr} , К	5,2	44,5	150,7	209,5	289,7
p_{cr} , МПа	0,2275	2,678	4,863	5,51	5,84
ρ_{cr} , кг/м ³	69,64	481,9	535,6	908,4	1110,0
V_{cr} , см ³ /моль	57,48	41,87	74,59	92,25	118,28
V^* , см ³ /моль	190,04	138,16	257,66	316,13	412,45

Для вычисления динамической вязкости $\mu^0(T)$ в первом приближении можно применить кинетическую теорию Чепмена — Энскога (см. [27]), однако богатая база накопленных экспериментальных данных позволяет сразу использовать степенную аппроксимацию [22]:

$$\mu^0(T) = A_\mu (T - T_\mu)^n. \quad (6)$$

Значения параметров A_μ , T_μ и n для чистых газов указаны в табл. 2.

Таблица 2

Коэффициенты для аппроксимации вязкости чистых инертных газов

Коэффициент	Гелий	Неон	Аргон	Криптон	Ксенон
$A_\mu \cdot 10^7$	3,0629	8,4528	6,9891	6,9629	7,5683
T_μ , К	-21,33	16,47	65,70	71,07	112,31
n	0,7243	0,642584	0,63977	0,667	0,655473

В случае чистого гелия формулой (6) можно ограничиться, поскольку его динамическая вязкость не зависит от давления. Для других инертных газов влияние высокого давления учитывается с помощью эмпирических поправок [22]:

$$\mu(T, p) = \mu^0(T) + 0,565 \mu_{cr}^* \Psi_\mu(0,291V^* \rho_M), \quad (7)$$

где критическая вязкость μ_{cr}^* и функция Ψ_μ имеют вид

$$\mu_{cr}^* = 0,204 \cdot 10^{-7} \cdot \frac{\sqrt{MT_{cr}}}{(0,291V^*)^{\frac{2}{3}}}; \quad (8)$$

$$\Psi_{\mu}(x) := 0,221x + 1,062x^2 - 0,509x^3 + 0,225x^4. \quad (9)$$

Вычисление плотности и динамической вязкости бинарных смесей инертных газов. Пусть теперь помимо температуры T и давления p будут заданы мольные доли компонентов бинарной смеси χ_1 и χ_2 ($\chi_1 + \chi_2 = 1$). Отметим, что последние могут быть однозначно восстановлены и по молярной массе бинарной смеси известных газов:

$$\bar{M} = \chi_1 M_1 + \chi_2 M_2, \quad (10)$$

где M_1 и M_2 — молярные массы компонентов (здесь и далее чертой отмечены относящиеся к бинарной смеси параметры). Как и в случае с чистыми газами, необходимо разрешить уравнение состояния относительно молярной плотности:

$$p = (\bar{\rho}_M \bar{Z}) \cdot (R_g T) = (\bar{\rho}_M + \bar{B} \bar{\rho}_M^2 + \bar{C} \bar{\rho}_M^3) R_g T. \quad (11)$$

Вириальные коэффициенты при этом вычисляются в соответствии с комбинационными правилами:

$$\bar{B} = \chi_1^2 B_1 + 2\chi_1 \chi_2 B_{12} + \chi_2^2 B_2; \quad (12)$$

$$\bar{C} = \chi_1^3 C_1 + 3\chi_1^2 \chi_2 C_{112} + 3\chi_2^2 \chi_1 C_{122} + \chi_2^3 C_2. \quad (13)$$

Здесь величины B_{12} , C_{112} и C_{122} обусловлены взаимодействием атомов разных сортов и могут быть выражены через вириальные коэффициенты компонентов смеси B_1 , B_2 , C_1 и C_2 , вычисляемые в соответствии с (4) и (5):

$$B_{12} = \frac{B_1 + B_2}{2} + E_{12}; \quad (14)$$

$$C_{112} = (C_1^2 C_2)^{1/3}, \quad C_{122} = (C_1 C_2^2)^{1/3}, \quad (15)$$

где поправка E_{12} зависит от состава смеси и температуры. Согласно принципу соответственных состояний, B_{ij} определяется аналогично (4):

$$B_{ij} = V_{ij}^* \Psi_B \left(\frac{T}{T_{ij}^*} \right). \quad (16)$$

Теперь необходимо выбрать правила смешения для вычисления величин V_{ij}^* и T_{ij}^* . Следуя указанному в [22] методу, используем линейное осреднение характеристических объемов и предложенную Лондоном теорию дисперсионных сил для осреднения температуры:

$$V_{ij}^* = \frac{V_i^* + V_j^*}{2}; \quad (17)$$

$$T_{ij}^* = \frac{4\beta}{(1+\beta)^2} \sqrt{T_{cri} T_{crj}}, \quad \beta := \frac{V_i^*}{V_j^*}. \quad (18)$$

Динамическую вязкость бинарных смесей инертных газов $\bar{\mu}^0$, рассчитанную по теории Чепмена — Энскога, точно описывает разработанная Сазерлендом и Васильевой модель

$$\bar{\mu}^0 = \frac{\mu_1^0}{1 + \phi_{12} \frac{\chi_2}{\chi_1}} + \frac{\mu_2^0}{1 + \phi_{21} \frac{\chi_1}{\chi_2}}, \quad (19)$$

где коэффициенты взаимодействия ϕ_{ij} определяются как

$$\phi_{12} = \frac{\mu_1^0}{\mu_{12}^0} \frac{2m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2} \left(\frac{5}{3A_{12}^*(T_{12}^*)} + \frac{m_2}{m_1} \right);$$

$$\phi_{21} = \frac{\mu_2^0}{\mu_{12}^0} \frac{2m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2} \left(\frac{5}{3A_{12}^*(T_{12}^*)} + \frac{m_1}{m_2} \right),$$

где μ_i^0 — динамические вязкости компонентов; m_i — массы их атомов; $A_{12}^* := \Omega^{(2,2)*} / \Omega^{(1,1)*}$ — медленно меняющаяся функция приведенной температуры $T_{12}^* = kT / \varepsilon_{12} = kT / \sqrt{\varepsilon_1 \varepsilon_2}$; $\Omega^{(l,s)*}$ — приведенные интегралы столкновений; ε_1 и ε_2 — характерные энергии взаимодействия атомов компонентов, т. е. глубина ямы в потенциале Леннарда — Джонса:

$$u(r) = 4\varepsilon \left[\left(\frac{\sigma}{r} \right)^{12} - \left(\frac{\sigma}{r} \right)^6 \right].$$

В настоящей работе использовались значения характерных энергий ε и расстояния σ взаимодействия, указанные в табл. 3. Приведенные интегралы столкновений $\Omega^{(l,s)*}$ аппроксимировались по таблицам из [27].

Таблица 3

Параметры взаимодействия потенциала Леннарда — Джонса

Параметр	Гелий	Неон	Аргон	Криптон	Ксенон
$\sigma, \text{ \AA}$	2,556	2,78	3,40	3,597	3,963
$\varepsilon/k, \text{ K}$	10,22	34,9	122,0	158,0	217,0

В большинстве работ, однако, величина A_{12}^* принимается постоянной ($A_{12}^* = 1,10$), что совершенно правомочно и не влияет на точность расчета, поскольку в интервале температур $1,0 < T_{12}^* < 20,0$ значение A_{12}^* варьируется от 1,094 до 1,119.

Аппроксимирующие зависимости для вязкости μ_{12} , обусловленной рассеиванием атомов разных сортов, выведены из обработки результатов экспериментов:

$$\mu_{12} = A_{\mu} (T - T_{\mu})^n. \quad (20)$$

Параметры для аппроксимации взяты из работы [22] и даны в табл. 4 и 5.

Таблица 4

Коэффициенты A_{μ} и T_{μ} для вычисления параметра μ_{12}

Коэффициент		$A_{\mu} \cdot 10^7$				
		Гелий	Неон	Аргон	Криптон	Ксенон
T_{μ}, K	Гелий		8,81837	6,57562	11,2472	3,40998
	Неон	63,63		10,4450	15,2944	18,2681
	Аргон	51,87	47,66		18,5326	16,9684
	Криптон	121,27	94,86	148,93		11,2303
	Ксенон	45,89	125,0	151,58	116,71	

Таблица 5

Коэффициент n для вычисления параметра μ_{12}

n	Гелий	Неон	Аргон	Криптон	Ксенон
Гелий		0,614098	0,602712	0,508158	0,658754
Неон	0,614098		0,620956	0,565158	0,522034
Аргон	0,602712	0,620956		0,541593	0,542416
Криптон	0,508158	0,565158	0,541593		0,631571
Ксенон	0,658754	0,522034	0,542416	0,631571	

Поправка к динамической вязкости бинарной смеси, обусловленная высоким давлением, рассчитывается по формулам, аналогичным (7)–(9):

$$\bar{\mu}(T, p) = \bar{\mu}^0(T) + 0,565 \bar{\mu}^* \Psi_{\mu} (0,291 \bar{V}^* \bar{\rho}_M); \quad (21)$$

$$\bar{\mu}^* = 0,204 \cdot 10^{-7} \frac{\sqrt{MT}^*}{(0,291 \bar{V}^*)^3}, \quad (22)$$

а «псевдокритическая» температура \bar{T}^* и \bar{V}^* вычисляются по правилам смешения Ван дер Ваальса с применением осреднения (17):

$$\begin{aligned}\bar{V}^* &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \chi_i \chi_j V_{ij}^* = \chi_1^2 V_1^* + 2\chi_1 \chi_2 V_{12}^* + \chi_2^2 V_2^* = \\ &= \chi_1^2 V_1^* + 2\chi_1 \chi_2 \cdot \left(\frac{V_1^* + V_2^*}{2} \right) + \chi_2^2 V_2^* = \chi_1 V_1^* + \chi_2 V_2^*.\end{aligned}\quad (23)$$

Здесь применяется линейное осреднение согласно (17):

$$\bar{V}^* \bar{T}^* = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \chi_i \chi_j V_{ij}^* T_{ij}^*, \quad (24)$$

где $T_{ii}^* := T_{cri}$ — критическая температура компонентов смеси.

Как было отмечено выше, динамическая вязкость гелия не зависит от давления, поэтому для смесей с мольной долей гелия χ выражение (21) несколько видоизменяется:

$$\bar{\mu}(T, p) = \bar{\mu}^0(T) + (1 - \chi) \cdot 0,565 \bar{\mu}^* \Psi_{\mu} \left(0,291 \bar{V}^* \bar{\rho}_M \right).$$

Уравнения Рейнольдса газовой смазки. Распределение давления $p(\theta, z)$ в тонком слое газовой смазки (между поверхностями цапфы быстровращающегося ротора и упругого лепестка, например) находится путем решения уравнения Рейнольдса, в ламинарной изотермической постановке имеющего вид

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\bar{p} \bar{H}_{\theta}^3 \frac{\partial \bar{p}}{\partial \theta} \right) + \frac{r^2}{L^2} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(\bar{p} \bar{H}_{\theta}^3 \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{z}} \right) = \Lambda \frac{\partial (\bar{p} \bar{H}_{\theta})}{\partial \theta} + \Lambda \frac{\partial (\bar{p} \bar{H}_{\theta})}{\partial \bar{t}}. \quad (25)$$

Здесь θ — угловая координата; $\bar{z} = z / L$ — безразмерная координата вдоль оси ротора; L — длина подшипника; $\bar{p}(\theta, z) = p(\theta, z) / p_0$ — текущее безразмерное давление газового слоя; $\bar{H}_{\theta} = H(\theta, z) / H_0$ — текущее значение безразмерной высоты зазора между цапфой ротора и лепестком; Λ — параметр сжимаемости (критерий Гаррисона),

$$\Lambda = \frac{6\mu\omega}{p_0^2} \cdot \left(\frac{r}{H_0} \right)^2, \quad (26)$$

где μ — динамическая вязкость рабочего тела; ω — угловая частота вращения ротора; r — радиус цапфы ротора; p_0 — давление среды, окружающей подшипник; H_0 — средняя толщина радиального зазора между лепестком и ротором; $\bar{t} = t\omega / 2$ — безразмерное время модели.

В стационарном случае для подшипника бесконечной длины уравнение (25) сильно упрощается:

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\bar{p} \bar{H}_0^3 \frac{\partial \bar{p}}{\partial \theta} \right) = \Lambda \frac{\partial (\bar{p} \bar{H}_0)}{\partial \theta}. \quad (27)$$

Интегрированием перейдем к обыкновенному дифференциальному уравнению первого порядка:

$$\frac{d\bar{p}}{d\theta} = \frac{\Lambda}{\bar{H}_0^2} \left(1 - \frac{C}{\bar{p} \bar{H}_0} \right), \quad C = \text{const}. \quad (28)$$

С точки зрения топологии важно отметить, что толщина зазора — величина существенно положительная, поскольку область течения газа обязана быть линейно связной. На практике это обеспечивается шероховатостью H_r лепестков и цапфы ротора. Но величина \bar{H}_0 может быть ограничена снизу лишь величиной H_r / H_0 , что делает дифференциальную задачу с уравнением (28) жесткой. В исследовании [11] для улучшения сходимости расчета предлагается замена $\psi := \bar{p} \bar{H}_0$. В настоящей работе будет избран иной путь: рассмотрим замену более общего вида $f(\theta) = \bar{p}(\theta) \bar{H}_0^\alpha(\theta)$. Подставив ее в уравнение (28), получим

$$\frac{1}{2} \frac{df^2}{d\theta} = \frac{\alpha}{\bar{H}_0} \frac{d\bar{H}_0}{d\theta} f^2 + \Lambda \bar{H}_0^{\alpha-2} f - \Lambda C \bar{H}_0^{2\alpha-3}. \quad (29)$$

При замене такого вида перспективно использование $\alpha = 2$, поскольку в этом случае правая часть содержит не третью степень малой величины в знаменателе, а лишь ее логарифмическую производную, которая при минимальной (но положительной) толщине смазочного слоя обращается в нуль:

$$\frac{1}{2} \frac{d\phi}{d\theta} = \frac{2}{\bar{H}_0} \frac{d\bar{H}_0}{d\theta} \phi + \Lambda \sqrt{\phi} - \Lambda C \bar{H}_0. \quad (30)$$

Несущая способность. Одной из важнейших характеристик газодинамических подшипников (как и газового смазочного слоя вообще) является несущая способность [12]:

$$F|_{(x,y)} = \int_0^{L/2} \int_0^{2\pi} (p(\theta, z) - p_0) \begin{pmatrix} \cos \theta \\ -\sin \theta \end{pmatrix} r d\theta dz. \quad (31)$$

Ниже под несущей способностью будем понимать вертикальную компоненту силы реакции газового слоя на отрезке $[-\vartheta_{\max}, \vartheta_{\max}]$, действующей на внутренний цилиндр (рис. 1):

$$F = \frac{1}{2\vartheta} \int_{-\vartheta}^{\vartheta} [\bar{p}(\zeta) - 1] \cos(\zeta) d\zeta. \quad (32)$$

Рассматривается зазор между двумя касающимися изнутри цилиндрическими поверхностями радиусами $r = 2,5$ см и $R = 3$ см (ротор и лепесток), приняв абсолютную шероховатость $H_r = 5$ мкм. Угол $\vartheta := \theta - 0,5\theta_{\max}$ отсчитывается из центра внутреннего цилиндра (ротора) от точки касания (см. рис. 1).

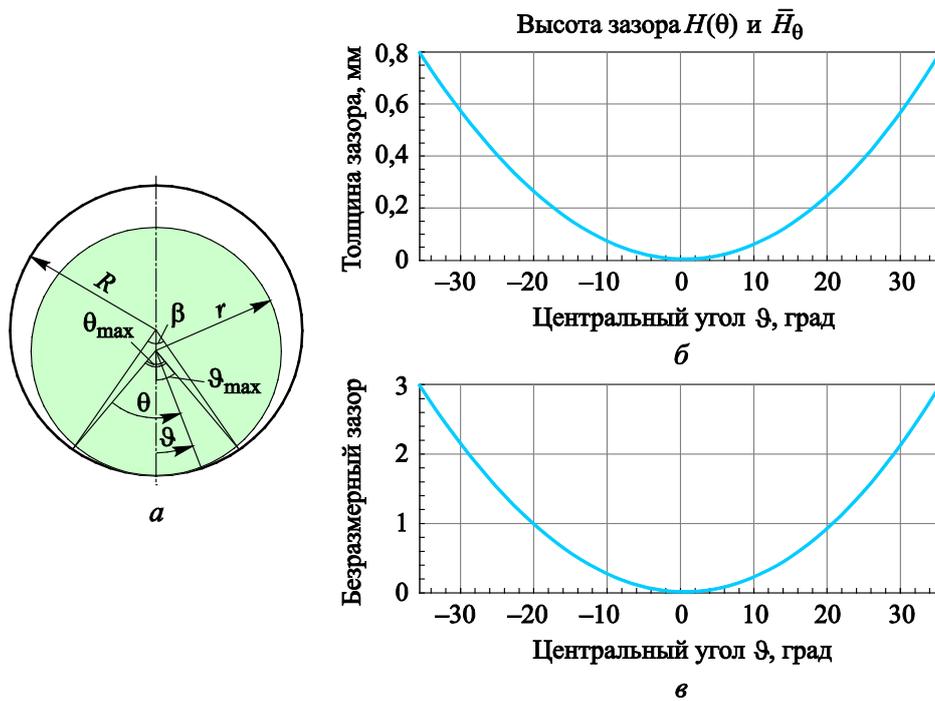


Рис. 1. Геометрия (а) для расчета несущей способности газового слоя при $\min H(\theta) = H_r = 5$ мкм (б) и $\min \bar{H} = 0,0185$ (в)

Разложим решение дифференциального уравнения (28) в ряд по критерию Гэрисона при фиксированной угловой координате ϑ :

$$\bar{p}(\vartheta, \Lambda) = \bar{p}(\vartheta, 0) + \Lambda \left. \frac{\partial \bar{p}(\vartheta, \Lambda)}{\partial \Lambda} \right|_{\Lambda=0} + \frac{\Lambda^2}{2} \left. \frac{\partial^2 \bar{p}(\vartheta, \Lambda)}{\partial \Lambda^2} \right|_{\Lambda=0} + o(\Lambda^2). \quad (33)$$

Разложение происходит в окрестности точки $\Lambda_0 = 0$, чему соответствует решение $\bar{p}(\vartheta, 0) \equiv 1$. Введем функции угла $p_1(\vartheta)$ и $p_2(\vartheta)$ для обозначения соответствующих частных производных:

$$p_1(\vartheta) := \left. \frac{\partial \bar{p}(\vartheta, \Lambda)}{\partial \Lambda} \right|_{\Lambda=0}, \quad p_2(\vartheta) := \left. \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \bar{p}(\vartheta, \Lambda)}{\partial \Lambda^2} \right|_{\Lambda=0}. \quad (34)$$

При интегрировании по рассматриваемому отрезку $[-\vartheta_{\max}, \vartheta_{\max}]$ с множителем $\cos \vartheta$ (32) они дадут постоянные величины \mathcal{F}_1 и \mathcal{F}_2 соответственно:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\Lambda) &= \frac{1}{2\vartheta} \int_{-\vartheta}^{\vartheta} (\bar{p}(\zeta, \Lambda) - 1) \cdot \cos \zeta \cdot d\zeta = \\ &= \frac{1}{2\vartheta} \int_{-\vartheta}^{\vartheta} \left(1 + \Lambda p_1(\zeta) + \Lambda^2 p_2(\zeta) + o(\Lambda^2) - 1 \right) \cdot \cos \zeta \cdot d\zeta = \\ &= \Lambda \mathcal{F}_1 + \Lambda^2 \mathcal{F}_2 + o(\Lambda^2) = \Lambda \mathcal{F}_1 + o(\Lambda). \end{aligned} \quad (35)$$

Таким образом, при малых значениях критерия Гаррисона несущая способность должна быть его линейной функцией.

Аэродинамические потери. Влияние давления на аэродинамические потери в смазочном слое будем вычислять в двух характерных случаях.

1. Сначала рассмотрим *ламинарное течение Куэтта* между двумя коаксиальными цилиндрами, из которых внутренний (радиусом r) вращается с угловой скоростью ω , а внешний (радиусом $r + \delta$) покоится. Коэффициент момента сопротивления внутреннего цилиндра определяется по формуле

$$C_M = \frac{M}{\frac{\pi}{2} \rho u^2 r^2 L}, \quad (36)$$

где M — момент сопротивления вращению внутреннего цилиндра; $u = \omega r$ — его окружная скорость; L — длина цилиндров; ρ — плотность газа.

При значениях числа Тэйлора $Ta < 41,3$ такое течение устойчиво, и в линейной теории дается для коэффициента сопротивления выражение

$$C_M = \frac{4}{Re} = \frac{4\nu}{u\delta}. \quad (37)$$

Используя (36) и (37), выразим мощность аэродинамических потерь:

$$N_{fr} = M\omega = \frac{2\pi\mu\omega^2 r^3 L}{\delta}. \quad (38)$$

Таким образом, для выяснения величины вклада высокого давления в потери на газодинамическое трение в этом случае достаточно исследовать динамическую вязкость μ как единственное свойство газа, входящее в формулу (38).

2. Рассмотрим также турбулентный пограничный слой на «свободном» (в неограниченном газе) диске. Для обусловленного трением момента сопротивления диска Карманом была получена формула

$$2M = 0,073\rho\omega^2 r^5 \left(\frac{v}{\omega r^2} \right)^{0,2}, \quad (39)$$

где v — кинематическая вязкость.

Выражение (39), которое согласуется с результатами, приведенными в статье [26], позволяет записать потери на газодинамическое трение двух сторон диска:

$$N_{fr} = 0,0365\rho\omega^3 r^5 \left(\frac{v}{\omega r^2} \right)^{0,2}. \quad (40)$$

В формулу (40) входят лишь два свойства газа: плотность и вязкость, и для исследования влияния состава смеси на аэродинамические потери вращающегося диска достаточно вычислять произведение $\rho v^{0,2}$.

К вычислению распределения давления. Численное решение дифференциальных уравнений (28) и (30) возможно лишь после определения двух граничных условий. Будем полагать, что отрезок $\vartheta \in [-\vartheta_{\max}, \vartheta_{\max}]$ (или $\theta \in [0, \theta_{\max}]$) соответствует рабочей поверхности одного из лепестков ЛГП. Тогда давление на концах отрезка совпадает с давлением окружающей среды, и решения дифференциальных уравнений должны удовлетворять периодическим граничным условиям (условиям Зоммерфельда):

$$\bar{p}(0) = \bar{p}(\theta_{\max}) = 1, \quad \phi(0) = \phi(\theta_{\max}) = \bar{H}_{\theta}^4(0), \quad (41)$$

с помощью которых и будем находить значение постоянной C . Из постановки краевой задачи для уравнения (28) очевидно, что константа C не может быть отрицательной: в противном случае производная всегда положительна, давление растет вдоль расчетной области, периодическим граничным условиям удовлетворить невозможно. Поэтому оценка снизу равна нулю. Теперь следует заметить, что на участке $0 < \theta < 0,5\theta_{\max}$ должен реализовываться положительный избыток давления. Значит,

$$\left. \frac{d\bar{p}}{d\theta} \right|_{\theta=0} > 0 \Rightarrow C < \bar{p}(0) \bar{H}_\theta(0) = \bar{H}_\theta(0),$$

т. е. оценка сверху равна $\bar{H}_\theta(0)$.

Таким образом, значение C нужно искать на отрезке $[C_{\min}, C_{\max}]$, где $C_{\min}^{(0)} = 0$, $C_{\max}^{(0)} = \bar{H}_\theta(0)$. Поиск можно организовать, например, методом дихотомии: если на шаге n при $C^{(n)} = 0,5(C_{\min}^{(n)} + C_{\max}^{(n)})$ решение непродолжаемо на весь отрезок $[0, \theta_{\max}]$ или выполняется неравенство $\phi(\theta_{\max}) < \bar{H}_\theta^4(\theta_{\max})$, уменьшаем верхнюю границу отрезка: $C_{\max}^{(n+1)} = C^{(n)}$. В противном случае, увеличиваем нижнюю границу: $C_{\min}^{(n+1)} = C^{(n)}$. По достижении требуемой точности $|\phi(\theta_{\max}) - \phi(0)| < \varepsilon$ прекращаем итерации. Промежуточное распределение давления и результат расчета при таком способе подбора приведены на рис. 2.

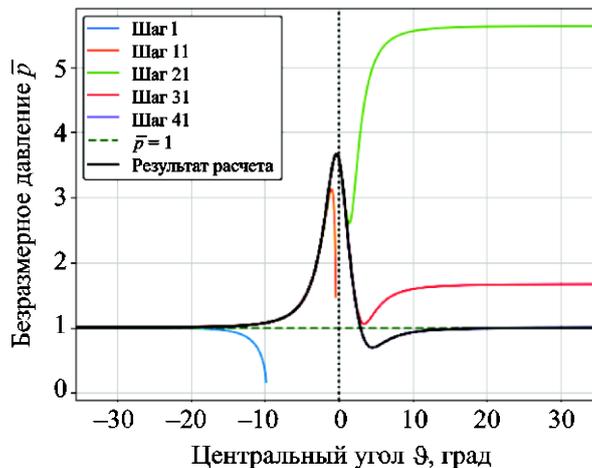


Рис. 2. Промежуточные итерации при подборе постоянной C при $\Lambda = 0,08$; $\min \bar{H}_\theta = 0,0110$; $C = 0,04118712$

Распределение давления, полученное на промежуточных расчетах, приведено на рис. 3. Использовались разные численные методы: краевая задача (28) решалась методом Радо ПА (т. е. неявным методом Рунге — Кутты 5-го порядка) [28–30] и с помощью формул дифференцирования назад (ФДН), а задача (30) — явным методом Рунге — Кутты 4-го порядка. Сравнение графиков, представленных на рис. 3, свидетельствует о том, что описанный алгоритм решения краевой задачи (30) допускает использование явных методов. Это позволяет сократить

время расчета, а также существенно важно при совместном решении с задачей определения формы лепестков, где некоторые способы основаны на вариационных принципах и требуются значительные вычислительные затраты.

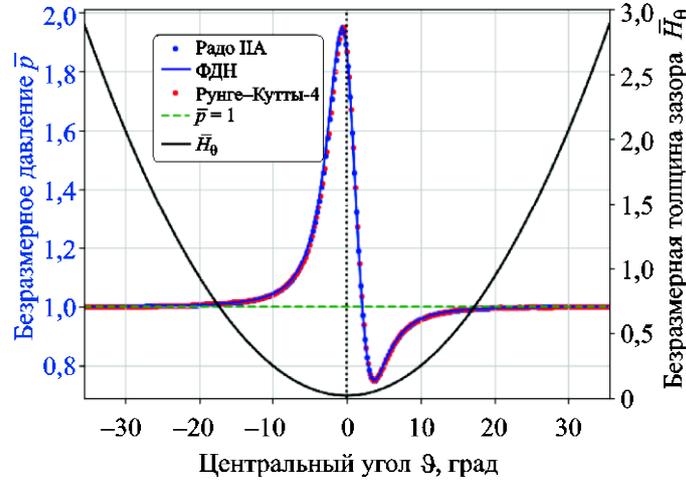


Рис. 3. Распределение давления, вычисленное разными методами при $\Lambda = 0,05$; $\min \bar{H}_\theta = 0,0185$

Обсуждение результатов. Для сравнения рассчитанные значения динамической вязкости бинарных смесей инертных газов и зависимости из работы [24] представлены на рис. 4. Совпадение результатов свидетельствует о корректной реализации математической модели.

Эффект увеличения динамической вязкости, обусловленный влиянием давления, более наглядно изображен на рис. 5.

Следует отметить, что при температуре 1200К данный эффект практически не наблюдается: при вычислении динамической вязкости можно ограничиться теорией Чепмена — Энскога. Однако при относительно низкой температуре (400К) и высоком давлении (7 МПа) вклад дополнительной вязкости в выражении (21) весьма существен (до 14 %), и его нужно учитывать.

Увеличение динамической вязкости из-за высокого давления наиболее выражено у ксенона (как у самого тяжелого из инертных газов), что позволяет выполнить оценку сверх обусловленной давлением поправки к динамической вязкости для всех инертных газов, рассчитав таковые для ксенона в интервале температур 400...1200К, давления 1...7 МПа:

$$\Delta\mu_{Xe} := \frac{(\mu_{Xe}(T, p) - \mu_{Xe}^0(T))}{\mu_{Xe}^0(T)} \cdot 100\%. \quad (42)$$

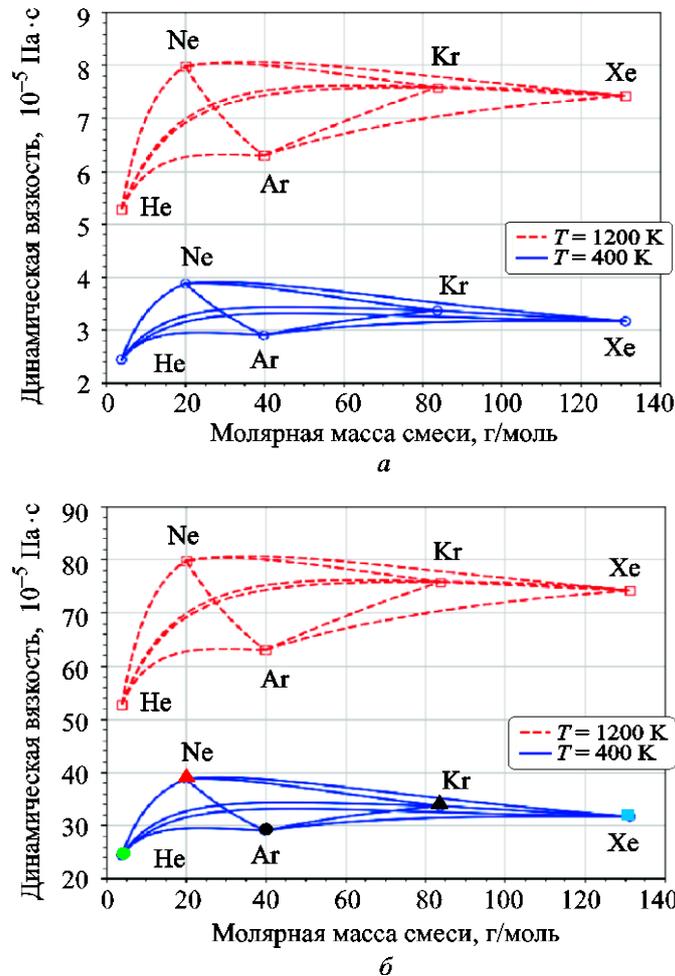


Рис. 4. Динамическая вязкость бинарных смесей инертных газов при давлении 2 МПа, температуре 400К и 1200К:
 а — расчет, б — график из работы [24]

Результаты расчетов изображены в виде кривых на рис. 6.

Проведенный анализ позволяет судить о величине вклада поправки к динамической вязкости при разных давлении и температуре. В частности, ею можно пренебрегать при давлении ниже 3 МПа для всех значений температуры, а при температуре выше 650К — для всех значений давления из указанного диапазона.

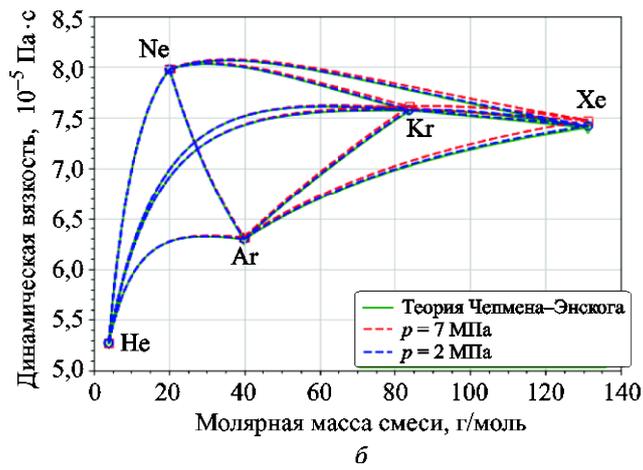
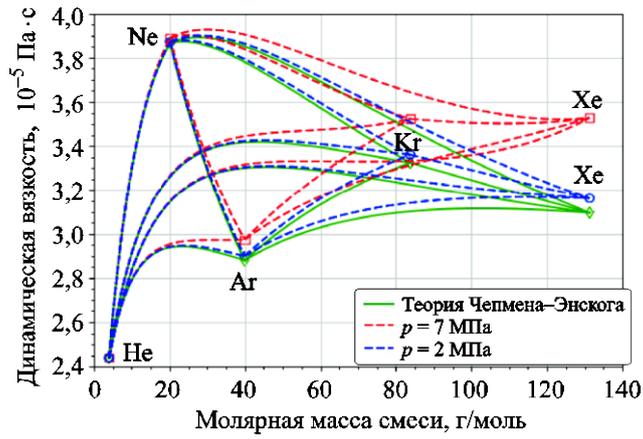


Рис. 5. Динамическая вязкость бинарных смесей инертных газов при разном давлении и температуре $T = 400\text{K}$ (а), $T = 1200\text{K}$ (б)

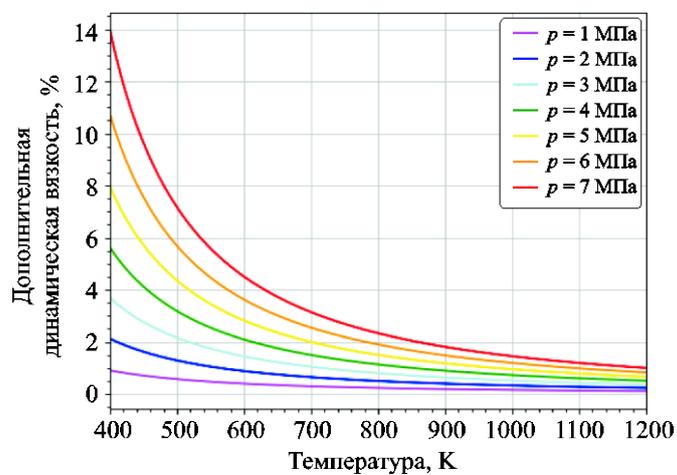


Рис. 6. Поправка к динамической вязкости ксенона при разных давлении и температуре

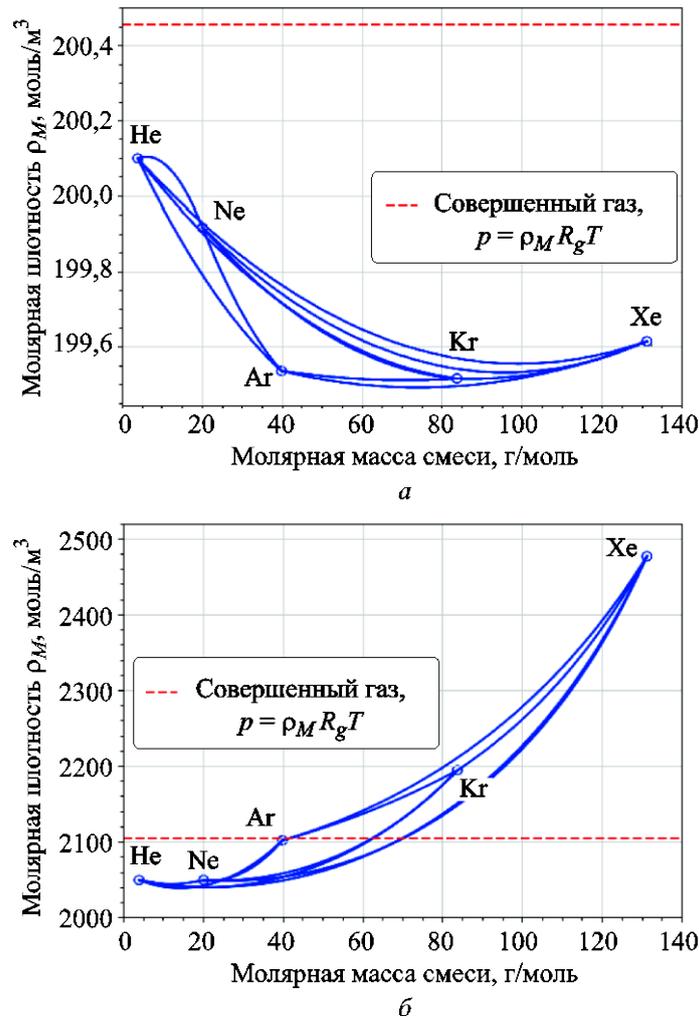


Рис. 7. Молярная плотность бинарных смесей инертных газов:
 а — $T = 1200\text{K}$, $p = 2\text{ MPa}$; б — $T = 400\text{K}$, $p = 7\text{ MPa}$

Значения молярной *плотности* бинарных смесей инертных газов, найденные из решения уравнения (11), представлены на рис. 7. Зависимость молярной плотности от состава смеси при температуре 1200К и давлении 2 МПа имеет весьма оригинальный вид, однако отклонение от значения молярной плотности совершенного газа при тех же параметрах крайне мало. При температуре 400К и давлении 7 МПа отклонение максимально для ксенона — составляет 17,8 %.

Для полноты картины приведем здесь зависимости коэффициента сжимаемости Z от состава бинарной смеси при тех же значениях температуры и давления (рис. 8). Приведенные зависимости еще раз подтверждают, что отклонение газа от уравнения состояния Менделеева — Клапейрона проявляется тем сильнее, чем ниже температура, выше давление и тяжелее газ.

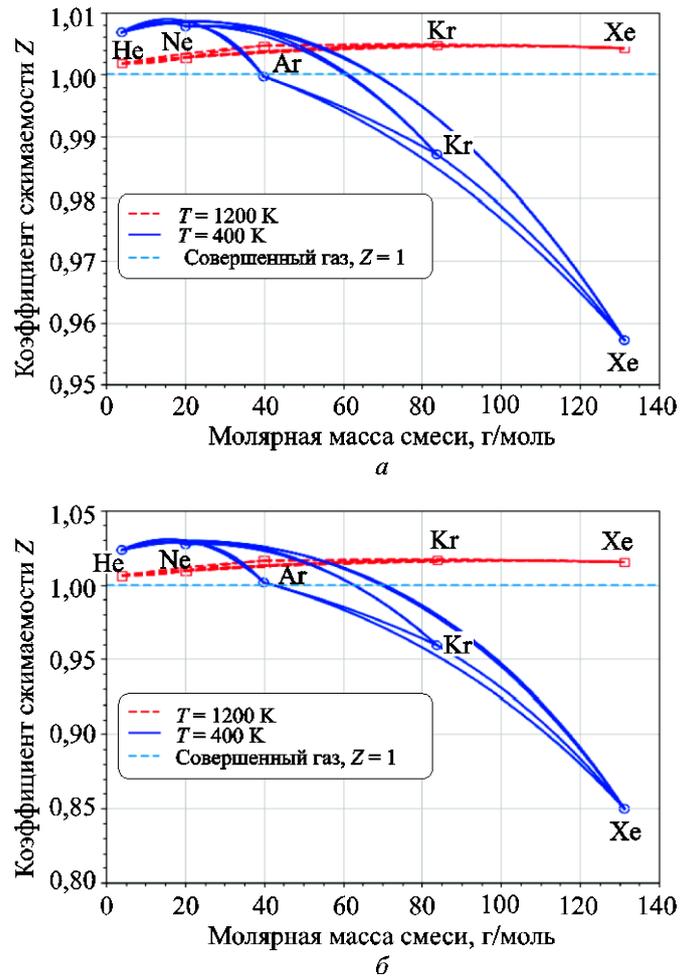


Рис. 8. Коэффициент сжимаемости бинарных смесей инертных газов при температуре 400К, 1200К и давлении 2 МПа (а), 7 МПа (б)

Рассмотрим два случая влияния на безразмерную несущую способность (32).

1. *Вязкость не меняется в области течения.* Распределение давления, графически представленное на рис. 2 и 3, указывает на то, что его значительное возрастание происходит в достаточно узкой области, поэтому можно пренебречь изменением вязкости вдоль области течения и считать ее постоянной.

Результаты численного интегрирования уравнения Рейнольдса представлены на рис. 9. Для критериев Гаррисона от 0,01 до 0,35 были вычислены распределение давления и безразмерная несущая способность. Полученные графики подтверждают введенную выше из математических соображений гипотезу (35) о линейной зависимости безразмерной несущей способности газового слоя от критерия Гаррисона при малых

значениях последнего ($\mathcal{F} \propto \Lambda$). Следовательно, $\mathcal{F} \propto \mu$, что позволяет судить о влиянии высокого давления на несущую способность слоя исключительно по графику, приведенному на рис. 6, — вычисленные в процентах поправки к безразмерной несущей способности и к вязкости совпадают.

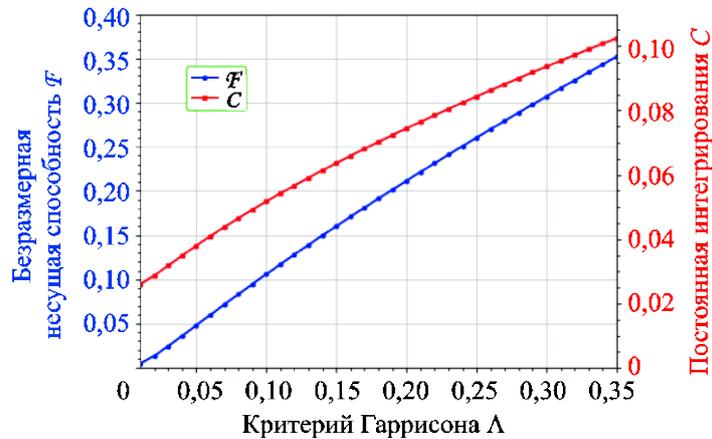


Рис. 9. Зависимость безразмерной несущей способности \mathcal{F} от критерия Гаррисона Λ при $\bar{H}_0 = 0,0185$

2. Вязкость меняется в области течения. Выполним грубую оценку этого эффекта, ограничившись численным решением уравнения (30), полагая в каждой точке $\mu = \bar{\mu}(T, p) \Rightarrow \Lambda = \Lambda(p)$. Для минимизации вклада в несущую способность погрешности, связанной с накоплением ошибок в ячейках интегрирования, расчетная область была изменена с целью получения более высоких пиков давления. Параметры, соответствующие расчетам при давлении 1 МПа и 7 МПа (см. рис. 1), указаны в табл. 6.

Таблица 6

Параметры геометрии для расчета

p , МПа	r , см	R , см	H_r , мкм	$\min \bar{H}_0$
1	22	23	5	0,0105
7	220	225	50	0,0212

Полученное распределение давления и соответствующая безразмерная несущая способность представлены на рис. 10. Результаты расчетов позволяют утверждать, что для внешнего давления до 1 МПа изменение вязкости в расчетной области можно не учитывать. При внешнем давлении 7 МПа вклад неидеальности газа существенен, и для его точной количественной оценки требуются дополнительные исследования посредством численного интегрирования уравнений пограничного слоя.

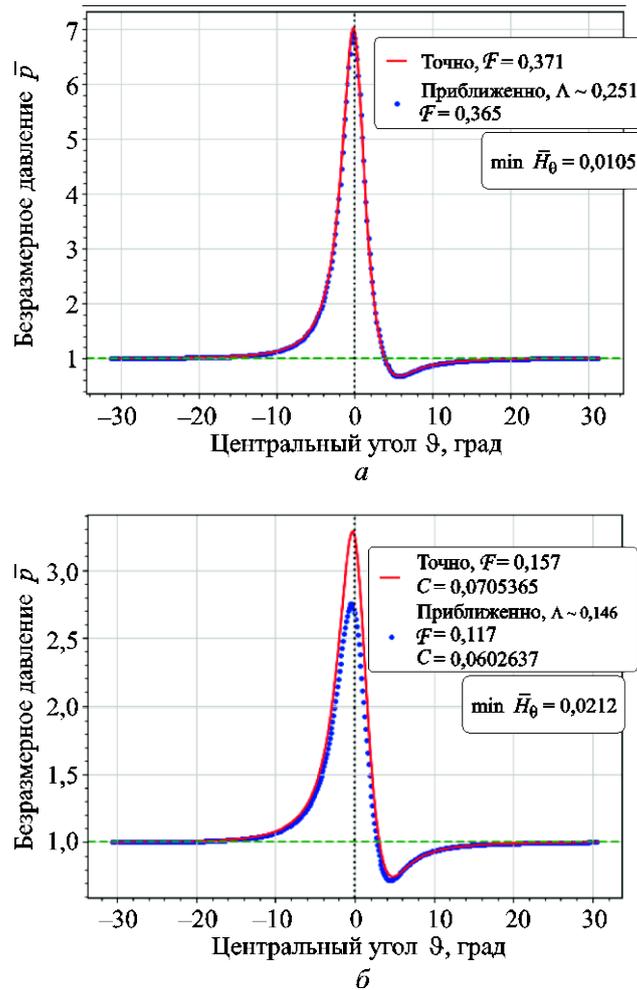


Рис. 10. Распределение давления, вычисленное с учетом изменения вязкости (точно) и без учета его (приблизленно) при $p_0 = 1$ МПа (а) и $p_0 = 7$ МПа (б)

Рассмотрим два случая влияния на *аэродинамические потери*.

1. *Ламинарное течение Куэтта между двумя цилиндрами*. В соответствии с формулой (38), поправка (в процентах) к аэродинамическим потерям совпадает с поправкой к вязкости и может быть определена по графикам, приведенным на рис. 6.

2. *Турбулентный пограничный слой на свободном диске*. Зависимости аэродинамических потерь от молярных масс смесей при разных температуре и давлении представлены на рис. 11. Для удобства восприятия каждая зависимость нормирована на результат для чистого гелия при тех же значениях температуры и давления.

Из полученных закономерностей вытекает, что при фиксированных температуре и давлении потери на газодинамическое трение всегда можно считать однозначной функцией молярной массы смеси.

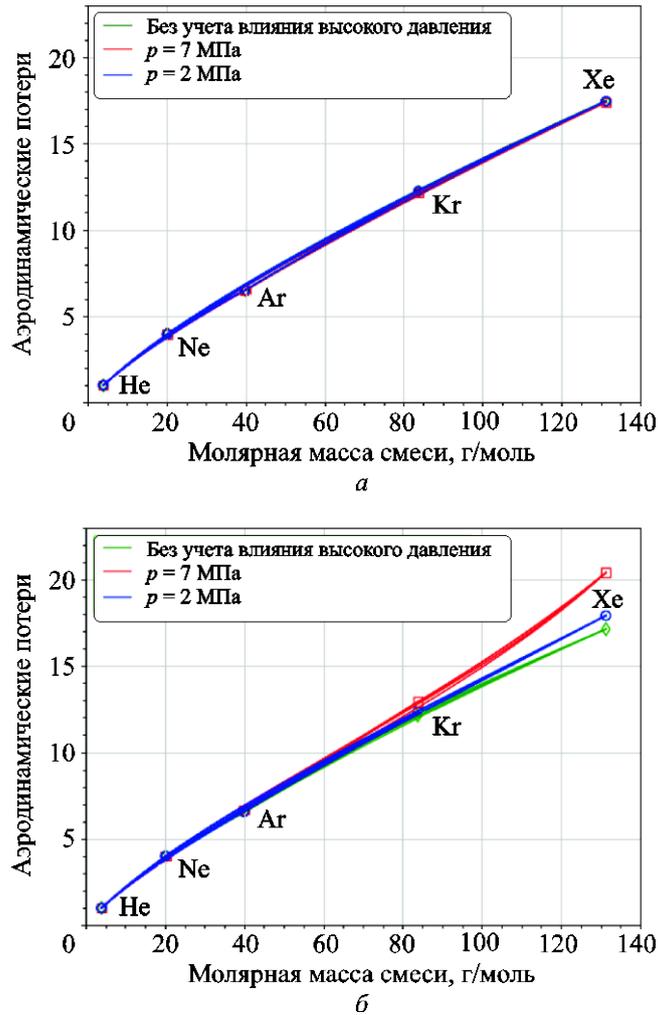


Рис. 11. Аэродинамические потери в несущем смазочном слое для бинарных смесей инертных газов при давлении 2 МПа и 7 МПа, температуре 1200К (а) и 400К (б)

Более того, давление ниже 2 МПа никак не влияет на потери в несущем слое. Результаты более аккуратно проанализированного влияния давления представлены на рис. 12 в виде отклонения ΔN_{fr} (в процентах) точных результатов:

$$\Delta N_{fr} = \frac{N_{fr} - N_{fr}^{(0)}}{N_{fr}^{(0)}} \cdot 100 \%, \quad (43)$$

где $N_{fr}^{(0)}$ — потери на газодинамическое трение, вычисленные по методике (40) для совершенного газа в кинетической теории Чепмена —

Энскога. Согласно зависимостям, при давлении ниже 2 МПа ошибка составляет не более 4 %.

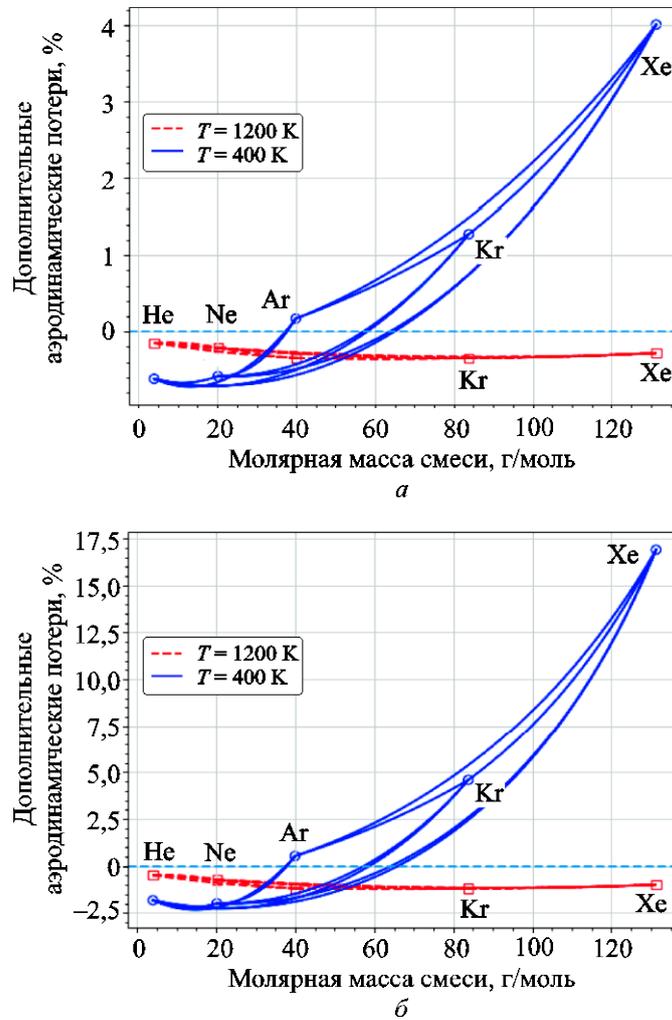


Рис. 12. Добавка к аэродинамическим потерям при учете влияния высокого давления:
 а — $p = 2\text{ МПа}$; б — $p = 7\text{ МПа}$

Сильнее всего неидеальность проявляется у ксенона. Дополнительные аэродинамические потери ксенона при температуре от 400К до 1200К и давлении от 1 МПа до 7 МПа изображены на рис. 13. Полученные результаты свидетельствуют о том, что дополнительными эффектами, вызванными высоким давлением, можно пренебрегать при температуре выше 550К для любых значений давления из рассмотренного диапазона и при давлении меньше 2 МПа для любой температуры.

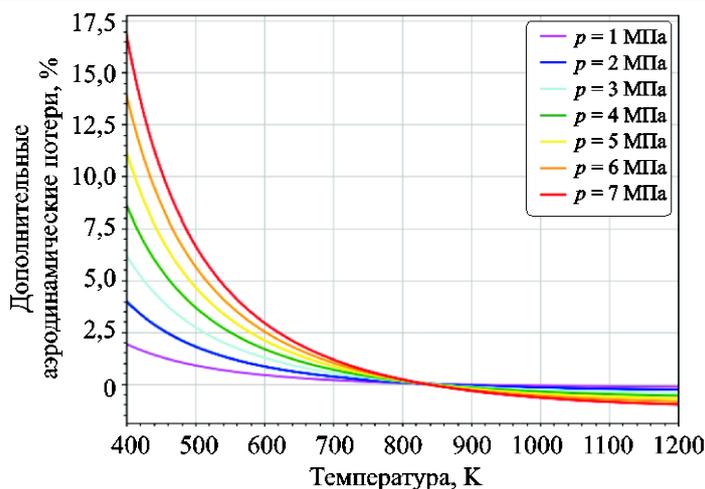


Рис. 13. Дополнительные аэродинамические потери для ксенона при разных температуре и давлении

Отметим, что рабочим телом в лепестковых газодинамических подшипниках в общем случае служат не только инертные газы. В частности, в качестве опор для турбомашин стационарных и транспортных систем кондиционирования воздуха (например, в самолете Ту-204/214), турбодетандеров и электрокомпрессоров холодильных циклов [31, 32] используются ЛПП на воздушной смазке. Для проведения аналогичного исследования влияния давления на аэродинамические потери и несущую способность смазочного слоя для произвольной газовой смеси нужно применять соответствующую математическую модель по расчету ее вязкости и плотности, где влияние давления учитывается с помощью эмпирических закономерностей.

Заключение. Разработана методика оценки влияния давления на несущую способность и аэродинамические потери газового смазочного слоя. Приведены результаты соответствующих вычислений для бинарных смесей инертных газов. Получены оценки вышеупомянутых эффектов в диапазоне температуры 400...1200К, давления 1...7 МПа. Результаты исследования могут быть использованы при численном моделировании задач газовой смазки: в частности, при решении сопряженной задачи расчета давления в смазочном слое лепесткового газодинамического подшипника и определения деформаций его лепестков.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Лейбензон Л.С., ред. *Гидродинамическая теория смазки*. Москва, Гостехиздат, 1934.
- [2] Лойцянский Л.Г. *Механика жидкости и газа*. Москва, Наука, 1970.
- [3] Шлихтинг Г. *Теория пограничного слоя*. Москва, Наука, 1974.
- [4] Gross W.A. *Gas film lubrication*. New York — London, Wiley, 1962.
- [5] Constantinescu V.N. *Gas lubrication*. New York, American Society of Mechanical Engineers, 1969.

- [6] Турчак Л.И., Шидловский В.П. Теоретическое и численное исследование процессов газовой смазки на основе уравнений аэрогидродинамики. *Известия РАН. Механика жидкости и газа*, 2001, № 5, с. 24–34.
- [7] Турчак Л.И., Шидловский В.П. Пространственная задача теории газовой смазки и ее решение с помощью метода сращиваемых асимптотических разложений. *Журнал вычислительной и математической физики*, 2002, т. 42, № 12, с. 1875–1880.
- [8] Турчак Л.И., Шидловский В.П. Математическое моделирование проблем газовой смазки. *Журнал вычислительной и математической физики*, 2011, т. 51, № 2, с. 329–348.
- [9] Звонарев П.Н. *Разработка метода расчета радиальных упругогазодинамических подшипников с предварительно напряженными лепестками для малых турбомашин низкотемпературных установок: Дис. ... канд. техн. наук*. Москва, 2005.
- [10] Сыгин А.В. *Решение комплексной задачи расчета характеристик радиальных лепестковых газодинамических подшипников: Дис. ... канд. техн. наук*. Орел, 2008.
- [11] Bonello P., Pham H. The efficient computation of the nonlinear dynamic response of a foil air bearing rotor system. *J. Sound Vib.*, 2014, vol. 333, pp. 3459–3478. DOI: 10.1016/j.jsv.2014.03.001
- [12] Николаев В.С., Тищенко И.В. Математическое моделирование динамики ротора турбомшины на лепестковых газодинамических подшипниках при воздействии вибрации. *Холодильная техника*, 2022, т. 111, № 3, с. 165–179. DOI: 10.17816/RF111753
- [13] Le Lez S., Arghir M., Frene J. Nonlinear numerical prediction of gas foil bearing stability and unbalance response. *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, 2009, vol. 131, no. 1.
- [14] Kim D. Parametric studies on static and dynamic performance of air foil bearings with different top foil geometries and bump stiffness distributions. *Journal of Tribology*, 2007, vol. 129, no. 2, pp. 354–364. DOI: 10.1115/1.2540065
- [15] Пешти Ю.В. *Газовая смазка*. Москва, МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1993.
- [16] Коротеев А.С., Готовцев К.В., Захаренков Л.Э., Каревский А.В., Ловцов А.С., Ошев Ю.А. [и др.]. Совместное функционирование электроракетных двигателей и системы газотурбинного преобразования энергии в составе энергодвигательной установки космического назначения. *Известия РАН. Энергетика*, 2020, № 1, с. 3–20.
- [17] Акимов В.Н., Захаренков Л.Э., Каревский А.В., Кувшинова Е.Ю., Семенкин А.В., Солодухин А.Е. Особенности построения и возможные применения мощных ядерных энергодвигательных установок перспективных космических аппаратов. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2019, вып. 6. DOI: 10.18698/2308-6033-2019-6-1889
- [18] Акимов В.Н., Коротеев А.А., Коротеев А.С. Ядерная космическая энергетика: вчера, сегодня, завтра. *Известия РАН. Энергетика*, 2012, № 1, с. 3–11.
- [19] Коротеев А.С., Ошев Ю.А., Попов С.А., Каревский А.В., Солодухин А.Е., Захаренков Л.Э., Семенкин А.В. Ядерная энергодвигательная установка космического аппарата. *Известия РАН. Энергетика*, 2015, № 5, с. 45–59.
- [20] Андрианов Д.И., Захаренков Л.Э., Каревский А.В., Попов А.В., Попов С.А., Семенкин А.В. [и др.]. Мощные энергодвигательные установки космического назначения с газотурбинным преобразованием энергии по замкнутому циклу Брайтона и особенности их экспериментальной отработки. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2016, вып. 7 (55). DOI: 10.18698/2308-6033-2016-7-1518

- [21] Егоров К.С., Степанова Л.В. Теплофизические свойства смесей благородных газов с низкими числами Прандтля. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2019, вып. 3. DOI: 10.18698/2308-6033-2019-3-1858
- [22] Tournier J.M., El-Genk M.S., Gallo B.M. *Best estimates of binary gas mixtures properties for closed Brayton Cycle space application*. AIAA-2006-4154.
- [23] Tournier J.P., Mohamed S.E. Properties of noble gases and binary mixtures for closed Brayton Cycle application. *Energy Conversion and Management*, 2008, vol. 49, pp. 469–492.
- [24] El-Genk M.S., Tournier J.M. *Selection of noble gas binary mixtures for Brayton space nuclear power systems*. AIAA-2006-59986.
- [25] Дорфман Л.А. *Гидродинамическое сопротивление и теплоотдача вращающихся тел*. Москва, Гос. изд-во физ.-мат. лит-ры, 1960.
- [26] Афанасьев А.А., Ковалев А.В. К определению момента сил трения диска, вращающегося в ограниченном пространстве, заполненном вязкой несжимаемой жидкостью. *Вестник ВГУ. Серия: физика, математика*, 2014, № 4, с. 94–101.
- [27] Hirschfelder J.O., Curtiss C.F., Bird R.B. *Molecular theory of gases and liquids*. New York, John Wiley & Sons Inc., London, Chapman and Hall, 1954.
- [28] Хайрер Э., Ваннер Г. *Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Жесткие и дифференциально-алгебраические задачи*. Москва, Мир, 1999.
- [29] Hairer E., Wanner G. *Radau Methods*. Springer Berlin Heidelberg, 2015, pp. 1213–1216. DOI: 10.1007/978-3-540-70529-1_139
- [30] Hairer E., Wanner G. Stiff differential equations solved by Radau methods. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 1999, vol. 111, pp. 93–111. DOI: 10.1016/S0377-0427(99)00134-X.
- [31] Поликарпов А.В., Викулов А.П., Зотов С.Н., Костенко А.А., Гальперин И.И., Лабутин А.Д. Безмасляный центробежный электрокомпрессор на лепестковых газодинамических подшипниках. *Холодильная техника*, 2020, т. 109, № 2, с. 36–44. DOI: 10.17816/RF104085
- [32] Щедухин С.И., Поликарпов А.В., Викулов А.П., Зотов С.Н., Розеноер Т.М., Костенко А.А., Воронов В.А. Безмасляный турбодетандер природного газа на лепестковых газодинамических подшипниках. *Холодильная техника*, 2017, т. 106, № 6, с. 46–50. DOI: 10.17816/RF99254.

Статья поступила в редакцию 22.05.2025

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Веренин М.А. Влияние давления на аэродинамические потери и несущую способность смазочного слоя для различных инертных газов. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2025, вып. 7. EDN ACUZO

Веренин Максим Алексеевич — инженер АО ГНЦ «Центр Келдыша». Область научных интересов: газовая динамика, теплообмен, пограничный слой.
e-mail: Verenin.MA@phystech.edu

Pressure effects on aerodynamic losses and load capacity of the lubrication layer for various noble gases

© M.A. Verenin^{1,2}

¹Keldysh Research Center, Moscow, 125438, Russian Federation

²Moscow Institute of Physics and Technology, Dolgoprudny, 141701, Russian Federation

Gas lubrication is widely used in industry; therefore, its mathematical simulation becomes an urgent research problem. Computing a gas flow requires correct determination of its thermophysical properties, which inevitably raises a question of the macroscopic parameters influence on them, including the pressure and temperature. In particular, results of numerous experiments demonstrate that the increasing pressure causes diversity in the viscosity values from the Chapman-Enskog theory forecasts. The presented study proposes the existing methodology for accounting for the high-pressure effect on properties of the inert gases binary mixtures to be applied to computation of the most important characteristics of the gas lubricating layer, including the aerodynamic losses and the bearing capacity. The paper provides quantitative assessment of the indicated effects in the temperature range of 400...1200K and pressure of 1...7 MPa. The considered method could be applied in compiling and optimizing the program codes to solve the gas lubrication problems.

Keywords: noble gas mixture, gas lubrication, load capacity, aerodynamic losses

REFERENCES

- [1] Leibenzon L.S., ed. *Gidrodinamicheskaya teoriya smazki* [Hydrodynamic theory of lubrication]. Moscow, Gostekhizdat Publ., 1934.
- [2] Loitsyansky L.G. *Mekhanika zhidkosti i gaza* [Mechanics of liquid and gas]. Moscow, Nauka Publ., 1970.
- [3] Schlichting H. *Boundary-Layer Theory*. Springer, 1954 [In Russ.: Shlikhting G. *Teoriya pogranychhnogo sloya*. Moscow, Nauka Publ., 1974].
- [4] Gross W.A. *Gas film lubrication*. New York, London, Wiley, 1962.
- [5] Constantinescu V.N. *Gas lubrication*. New York, American Society of Mechanical Engineers, 1969.
- [6] Turchak L.I., Shidlovsky V.P. Teoreticheskoe i chislennoe issledovanie protsessov gazovoy smazki na osnove uravneniy aerogidrodinamiki [Theoretical and numerical study of the gas lubrication processes based on the aerohydrodynamic equations]. *Izvestiya RAN. Mekhanika zhidkosti i gaza — Fluid Dynamics. A Journal of Russian Academy of Sciences*, 2001, no. 5, pp. 24–34.
- [7] Turchak L.I., Shidlovsky V.P. Prostranstvennaya zadacha teorii gazovoy smazki i ee reshenie s pomoshchyu metoda srashchivaemykh asimptomaticheskikh razlozheniy [A three-dimensional problem of gas lubrication theory and its solution by method of matched asymptotic expansions]. *Zhurnal vychislitel'noy i matematicheskoy fiziki — Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2002, vol. 42, no. 12, pp. 1875–1880.
- [8] Turchak L.I., Shidlovsky V.P. Matematicheskoe modelirovanie problem gazovoy smazki [Mathematical modeling of gas lubrication problems]. *Zhurnal vychislitel'noy i matematicheskoy fiziki — Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2011, vol. 51, no. 2, pp. 329–348.

- [9] Zvonarev P.N. *Razrabotka metoda rascheta radialnykh uprugogazodinamicheskikh podshipnikov s predvaritelno napryazhennymi lepestkami dlya malyykh turbomashin nizkotemperaturnykh ustanovok: Dis. ... kand. tekhn. nauk* [Development of a calculation method for the radial elastic-gas-dynamic bearings with the prestressed petals for a small turbomachine of the low-temperature installations: Diss. ... Cand. Sc. (Eng.)]. Moscow, 2005. (in Russ).
- [10] Sytin A.V. *Reshenie kompleksnoy zadachi rascheta kharakteristik radialnykh lepestkovykh gazodinamicheskikh podshipnikov: Dis. ... kand. tekhn. nauk* [Solution to complex problem of calculating characteristics of the radial petal gas-dynamic bearings: Diss. ... Cand. Sc. (Eng.)]. Orel; 2008. (in Russ).
- [11] Bonello P., Pham H. The efficient computation of the nonlinear dynamic response of a foil air bearing rotor system. *J. Sound Vib.*, 2014, vol. 333, pp. 3459–3478. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2014.03.001>
- [12] Nikolaev V.S., Tishchenko I.V. Matematicheskoe modelirovanie dinamiki rotora turbomashiny na lepestkovykh gazodinamicheskikh podshipnikakh pri vozdeystvii vibratsii [Mathematical modeling of the rotor dynamics of a turbomachine on gas foil bearings subjected to vibration]. *Kholodilnaya tekhnika — Refrigeration Technology*, 2022, vol. 111, no. 3, pp. 165–179. DOI: 10.17816/RF111753
- [13] Le Lez S., Arghir M., Frene J. Nonlinear numerical prediction of gas foil bearing stability and unbalance response. *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, 2009, vol. 131 no. 1.
- [14] Kim D. Parametric studies on static and dynamic performance of air foil bearings with different top foil geometries and bump stiffness distributions. *Journal of tribology*, 2007, vol. 129, no. 2, pp. 354–364. <https://doi.org/10.1115/1.2540065>
- [15] Peshti Y.V. *Gazovaya smazka* [Gas lubricant]. Moscow, BMSTU Press, 1993. (in Russ).
- [16] Koroteev A.S., Gotovtsev K.V., Zakharenkov L.E., Karevsky A.V., Lovtsov A.S., Oshev Yu.A. et al. Sovmestnoe funktsionirovanie elektroraketnykh dvigateley i sistemy gazoturbinnogo preobrazovaniya energii v sostave energodvigatelnoy ustanovki kosmicheskogo naznacheniya [Joint operation of electric propulsion and closed Brayton cycle power conversion unit as parts of space power and propulsion system]. *Izvestiya RAN. Energetika — Proceedings of the Russian Academy of Sciences. Power Engineering*, 2020, no. 1, pp. 3–20.
- [17] Akimov V.N., Zakharenkov L.E., Karevsky A.V., Kuvshinova E.Y., Semenkin A.V. Osobnosti postroyeniya i vozmozhnye primeneniya moshchnykh yadernykh energodvigatelnykh ustanovok perspektivnykh kosmicheskikh apparatov [Features of construction and possible use of powerful nuclear power plants of advanced spacecraft]. *Inzhenerny zhurnal: nauka i innovatsii — Engineering Journal: Science and Innovation*, 2019, issue 6. <https://doi.org/10.18698/2308-6033-2019-6-1889>
- [18] Akimov V.N., Koroteev A.A., Koroteev A.S. Yadernaya kosmicheskaya energetika: vchera, segodnya, zavtra [Nuclear space power engineering: yesterday, today, tomorrow]. *Izvestiya RAN. Energetika — Proceedings of the Russian Academy of Sciences. Power Engineering*, 2012, no. 1, pp. 3–11.
- [19] Koroteev A.S., Oshev Yu.A., Popov S.A., Karevsky A.V., Solodukhin A.E., Zakharenkov L.E., Semenkin A.V. Yadernaya energodvigatel'naya ustanovka kosmicheskogo apparata [Nuclear power propulsion system of a spacecraft]. *Izvestiya RAN. Energetika — Proceedings of the Russian Academy of Sciences. Power Engineering*, 2015, no. 5, pp. 45–59.
- [20] Andrianov D.I., Zakharenkov L.E., Karevsky A.V., Popov A.V., Popov S.A., Semenkin A.V., et al. Moshchnye energodvigatel'nye ustanovki kosmicheskogo naznacheniya s gazoturbinnym preobrazovaniem energii po zamknutomu tsiklu

- Braytona i osobennosti ikh eksperimentaknoy otrabotki [Space power propulsion systems with gas turbine power conversion system of closed Brayton cycle of high power and characteristic features of their experimental testing]. *Inzhenerny zhurnal: nauka i innovatsii — Engineering Journal: Science and Innovation*, 2016, iss. 7 (55). <https://doi.org/10.18698/2308-6033-2016-7-1518>
- [21] Egorov K.S., Stepanova L.V. Teplofizicheskie svoystva smesey blagorodnykh gazov s nizkimi chislami Prandlya [Thermophysical properties of noble gas mixtures with low Prandtl number]. *Inzhenerny zhurnal: nauka i innovatsii — Engineering Journal: Science and Innovation*, 2019, iss. 3. <https://doi.org/10.18698/2308-6033-2019-3-1858>
- [22] Tournier J.M., El-Genk M.S., Gallo B.M. *Best Estimates of Binary Gas Mixtures Properties for Closed Brayton Cycle Space Application*. AIAA-2006-4154.
- [23] Tournier J.P., Mohamed S.E. Properties of noble gases and binary mixtures for closed Brayton Cycle application. *Energy Conversion and Management*, 2008, vol. 49, pp. 469–492.
- [24] El-Genk M.S., Tournier J.M. *Selection of noble gas binary mixtures for brayton space nuclear power systems*. AIAA-2006-59986.
- [25] Dorfman L.A. *Gidrodinamicheskoe soprotivlenie i teplotdacha vrashchayushchikhsya tel* [Hydrodynamic resistance and heat transfer of solids of revolution]. Moscow, Fizmatlit Publ., 1960.
- [26] Afanasyev A.A., Kovalev A.V. K opredeleniyu momenta sil treniya diska, vrashchayushchegosya v ogranichenom prostranstve, zapolnennom vyazkoy neshzhimaemoy zhidkostyu [About finding friction torque of a disk rotating in limited space filled with viscous incompressible fluid]. *Vestnik VGU. Seriya: fizika, matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics, Mathematics*, 2014, no. 4.
- [27] Hirschfelder J.O., Curtiss C.F., Bird R.B. *Molecular theory of gases and liquids*. New York, John Wiley & Sons Inc., London, Chapman and Hall, 1954.
- [28] Hairer E., Wanner G. *Solving ordinary differential equations II. Stiff and differential algebraic problems*. Springer, Berlin, 1991 [In Russ.: Khayrer E., Vanner G. Reshenie obyknovennykh differentsialnykh uravneniy. Zhestkie i differentsialno-algebraicheskie zadachi. Moscow, Mir Publ., 1999].
- [29] Hairer E., Wanner G. *Radau Methods*. Springer Berlin Heidelberg, 2015, pp. 1213–1216. https://doi.org/10.1007/978-3-540-70529-1_139
- [30] Hairer E., Wanner G. Stiff differential equations solved by Radau methods. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 1999, vol. 111, pp. 93–111. [https://doi.org/10.1016/S0377-0427\(99\)00134-X](https://doi.org/10.1016/S0377-0427(99)00134-X)
- [31] Polikarpov A.V., Vikulov A.P., Zotov S.N., Kostenko A.A., Galperin I.I., Labutin A.D. Bezmaslyanyi tsentrobezhnyi elektrokompessor na lepestkovykh gazodinamicheskikh podshipnikakh [Oil-free centrifugal electric compressor with foil gas-dynamic bearings]. *Kholodilnaya tekhnika — Refrigeration Technology*, 2020, vol. 109, no. 2, pp. 36–34. <https://doi.org/10.17816/RF104085>
- [32] Schedukhin S.I., Polikarpov A.V., Vikulov A.P., Zotov S.N., Rozenoer T.M., Kostenko A.A., Voronov A.A. Bezmaslyanyi turbodetander prirodnoogo gaza na lepestkovykh gazodinamicheskikh podshipnikakh [Oil-free turbo-expander for natural gas using leaf gas-dynamic bearings]. *Kholodilnaya tekhnika — Refrigeration technology*, 2017, vol. 106, no. 6, pp. 46–50. <https://doi.org/10.17816/RF99254>

Verenin M.A., Engineer, Keldysh Research Center. Research interests: fluid dynamics, heat transfer, boundary-layer. e-mail: Verenin.MA@phystech.edu