

## Численно-аналитическая модель деформирования структурно-неоднородных материалов

© М.Н. Данилов, Т.В. Бурнышева

Новосибирский государственный технический университет,  
Новосибирск, 630073, Российская Федерация

*Представлен процесс совершенствования математического аппарата для описания напряженно-деформированного состояния конструкций из структурно-неоднородных материалов и моделирования процессов их деформирования под нагрузкой. Применен структурно-феноменологический подход к построению моделей деформирования материалов. Предложены определяющие уравнения в виде численно-аналитической модели, устанавливающей зависимость между компонентами тензора макродеформаций и компонентами тензора макронапряжений. Геометрия поверхности раздела компонентов (связующего и включений) описывается посредством структурной модели представительного объема материала, которая может быть построена на основе математического аппарата дифференциальной геометрии. Неоднородное напряженно-деформированное состояние представительного элемента объема материала воспроизводится посредством численного моделирования с применением метода конечных элементов при решении краевой задачи для системы уравнений упругости. При этом граничные условия определяются компонентами тензоров макродеформаций и макронапряжений, характеризующих усредненные по представительному объему величины деформаций и напряжений. Построенная численно-аналитическая модель в явном виде учитывает структурную неоднородность материала, поэтому ее можно именовать структурно-феноменологической моделью.*

**Ключевые слова:** *структурно-неоднородные материалы, бетон, композиционные материалы, определяющие уравнения, структурно-феноменологическая модель, гомогенизация*

**Введение.** Среди множества структурно-неоднородных материалов можно выделить бетон, характеризующийся неоднородностью внутренней структуры, которая обусловлена наличием включений крупного и мелкого заполнителей в связующее из цементного камня, а также трещинами, пустотами, порами и другими структурными особенностями. Учет особенностей внутренней структуры материала при построении моделей деформирования конструкций имеет большое значение. Так, структура материала в окрестности вершины трещины определяет состояние, при котором происходит ее страгивание, и кроме того, влияет на траекторию ее роста. Следовательно, модели, не учитывающие структурную неоднородность материала, часто не позволяют с приемлемой погрешностью предсказывать напряженно-деформированное состояние конструкций из структурно-неоднородных материалов.

При описании напряженно-деформированного состояния структурно-неоднородных сред используются понятия микро-, мезо- и макроуровней. Описание напряженно-деформированного состояния на микро- и мезоуровнях проводится с учетом геометрии структуры в каждом структурном элементе. Под макроуровнем понимается описание состояния среды без учета внутренней геометрии структуры. При этом используются усредненные по некоторой области пространства напряжения и деформации. Для детального описания напряженно-деформированного состояния (с учетом возмущений полей напряжений и деформаций, обусловленных неоднородностями), требуется хранение колоссального количества информации, что на данном этапе развития компьютерных технологий не представляется возможным. Поэтому в расчетах обычно применяются усредненные величины. Именно с использованием этих величин построено большинство существующих математических моделей деформирования материалов — определяющих уравнений, описывающих изменение механических характеристик в процессе деформирования и зависимости между напряжениями и деформациями. Такие модели строятся на основе феноменологических теорий, которые отражают объективные экспериментальные данные без глубокого понимания физической сущности процессов изменения структуры материала при деформировании и часто сохраняют адекватность в узком диапазоне значений параметров, что затрудняет их использование при решении практических задач проектирования конструкций.

Структурно-феноменологический подход [1–6] к построению моделей деформирования материалов с неоднородной внутренней структурой — наиболее современный и перспективный. Учет в математических моделях структурных изменений в материале позволяет получать модели, которые сохраняют адекватность в широком диапазоне значений параметров и обеспечивают более высокую точность, чем другие модели. Поэтому актуальными являются задачи построения структурно-аналитических моделей мезомеханики материалов [2].

Цель настоящей работы — развитие принципов построения математических моделей и подходов к моделированию процессов деформирования структурно-неоднородных сред.

Поставлена задача разработать структурно-феноменологическую модель деформирования структурно-неоднородного материала типа бетона.

**Структурная модель представительного объема структурно-неоднородного материала.** Структурно-феноменологическое моделирование предполагает выделение в массиве материала некоторого минимального представительного объема — структурной ячейки, отображающей основные черты макроскопического поведения материала. Ячейка рассматривается как конструкция, функционирование

которой обеспечивается ее внутренним устройством и условиями сопряжения с окружением. Силовое взаимодействие между элементами описывается с помощью уравнений механики деформируемого твердого тела.

Рассмотрим бесконечную область пространства  $\Omega_\infty = \mathbb{R}^n$ ,  $n = 2, 3$  (рис. 1, а), занятую структурно-неоднородным материалом. Предполагается, что существует такая подобласть  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ,  $n = 2, 3$ , что при условии ее минимального размера механические свойства материала в ней подобны механическим свойствам материала в области  $\Omega_\infty$ . Подобласть  $\Omega$  будем называть представительным объемом материала [7].

Граница  $\Gamma = \partial\Omega$  области  $\Omega$  принимается строго сферической в 3D-случае и круглой — в 2D-случае:

$$\Omega^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 < \delta\}; \quad (1)$$

$$\Gamma^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = \delta\}, \quad (2)$$

где  $x$  — координатные переменные;  $\delta$  — радиус.

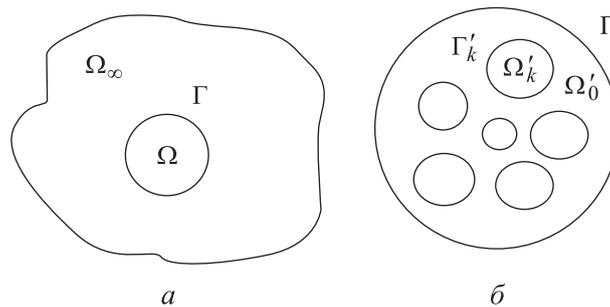


Рис. 1. Схема материала:

а — представительный объем материала; б — геометрическая (структурная) модель представительного объема материала

В представительном объеме материала (области  $\Omega$ ) могут быть выделены подобласти  $\Omega'_k$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , представляющие включения из различных квазиоднородных материалов (рис. 1, б). Границы раздела фаз ( $\Gamma'_k$ ) формируют структуру материала и могут иметь форму любой сложности. Область пространства, занятую включениями, обозначим

$$\Omega' = \bigcup_{k=1}^n (\Omega'_k \cup \Gamma'_k). \quad (3)$$

Область  $\Omega'_0$  занята связующим материалом, также рассматриваемым как квазиоднородный. Таким образом, область представительного материала состоит из подобласти включений  $\Omega'$  и подобласти связующего  $\Omega'_0$ :

$$\Omega = \Omega' \cup \Omega'_0. \quad (4)$$

Границы области  $\Omega$  и подобластей  $\Omega'_k$  могут быть описаны математически с помощью аппарата дифференциальной или аналитической геометрии [8].

Данную модель будем называть структурной моделью представительного объема материала, так как она описывает начальную идеализированную структуру материала.

**Математическое описание напряженно-деформированного состояния среды.** Выделим элементарный объем радиусом  $\delta$  и центром  $\mathbf{x}_0 \in \Omega_\infty$ , который определяет область  $\Omega$  с границей  $\Gamma$ .

Напряженно-деформированное состояние представительного объема материала описывается функциями перемещений  $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ , деформаций  $\epsilon(\mathbf{x})$  и напряжений  $\sigma(\mathbf{x})$ , определенных для  $\mathbf{x} \in \Omega$ .

Возьмем площадку с нормалью  $\mathbf{n}$  и единичным вектором  $\boldsymbol{\tau} \perp \mathbf{n}$ . Вектор напряжений (рис. 2), действующих в площадке:

$$\boldsymbol{\sigma}^{(\mathbf{n})} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}. \quad (5)$$

Вектор напряжения может быть представлен как сумма нормальной ( $\boldsymbol{\sigma}_N$ ) и касательной ( $\boldsymbol{\sigma}_S$ ) компонент (см. рис. 2):

$$\boldsymbol{\sigma}^{(\mathbf{n})} = \boldsymbol{\sigma}_N + \boldsymbol{\sigma}_S, \quad (6)$$

где

$$\boldsymbol{\sigma}_N = \sigma_N \cdot \mathbf{n}, \quad (7)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_S = \boldsymbol{\sigma}^{(\mathbf{n})} - \boldsymbol{\sigma}_N = \sigma_S \cdot \boldsymbol{\tau}. \quad (8)$$

Здесь  $\sigma_N = \boldsymbol{\sigma}^{(\mathbf{n})} \cdot \mathbf{n}$  — длина вектора  $\boldsymbol{\sigma}_N$ ;  $\sigma_S$  — длина вектора  $\boldsymbol{\sigma}_S$ .

Введем полярную (для 2D-случая) систему координат  $r, \varphi$ , как показано на рис. 3. В случае  $\delta = 1$  координата  $r = \text{const} = 1$ .

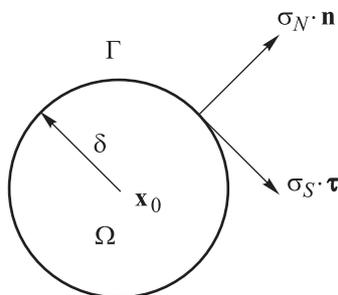


Рис. 2. Компоненты вектора напряжений в площадке с нормалью  $\mathbf{n}$  (пример для 2D-случая)

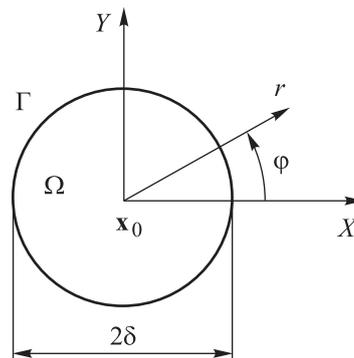


Рис. 3. Системы координат

Компоненты вектора нормали  $\mathbf{n}$  в декартовой системе координат являются функциями координаты  $\varphi$  полярной системы координат:

$$\mathbf{n}(\varphi) = \begin{pmatrix} n_x(\varphi) \\ n_y(\varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix}. \quad (9)$$

Вектор напряжений  $\boldsymbol{\sigma}^{(n)}$  в декартовой системе координат:

$$\boldsymbol{\sigma}^{(n)}(\varphi) = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}(\varphi). \quad (10)$$

Компоненты вектора напряжений  $\boldsymbol{\sigma}^{(n)}$  в декартовой системе координат:

$$\begin{aligned} \sigma_x^{(n)}(\varphi) &= \sigma_{xx}n_x(\varphi) + \sigma_{xy}n_y(\varphi); \\ \sigma_y^{(n)}(\varphi) &= \sigma_{yx}n_x(\varphi) + \sigma_{yy}n_y(\varphi). \end{aligned} \quad (11)$$

Компоненты вектора напряжений  $\boldsymbol{\sigma}^{(n)}$  в полярной системе координат:

$$\begin{aligned} \sigma_N^{(n)}(\varphi) &= \boldsymbol{\sigma}^{(n)}(\varphi) \cdot \mathbf{n}(\varphi) = \sigma_x^{(n)}(\varphi)n_x(\varphi) + \sigma_y^{(n)}(\varphi)n_y(\varphi); \\ \sigma_S^{(n)}(\varphi) &= \boldsymbol{\sigma}^{(n)}(\varphi) \cdot \boldsymbol{\tau}(\varphi) = \boldsymbol{\sigma}^{(n)}(\varphi) \cdot \mathbf{n}\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right), \end{aligned} \quad (12)$$

где

$$\boldsymbol{\tau}(\varphi) = \begin{pmatrix} \tau_x(\varphi) \\ \tau_y(\varphi) \end{pmatrix} = \mathbf{n}\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) = \begin{pmatrix} \cos\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) \\ \sin\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) \end{pmatrix}. \quad (13)$$

$$\sigma_S^{(n)}(\varphi) = \sigma_x^{(n)}(\varphi)n_x\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) + \sigma_y^{(n)}(\varphi)n_y\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) \quad (14)$$

или

$$\sigma_S^{(n)}(\varphi) = -\sigma_x^{(n)}(\varphi)n_y(\varphi) + \sigma_y^{(n)}(\varphi)n_x(\varphi). \quad (15)$$

Подставляя (11) в (12), получаем

$$\begin{aligned} \sigma_N^{(n)}(\varphi) &= \sigma_{xx}n_x(\varphi)n_x(\varphi) + \sigma_{xy}n_x(\varphi)n_y(\varphi) + \\ &+ \sigma_{yx}n_y(\varphi)n_x(\varphi) + \sigma_{yy}n_y(\varphi)n_y(\varphi); \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \sigma_S^{(n)}(\varphi) &= -\sigma_{xx}n_x(\varphi)n_y(\varphi) - \sigma_{xy}n_y(\varphi)n_y(\varphi) + \\ &+ \sigma_{yx}n_x(\varphi)n_x(\varphi) + \sigma_{yy}n_y(\varphi)n_x(\varphi). \end{aligned} \quad (17)$$

Вектор  $\sigma_N^{(n)}$  в декартовой системе координат:

$$\sigma_N^{(n)}(\varphi) = \sigma_N^{(n)}(\varphi) \cdot \mathbf{n}(\varphi). \quad (18)$$

Вектор  $\sigma_S^{(n)}$  в декартовой системе координат:

$$\sigma_S^{(n)}(\varphi) = \sigma^{(n)}(\varphi) - \sigma_N^{(n)}(\varphi). \quad (19)$$

Из анализа формул (16)–(17) следует, что функции  $\sigma_N^{(n)}(\varphi)$  и  $\sigma_S^{(n)}(\varphi)$  являются зависимыми, поэтому функция  $\sigma_N^{(n)}(\varphi)$  обладает всей полнотой информации о напряженном состоянии на поверхности сферы.

Функция  $\sigma_N^{(n)}(\varphi)$  может быть представлена в виде разложения в ряд Фурье:

$$\sigma_N^{(n)}(\varphi) = \frac{1}{2}a_0 + a_1 \cos \varphi + b_1 \sin \varphi + a_2 \cos 2\varphi + b_2 \sin 2\varphi, \quad (20)$$

где  $a_0, a_1, b_1, a_2, b_2$  — коэффициенты ряда Фурье:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \sigma_N^{(n)}(\varphi) d\varphi,$$

$$a_1 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \sigma_N^{(n)}(\varphi) \cdot \cos \varphi d\varphi, \quad a_2 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \sigma_N^{(n)}(\varphi) \cdot \cos 2\varphi d\varphi,$$

$$b_1 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \sigma_N^{(n)}(\varphi) \cdot \sin(\varphi) d\varphi, \quad b_2 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \sigma_N^{(n)}(\varphi) \cdot \sin(2\varphi) d\varphi.$$

Вычислим данные определенные интегралы аналитически:

$$a_0 = \frac{1}{2}\sigma_{xx} + \frac{1}{2}\sigma_{yy}, \quad a_1 = 0, \quad b_1 = 0;$$

$$a_2 = \frac{1}{4}\sigma_{xx} - \frac{1}{4}\sigma_{yy}, \quad b_2 = \frac{1}{2}\sigma_{xy}.$$

Откуда легко находим компоненту  $\sigma_{xy}$ :

$$\sigma_{xy} = 2b_2,$$

$$\sigma_{xy} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \sigma_N^{(n)}(\varphi) \cdot 4 \cos \varphi \cdot \sin \varphi d\varphi. \quad (21)$$

Для вычисления компонент  $\sigma_{xx}$  и  $\sigma_{yy}$  необходимо решить систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} a_0 = \frac{1}{2}\sigma_{xx} + \frac{1}{2}\sigma_{yy}; \\ a_2 = \frac{1}{4}\sigma_{xx} - \frac{1}{4}\sigma_{yy}. \end{cases}$$

Здесь

$$\sigma_{xx} = a_0 + 2a_2 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \sigma_N^{(n)}(\varphi) [3 - 4 \sin \varphi \sin \varphi] d\varphi; \quad (22)$$

$$\sigma_{yy} = a_0 - 2a_2 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \sigma_N^{(n)}(\varphi) [3 - 4 \cos \varphi \cos \varphi] d\varphi. \quad (23)$$

Запишем выражения для компонент тензора  $\sigma$  в следующем виде:

$$\sigma_{xx} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sigma_N^{(n)}(\varphi) \cdot (3 - 4n_y(\varphi) \cdot n_y(\varphi)) \cdot d\varphi, \quad (24)$$

$$\sigma_{yy} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sigma_N^{(n)}(\varphi) \cdot (3 - 4n_x(\varphi) \cdot n_x(\varphi)) \cdot d\varphi, \quad (25)$$

$$\sigma_{xy} = \sigma_{yx} = \frac{2}{\pi} \int_0^{2\pi} \sigma_N^{(n)}(\varphi) \cdot n_x(\varphi) \cdot n_y(\varphi) \cdot d\varphi. \quad (26)$$

Таким образом, компоненты тензора напряжений могут быть вычислены, если известна функция  $\sigma_N^{(n)}(\varphi)$ .

Для компонент тензора деформаций  $\varepsilon$  могут быть получены формулы, аналогичные формулам (24)–(26) для компонент тензора напряжений  $\sigma$ :

$$\varepsilon_{xx} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \gamma_N(\varphi) \cdot (3 - 4 \cdot \sin \varphi \sin \varphi) d\varphi, \quad (27)$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \gamma_N(\varphi) \cdot (3 - 4 \cdot \cos \varphi \cos \varphi) d\varphi, \quad (28)$$

$$\varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yx} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \gamma_N(\varphi) \cdot (4 \cos \varphi \sin \varphi) d\varphi. \quad (29)$$

Здесь подынтегральная функция

$$\gamma_N(\varphi) = \frac{1}{2} \cdot \frac{u_N^{(\mathbf{n})}(\varphi)}{\delta} \quad (30)$$

имеет смысл относительного изменения формы (деформации) объема  $\Omega$  в направлении  $\mathbf{n}$ . Функция  $u_N^{(\mathbf{n})}(\varphi)$  описывает величину смещения точек в направлении нормали к границе.

Отсюда можно сделать вывод, что измерение деформации (компонент тензора  $\boldsymbol{\varepsilon}$ ) можно свести к измерению величины перемещений на границе области  $\Omega$  (рис. 4).

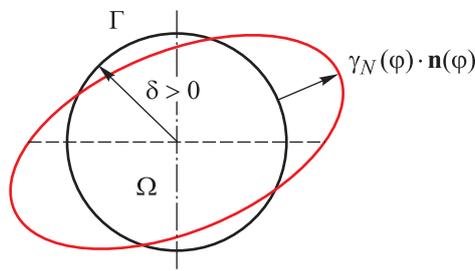


Рис. 4. Геометрическая интерпретация функции  $\gamma_N(\varphi)$

С помощью формул (24)–(26) выполняется аппроксимация зависимости между компонентами вектора нормали и компонентами тензора напряжений, т. е. вычисляются такие компоненты тензора, при которых данная функция описывает заданную зависимость наиболее точно. Таким образом, эти формулы можно рассматривать как метод решения задачи аппроксимации данной зависимости.

Формулы (24)–(26) и (27)–(29), по сути, представляют собой оператор осреднения

$$\langle f \rangle = \frac{1}{V_{\Omega}} \int_{\Omega} f(x) dx,$$

который применяется к напряжениям и деформациям:

$$\langle \sigma_{ij} \rangle = \frac{1}{V_{\Omega}} \int_{\Omega} \sigma_{ij}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \quad \langle \varepsilon_{ij} \rangle = \frac{1}{V_{\Omega}} \int_{\Omega} \varepsilon_{ij}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}. \quad (31)$$

Здесь  $V_{\Omega}$  — объем  $\Omega$ .

**Краевая задача для дифференциальных уравнений упругости.** Известно, что при  $\delta \rightarrow 0$  и однородной среде перемещения  $\mathbf{u}(\mathbf{x})$  в окрестности некоторой точки  $\mathbf{x}_0$  описываются следующими соотношениями (аппроксимация полиномами степени 1):

$$\begin{aligned} u_x(x, y) &= \hat{u}_x + U_{xx}x + U_{xy}y, \\ u_y(x, y) &= \hat{u}_y + U_{yx}x + U_{yy}y, \quad (x, y) \in \Omega(\mathbf{x}_0). \end{aligned} \quad (32)$$

Здесь  $\hat{u}_x$  и  $\hat{u}_y$  являются средними по области перемещениями и принимаются равными нулю (движение как жесткого целого отсутствует). Параметры  $U_{ij}$  связаны с компонентами линейного тензора деформаций ( $\varepsilon$ ):

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_{xx} & \frac{1}{2}(U_{xy} + U_{yx}) \\ \frac{1}{2}(U_{yx} + U_{xy}) & U_{yy} \end{bmatrix}. \quad (33)$$

В случае неоднородной среды существует такое  $\delta > 0$ , при котором уравнения (32) будут сохранять адекватность. При этом параметры  $U_{ij}$  получают смысл усредненных по области  $\Omega$  деформаций  $\langle \varepsilon_{ij} \rangle$ .

Заданные перемещения  $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{x} \in \Gamma$  (смещения в направлении нормали к окружности):

$$\begin{aligned} u_N(\varphi) &= 2\delta(\varepsilon_{xx}n_x(\varphi)n_x(\varphi) + \varepsilon_{xy}n_x(\varphi)n_y(\varphi) + \\ &+ \varepsilon_{yx}n_y(\varphi)n_x(\varphi) + \varepsilon_{yy}n_y(\varphi)n_y(\varphi)), \quad r \in \Gamma. \end{aligned} \quad (34)$$

Заданные напряжения  $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{x} \in \Gamma$  (нормальные напряжения в направлении нормали к окружности):

$$\begin{aligned} \sigma_N(\varphi) &= \sigma_{xx}n_x(\varphi)n_x(\varphi) + \sigma_{xy}n_x(\varphi)n_y(\varphi) + \\ &+ \sigma_{yx}n_y(\varphi)n_x(\varphi) + \sigma_{yy}n_y(\varphi)n_y(\varphi), \quad r \in \Gamma. \end{aligned} \quad (35)$$

При этом параметры ( $\sigma_{ij}$ ) получают смысл усредненных по области напряжений  $\langle \sigma_{ij} \rangle$ .

**Построение модели деформирования.** Рассмотрим двумерный случай. Решение краевой задачи для уравнений упругости будем выполнять численно с помощью метода конечных элементов [9].

**Алгоритм расчета в прямом направлении.**

*Шаг 1.* Задать параметры кинематических ГУ:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, \langle \varepsilon_{xx} \rangle, \langle \varepsilon_{yy} \rangle, \langle \varepsilon_{xy} \rangle), \quad \mathbf{x} \in \Gamma. \quad (36)$$

Параметрами являются компоненты тензора макродеформаций. Уравнения кинематических ГУ:

$$u_x(\varphi, r) = r \langle \varepsilon_{xx} \rangle n_x(\varphi) + \frac{1}{2} r \langle \varepsilon_{xy} \rangle n_y(\varphi); \quad (37)$$

$$u_y(\varphi, r) = \frac{1}{2} r \langle \varepsilon_{xy} \rangle n_x(\varphi) + r \langle \varepsilon_{yy} \rangle n_y(\varphi). \quad (38)$$

*Шаг 2.* Решить краевую задачу с уравнениями (37)–(38) на границе  $\Gamma$  с применением метода конечных элементов. Результатом решения краевой задачи являются узловые силы-реакции  $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{x} \in \Gamma$  или реактивные напряжения  $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{x} \in \Gamma$ .

*Шаг 3.* Вычислить функцию  $\sigma_N^{(n)}(\varphi) = \frac{F_N^{(n)}}{A}$ , где  $A$  — площадь.

*Шаг 4.* С использованием формул (24)–(26) вычислить компоненты тензора напряжений.

**Алгоритм расчета в обратном направлении.**

*Шаг 1.* Задать параметры силовых ГУ:

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, \langle \sigma_{xx} \rangle, \langle \sigma_{yy} \rangle, \langle \sigma_{xy} \rangle), \quad \mathbf{x} \in \Gamma. \quad (39)$$

Параметрами являются компоненты тензора макронапряжений. Уравнения силовых ГУ имеют вид

$$\sigma_x^{(n)}(\varphi) = \langle \sigma_{xx} \rangle n_x(\varphi) + \langle \sigma_{xy} \rangle n_y(\varphi); \quad (40)$$

$$\sigma_y^{(n)}(\varphi) = \langle \sigma_{xy} \rangle n_x(\varphi) + \langle \sigma_{yy} \rangle n_y(\varphi). \quad (41)$$

При этом требуются дополнительные кинематические ограничения, которые запрещают движение твердого тела как жесткого целого.

*Шаг 2.* Решить краевую задачу с уравнениями (40)–(41) на границе  $\Gamma$  с применением метода конечных элементов. Результатом ее решения являются перемещения  $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{x} \in \Gamma$ .

*Шаг 3.* Вычислить функцию  $\gamma_N(\varphi)$ :

$$q_N^{(\hat{n})}(\varphi, r) = \left( u'_x(\varphi) n_x(\varphi) + u'_y(\varphi) n_y(\varphi) \right) \frac{1}{r}. \quad (42)$$

*Шаг 4.* С использованием формул (27)–(29) вычислить компоненты тензора деформаций  $\varepsilon_{xx}$ ,  $\varepsilon_{yy}$ ,  $\varepsilon_{xy}$ .

Интеграл в формулах (24)–(26) и (27)–(29) может быть вычислен приближенно с помощью численных методов интегрирования, например квадратурных формул.

Рассматриваемая зависимость (модель) имеет большую вычислительную сложность, поэтому построим близкую к ней по свойствам модель, но менее вычислительно сложную (метамодель). Аппроксимируем зависимость между компонентами тензора макронапряжений и компонентами тензора макродеформаций следующей линейной функцией (преобразованием):

$$\boldsymbol{\sigma}^{mac} = \mathbf{C}^{mac} \boldsymbol{\varepsilon}^{mac}, \quad (43)$$

где  $\mathbf{C}^{mac}$  — тензор 4-го ранга, описывающий механические характеристики (эффективные) материала.

Коэффициенты матрицы (компоненты тензора  $\mathbf{C}$ ) находятся методом наименьших квадратов.

Существуют формулы типа интегральных уравнений (24)–(26) и (27)–(29) для вычисления компонент тензора  $\mathbf{C}$  [10].

Неоднородность внутренней структуры материала:

$$\mathbf{C} = \mathbf{C}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega,$$

$$\mathbf{C}_k = \mathbf{C}(\mathbf{x}) = \text{const}, \quad \mathbf{x} \in \Omega_k.$$

Таким образом, сферическая форма представительного объема является естественной. Обычно форма области представительного объема материала принимается прямоугольной, так как это обеспечивает вычислительную эффективность. Однако сферическая форма позволяет не только выполнять конечно-элементное моделирование, но и строить математические модели.

**Пример реализации предложенного подхода.** Рассмотрим структурно-неоднородный материал с регулярно-неоднородной структурой. Расчеты выполним в 2D-постановке. Принимаем круглую форму включений диаметром  $D_{\text{вкл}} = 20$  мм, что является аппроксимацией геометрической формы крупного заполнителя в большинстве используемых в строительстве тяжелых бетонов. Геометрическая модель представительного объема материала показана на рис. 5. Диаметр области  $D_{\Omega} = 100$  мм.

Предложенная численно-аналитическая модель допускает использование геометрических моделей представительного объема материала разных конфигураций, которые могут отличаться от представленной выше тестовой конфигурации. Допустимо варьирование количества включений, типов плотностей упаковки включений, соотношений размеров  $D_{\text{вкл}} / D_{\Omega}$  в широких пределах. Принимаются следующие значения механических характеристик материала включений:  $E_0 = 6 \cdot 10^{10}$  Па,  $\nu_0 = 0,28$ , а также материала матрицы:  $E_1 = 3 \cdot 10^{10}$  Па,  $\nu_1 = 0,28$ . Выбранные характеристики соответствуют свойствам компонентов большинства используемых в строительстве тяжелых бетонов.

Модели деформирования компонентов принимаются линейно-упругими. Расчеты выполняются в постановке плоского напряженного состояния. Напряженно-деформированное состояние описывается

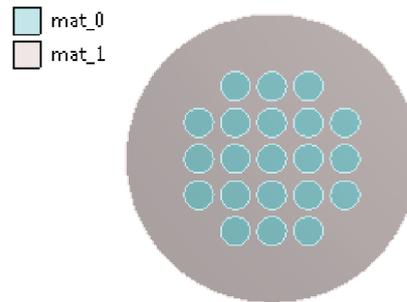


Рис. 5. Геометрическая модель представительного объема материала с регулярно-неоднородной структурой

системой уравнений упругости [9]. На границах раздела фаз принимаются условия склейки [9]. Расчеты выполнены с помощью конечно-элементного программного комплекса ANSYS Mechanical.

Пусть для представительного объема задан тензор макродеформаций:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3,33 \cdot 10^{-5} & 2,56 \cdot 10^{-5} \\ 2,56 \cdot 10^{-5} & -9,40 \cdot 10^{-6} \end{bmatrix}.$$

Уравнениями (37)–(38) заданы кинематические граничные условия (заданные перемещения) на границе  $\Gamma$ . Перемещения, заданные на границе расчетной области  $\Omega$ , показаны на рис. 6.

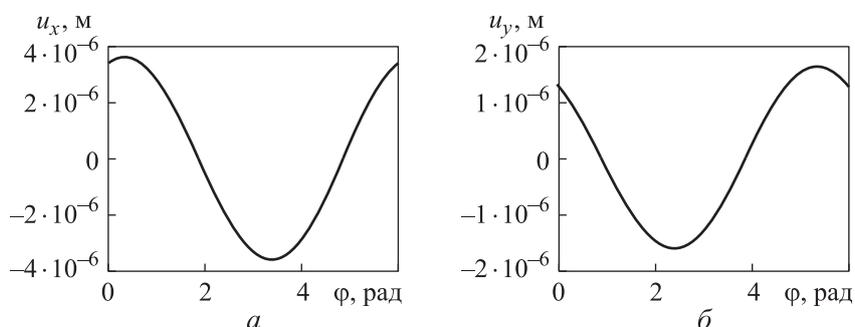


Рис. 6. Перемещения, заданные на границе расчетной области  $\Omega$

Конечно-элементная модель представительного элемента объема материала показана на рис. 7.

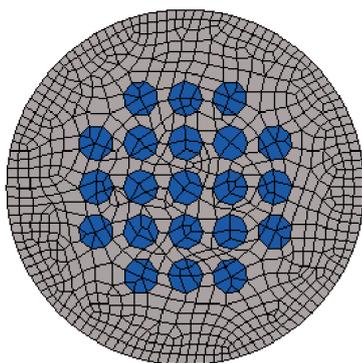
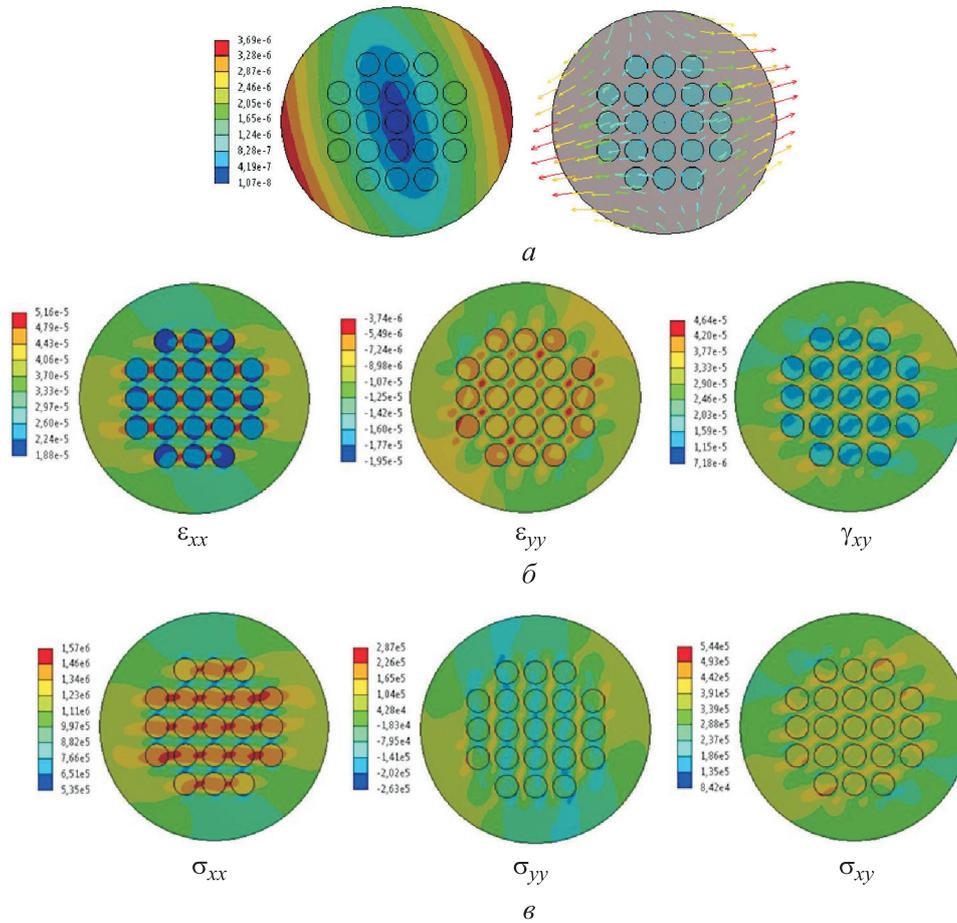


Рис. 7. Конечно-элементная дискретизация расчетной области

В результате решения краевой задачи, описанной выше, получаем поля перемещений, напряжений и деформаций в области  $\Omega$ . Результаты конечно-элементного анализа напряженно-деформированного состояния представительного объема приведены на рис. 8.

Поля напряжений и деформаций в расчетной области неоднородны, что объясняется возмущениями из-за наличия включений. Определены реактивные силы на границе области  $\Omega$  (рис. 9).



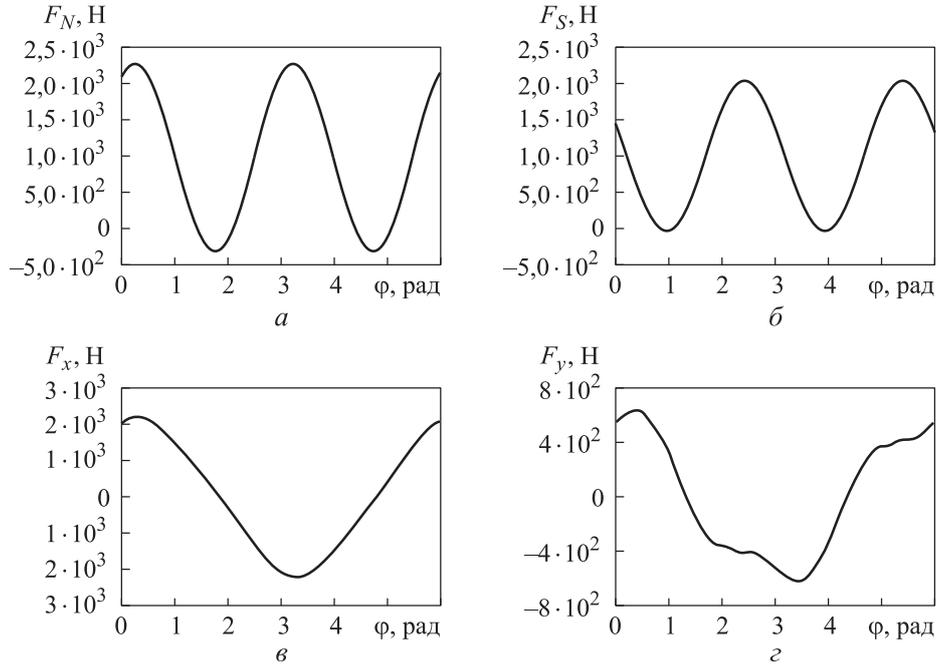
**Рис. 8.** Результаты решения краевой задачи для уравнений упругости с уравнениями (37)–(38) на границе  $\Gamma$ :

$a$  — длина вектора перемещения, м;  $b$  — микродеформации, м/м;  
 $c$  — микронапряжения, Па

Используя рассчитанные реактивные силы на границе области, по формулам (24)–(26) вычисляем тензор макронапряжений:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,21 \cdot 10^6 & 2,40 \cdot 10^5 \\ 2,40 \cdot 10^5 & -6,89 \cdot 10^4 \end{bmatrix}.$$

Для сопоставления на рис. 10 показаны микронапряжения на границе области  $\Omega$ , полученные в МКЭ-расчете, и макронапряжения, заданные тензором, полученным по формулам (40) и (41).



**Рис. 9.** Результаты решения краевой задачи для уравнений упругости с уравнениями (37)–(38) на границе  $\Gamma$ : компоненты  $F_x$  и  $F_y$  вектора реактивных узловых сил  $\mathbf{F}(\varphi)$  в декартовой системе координат и проекции  $F_N$  и  $F_S$  вектора  $\mathbf{F}(\varphi)$  на единичные векторы  $\mathbf{n}$  и  $\mathbf{\tau}$

Графики, представленные на рис. 10, показывают, что функции  $\sigma_N^{(n)}(\varphi)$  и  $\sigma_S^{(n)}(\varphi)$ , как и функции  $\sigma_x^{(n)}(\varphi)$  и  $\sigma_y^{(n)}(\varphi)$ , при наличии структурной неоднородности не являются чисто тригонометрическими функциями и имеют более сложный характер. Однако эти функции могут быть хорошо аппроксимированы тригонометрическими функциями (40)–(41).

В результате многофакторного вычислительного эксперимента может быть получен тензор упругих характеристик структурно-неоднородного материала. Используя метод наименьших квадратов, получаем

$$C = \begin{bmatrix} 5,121 \cdot 10^{10} & 1,278 \cdot 10^{10} & 2,112 \cdot 10^{-1} \\ 1,249 \cdot 10^{10} & 5,113 \cdot 10^{10} & 9,378 \cdot 10^{-2} \\ 2,139 \cdot 10^{-1} & 9,301 \cdot 10^{-2} & 1,961 \cdot 10^{10} \end{bmatrix}.$$

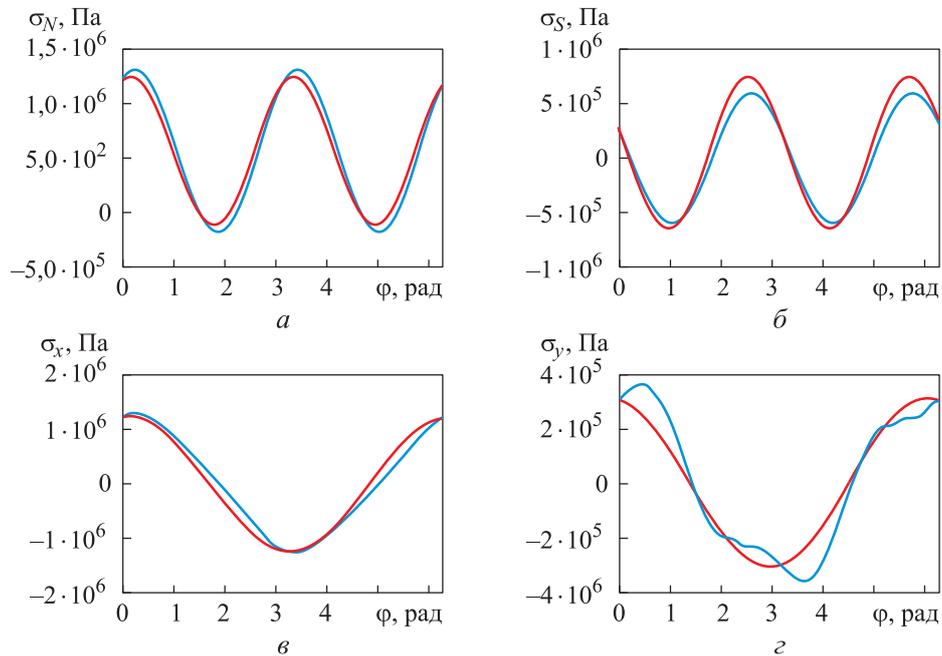


Рис. 10. Микро- и макронапряжения на границе области Ω:  
 — FEA, — approximation

Для сравнения приводим тензоры упругих характеристик материалов включений

$$C_0 = \begin{bmatrix} 6,51 \cdot 10^{10} & 1,823 \cdot 10^{10} & 0 \\ 1,823 \cdot 10^{10} & 6,51 \cdot 10^{10} & 0 \\ 0 & 0 & 2,344 \cdot 10^{10} \end{bmatrix}$$

и матрицы

$$C_1 = \begin{bmatrix} 3,255 \cdot 10^{10} & 9,115 \cdot 10^{10} & 0 \\ 9,115 \cdot 10^{10} & 3,255 \cdot 10^{10} & 0 \\ 0 & 0 & 1,172 \cdot 10^{10} \end{bmatrix},$$

вычисленные по формулам теории упругости для плоского напряженного состояния

$$C = \begin{bmatrix} \vartheta & \vartheta \cdot \nu & 0 \\ \vartheta \nu & \vartheta & 0 \\ 0 & 0 & \vartheta \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix},$$

где  $\vartheta = \frac{E}{1-\nu^2}$ ,  $E$  — модуль упругости;  $\nu$  — коэффициент Пуассона.

**Заключение.** Предложена численно-аналитическая модель, описывающая зависимость между напряжениями и деформациями в структурно-неоднородных средах типа бетона. Модель в явном виде учитывает структурную неоднородность материала. Структура материала описывается с помощью структурной подмодели на основе математического аппарата аналитической геометрии. Модель может быть легко интегрирована в конечно-элементные программные комплексы, так как предполагает выполнение анализа напряженно-деформированного состояния представительного объема материала с помощью метода конечных элементов. Модель также может использоваться для вычисления эффективных характеристик структурно-неоднородных материалов [11], т. е. для решения задачи гомогенизации. Рассмотрен метод вычисления компонент тензора макродеформаций и компонент тензора макронапряжений на основе информации о напряженно-деформированном состоянии на границе области представительного элемента объема структурно-неоднородной среды.

Показано, что сферическая форма представительного объема является естественной.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Харитонов А.М. *Структурно-имитационное моделирование в исследованиях свойств цементных композитов: Автореф. дис. ... д-ра техн. наук* : 05.23.05. Санкт-Петербург, 2009, 364 с.
- [2] Лисина С.А. *Континуальные и структурно-феноменологические модели в механике сред с микроструктурой: Дис. ... канд. физ.-мат. наук*: 01.02.04. Нижний Новгород, 2009, 116 с.
- [3] Небогина Е.В. *Разработка структурной феноменологической модели неупругого деформирования и разрушения материалов со сложными реологическими свойствами: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук*. Самара, 2000, 22 с.
- [4] Шапиевский Д.В. *Разработка структурно-феноменологических моделей микронеднородных нелинейно упругих материалов в условиях ползучести: Дис. ... канд. физ.-мат. наук*. Самара, 2007, 16 с.
- [5] Радченко В.П., Небогина Е.В., Басов М.В. Структурно-феноменологический подход к описанию полной диаграммы упругопластического деформирования. *Изв. вузов. Машиностроение*, 2000, № 5–6, с. 3–13.
- [6] Стружанов В.В. О построении структурной модели материала по результатам макроэксперимента. *Вестник Самарск. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2009, № 1 (19), с. 283–286.
- [7] Победря Б.Е. *Механика композиционных материалов*. Москва, Изд-во Моск. ун-та, 1984, 336 с.
- [8] Канатников А.Н., Крищенко А.П. *Аналитическая геометрия*. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2002, 388 с.
- [9] Зенкевич О. *Метод конечных элементов в теории сооружений и в механике сплошных сред*. Пер. с англ. Москва, Недра, 1974.

- [10] Bazant Z.P. Microplane model for strain controlled inelastic behavior. *Int. conference on constitutive equations for engineering materials: Theory and application*. Tuscon, Arizon, USA, 10–14, Jan 1983.
- [11] Димитриенко Ю.И., Кашкаров А.И. Конечно-элементный метод для вычисления эффективных характеристик пространственно-армированных композитов. *Вестник МГТУ им. Н. Э. Баумана. Сер. Естественные науки*, 2002, № 2, с. 95–107.

Статья поступила в редакцию 03.02.2025

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Данилов М.Н., Бурнышева Т.В. Численно-аналитическая модель деформирования структурно-неоднородных материалов. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2025, вып. 7. EDN FIXNKI

**Данилов Максим Николаевич** — аспирант кафедры «Прочность летательных аппаратов» НГТУ. e-mail: danilov-m-n@ya.ru

**Бурнышева Татьяна Витальевна** — д-р техн. наук, доцент кафедры «Прочность летательных аппаратов» НГТУ. e-mail: tburn@mail.ru

## Numerical and analytical model of deformation of structurally heterogeneous materials

© M.N. Danilov, T.V. Burnysheva

Novosibirsk State Technical University, Novosibirsk, 630073, Russian Federation

*The paper presents a process of improving the mathematical apparatus to describe the stress-strain state of structures made of the structurally inhomogeneous materials and simulate processes of their deformation under loading. It applies the structural-phenomenological approach to constructing the material deformation models. The paper proposes constitutive equations in the form of a numerical-analytical model establishing relationship between the macrostrain and the macrostress tensor components. The components boundary surface (binder and inclusions) is described by a structural model of the representative material volume, the model could be constructed based on the differential geometry mathematical apparatus. The inhomogeneous stress-strain state of the material volume representative element is reproduced by numerical simulation using the finite element method in solving the boundary value problem for a system of elasticity equations. In this case, the boundary conditions are determined by the macrostrain and macrostress tensor components characterizing the stress-strain values averaged over the representative volume. The constructed numerical-analytical model explicitly takes into account the material structural heterogeneity; therefore, it could be called the structural-phenomenological model.*

**Keywords:** *structurally heterogeneous materials, concrete, composite materials, constitutive equations, structural-phenomenological model, homogenization*

### REFERENCES

- [1] Kharitonov A.M. *Strukturno-imitatsionnoe modelirovanie v issledovaniyakh svoystv tsementnykh kompozitov: Avtoreferat dis. ... d-ra tekhn. nauk: 05.23.05* [Structural-simulation modeling in studying properties of the cement composites: Abstract, Diss. ... Dr. Sc. (Eng.): 05.23.05.]. St. Petersburg, 2009, 364 p.
- [2] Lisina S.A. *Kontinualnye i strukturno-fenomenologicheskie modeli v mekhanike sred s mikrostrukturoy: Dis. ... kand. fiz.-mat. nauk: 01.02.04* [Continuous and structural-phenomenological models in mechanics of the media with microstructure: Diss. ... Cand. Sc. (Phys.-Math.): 01.02.04.]. Nizhny Novgorod, 2009, 116 p.
- [3] Nebogina E.V. *Razrabotka strukturnoy fenomenologicheskoy modeli neuprugogo deformirovaniya i razrusheniya materialov so slozhnymi reologicheskimi svoystvami: Avtoref. dis. ... kand. fiz.-mat. nauk* [Development of a structural phenomenological model of inelastic deformation and fracture of the materials with complex rheological properties: Abstract, Diss. ... Cand. Sc. (Phys.-Math.)]. Samara, 2000, 22 p.
- [4] Shapievsky D.V. *Razrabotka strukturno-fenomenologicheskikh modeley mikroneodnorodnykh nelineyno uprugikh materialov v usloviyakh polzuchesti: Dis. ... kand. fiz.-mat. nauk* [Development of structural-phenomenological models of micro-heterogeneous nonlinear elastic materials under the creep conditions: Diss. ... Cand. Sc. (Phys.-Math.)]. Samara, 2007, 16 p.
- [5] Radchenko V.P., Nebogina E.V., Basov M.V. *Strukturno-fenomenologicheskii podkhod k opisaniyu polnoy diagramy uprugoplasticheskogo deformirovaniya*

- [Structural-phenomenological approach to description of a complete diagram of the elastic-plastic deformation]. *Izv. vuzov. Mashinostroenie — Proceedings of Higher Educational Institutions. Machine Building*, 2000, no. 5–6, pp. 3–13.
- [6] Struzhanov V.V. O postroenii strukturnoy modeli materiala po rezultatam makroeksperimenta [On construction of material structural model on the basis of macro experiment results]. *Vestnik Samarsk. gos. tekhn. un-ta. Ser. Fiz.-mat. nauki — Journal of Samara State Technical University, Ser. Physical and Mathematical Sciences*, 2009, no. 1 (19), pp. 283–286.
- [7] Pobedrya B.E. *Mekhanika kompozitsionnykh materialov* [Mechanics of the composite materials]. Moscow, Moscow University Publ., 1984, 336 p.
- [8] Kanatnikov A.N., Krishchenko A.P. *Analiticheskaya geometriya* [Analytical geometry]. Moscow, BMSTU Publ., 2002, 388 p.
- [9] Zienkiewicz O. *The finite element method in structural and continuum mechanics*. McGraw-Hill, 1967 [In Russ.: Zenkevich O. Metod konechnykh elementov v teorii sooruzheniy i v mekhanike sploshnykh sred. Moscow, Nedra Publ., 1974].
- [10] Bazant Z.P. *Microplane model for strain controlled inelastic behavior*. *Int. conference on constitutive equations for engineering materials: Theory and application*. Tucson, Arizona, USA, 10–14, Jan 1983.
- [11] Dimitrienko Yu.I., Kashkarov A.I. Konechno-elementnyi metod dlya vychisleniya effektivnykh kharakteristik prostranstvenno-armirovannykh kompozitov [Finite element method for calculating effective characteristics of the spatially reinforced composites]. *Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Ser. Estestvennye nauki — Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Series Natural Sciences*, 2002, no. 2, pp. 95–107.

**Danilov M.N.**, Postgraduate Student, Department of Aircraft Strength, Novosibirsk State Technical University. e-mail: danilov-m-n@ya.ru

**Burnysheva T.V.**, Dr. Sc. (Eng.), Professor, Department of Aircraft Strength, Novosibirsk State Technical University. e-mail: burnysheva@corp.nstu.ru