

Исследование влияния даты старта космического аппарата с малой тягой на энергетические затраты на перелет в системе Земля – Луна

© Е.Ю. Кувшинова

Государственный научный центр Российской Федерации «Исследовательский Центр имени М.В. Келдыша», Москва, 125438, Российская Федерация

Рассмотрена задача пространственного перелета космического аппарата с электроракетной двигательной установкой между окололунной и околоземной орбитами за минимальное время. Представлены результаты оценки влияния даты старта (орбитального положения Луны относительно Земли) на затраты характеристической скорости, необходимой на перелет между окололунной и околоземной орбитами. Задача была решена в единой постановке («сквозной» расчет траектории перелета) с учетом гравитации Земли и Луны (без использования метода сфер действия), положение которых определялось согласно эфемеридной модели EPM 2008. Для определения оптимального закона управления вектором тяги электроракетной двигательной установки использовался принцип максимума Понтрягина.

Ключевые слова: космический аппарат, оптимальные траектории перелета, электроракетная двигательная установка, малая тяга, перелет в системе Земля – Луна

Введение. Поиску траекторий перелета космического аппарата (КА) с электроракетной двигательной установкой (ЭРДУ) между орбитами искусственного спутника Земли и Луны посвящены исследования разных авторов, результаты некоторых из этих исследований приведены в работах [1–8]. Несмотря на это, вопросы обоснования условий обеспечения минимальных энергетических затрат на перелет (характеристической скорости перелета) до сих пор недостаточно исследованы.

На величину энергетических затрат, необходимых на перелет КА с ЭРДУ между окололунной и околоземной орбитами, влияют параметры начальной и конечной орбит, а также баллистические параметры траектории (угловая дальность перелета, положение плоскости орбит у Земли и у Луны, дата старта, определяющая орбитальное положение Луны относительно Земли).

Результаты оценки влияния на затраты характеристической скорости угловой дальности перелета, долготы восходящего узла у Земли и у Луны представлены в работе [9], где, в частности, отмечено, что характеристическая скорость перелета повышается на 810 м/с, если выбрано неоптимальное значение долготы восходящего узла у Земли по сравнению с оптимальным (при фиксированной долготе восходящего узла у Луны), и на 210 м/с — в случае выбора неоптимального значения долготы восходящего узла у Луны (при оптимальной долготе восходящего узла у Земли). Далее представлены результаты исследования

влияния даты старта на затраты характеристической скорости, ставшего продолжением и развитием тех исследований, результаты которых отражены в [9–11].

Цель данного исследования — поиск минимальной характеристической скорости перелета и определение условий (баллистических параметров), при которых она может быть достигнута.

Основные методические положения. Оценку влияния даты старта на величину характеристической скорости перелета с окололунной на околоземную орбиту предполагалось получать перебором дат старта, используя в качестве начального приближения полученные неизвестные переменные решенной краевой задачи для решения краевой задачи со следующей датой старта, полученной от исходной сдвигом на принятый шаг (реализация *метода продолжения по параметру* [12], где параметром является дата старта).

В межпланетных перелетах помимо даты старта анализируется дата отлета, связанная с датой старта через участок движения в сфере действия планет. Как правило, это обусловлено применением *метода сфер действия* и оптимизацией гелиоцентрического участка, начало которого определяет дата отлета. Если *метод сфер действия* не применяется (как в данной работе), то дата отлета (от Луны) определена нечетко. Для определенности дату отлета можно задавать по выбранному условию (в данной работе — при эксцентриситете относительно Луны, равном 2), обеспечивающему гарантированный отлет от Луны.

При постоянных значениях удельного импульса тяги ЭРДУ и начального ускорения перебор дат старта или дат отлета равнозначен, поскольку продолжительность участка раскрутки (участка траектории движения КА от Луны в виде раскручивающейся спирали) и количество целых витков траектории вокруг Луны не изменяются. Если вследствие каких-либо условий участок раскрутки претерпевает значительные изменения, которые, в первую очередь, могут быть вызваны изменением удельного импульса тяги ЭРДУ и начального ускорения, а также баллистическими условиями, то предпочтительнее использовать дату отлета вместо даты старта. Это позволяет обеспечить близкие условия (взаимное положение Земли, Луны и КА) на дату отлета от Луны для разных краевых задач и реализовать *метод продолжения по параметру*.

На интервале времени, равном периоду обращения Луны вокруг Земли, Луна проходит через апоцентр и перицентр (апсидальные точки орбиты). В импульсной постановке задачи (по Гоману), т. е. при использовании двигателей большой тяги, перелет через эти точки обеспечивает минимальные энергетические затраты.

Следует отметить, что движение Луны вокруг Земли достаточно сложное. Однако анализ изменения орбитальных элементов Луны от витка к витку показывает, что их изменение можно считать второстепенным фактором, влияющим на искомую характеристическую

скорость перелета. В связи с этим рассматриваемый интервал дат отлета (или дат старта) был ограничен одним периодом движения Луны вокруг Земли.

Исследование влияния даты старта на затраты характеристической скорости было выполнено на основе методики расчета пространственных траекторий перелета КА с ЭРДУ между окололунной и околоземной орбитами с использованием принципа максимума Понтрягина [9]. Оно отличается от приведенного в работе [9] исследования постановками краевых задач.

Рассмотрены две постановки краевых задач пространственных перелетов КА с начальной низкой круговой окололунной орбиты на конечную низкую круговую околоземную орбиту за минимальное время — задачи быстродействия, для которых функционалом является продолжительность перелета:

$$J = t_k - t_0.$$

Следует отметить, что терминология и обозначения приняты такие же, как и в работе [9]: индексами «0» и «k» обозначены параметры начальной и конечной орбит, «л» и «з» — селеноцентрическая и геоцентрическая система координат соответственно. Уравнения движения и уравнения для сопряженных переменных приведены в работе [9].

Были приняты следующие исходные данные:

– высота начальной орбиты КА $H(t_0) = 100$ км, наклонение $i_l(t_0) = 90^\circ$ (относительно плоскости земного экватора);

– высота конечной орбиты КА $H(t_k) = 800$ км, наклонение $i_z(t_k) = 51,6^\circ$;

– начальное ускорение КА $\sim 1,7 \cdot 10^{-3}$ м/с², удельный импульс тяги электроракетных двигателей 3000 с.

В обеих постановках свободными являлись истинная долгота $F(t_k)$ — на правом конце траектории (у Земли); долгота восходящего узла $\Omega(t_0)$ — на левом конце траектории (у Луны); $\Omega(t_k)$ — на правом конце траектории (у Земли), а дата отлета от Луны $D_{отл}$ фиксировалась. Различия постановок заключаются в следующем:

постановка I: аргумент широты $u(t_0) = 0$ зафиксирован, начальная точка (на дату старта) лежит в плоскости $O'X'Y'$, связанной с Луной;

постановка II: истинная долгота $F(t_0)$ на левом конце траектории (у Луны) является свободной.

В начале исследования краевые задачи решались в постановке I как наиболее простой. Переход от нее к постановке II обусловлен

тем, что начальное значение истинной долготы $F(t_0) = \Omega(t_0) + u(t_0)$ в постановке I определяется искомой неизвестной переменной $\Omega(t_0)$ при фиксированном значении аргумента широты $u(t_0) = 0$. При варьировании даты отлета от Луны $D_{\text{отл}}$ отсутствие возможности изменения аргумента широты $u(t_0)$ в начальный момент времени может приводить к ухудшению процесса сходимости краевой задачи из-за значительно изменяющихся условий (взаимного положения КА, Земли и Луны) в начале геоцентрического участка и, как следствие, невозможности использования *метода продолжения по параметру*. Поэтому исследование было продолжено с решением краевых задач в постановке II, где $\Omega(t_0)$ и $F(t_0)$ являются неизвестными краевой задачи и определяются оптимальными.

Краевая задача межорбитального перелета в постановке I.

В такой постановке краевой задачи $F(t_0) = \Omega(t_0) + u(t_0)$, где $u(t_0) = 0$. Дата отлета от Луны $D_{\text{отл}}$ зафиксирована при решении каждой краевой задачи. Неизвестными в решаемой краевой задаче являются начальные значения сопряженных переменных (на левом конце траектории у Луны) — $\Psi_{e_x}^{\text{л}}, \Psi_{e_y}^{\text{л}}, \Psi_{i_x}^{\text{л}}, \Psi_{i_y}^{\text{л}}, \Psi_F^{\text{л}}$, долгота восходящего узла у Луны $\Omega(t_0)$, дата старта D_0 и продолжительность перелета t . Использована нормировка сопряженных переменных (при условии $\Psi_h^{\text{л}}(t_0) = 1$), для того чтобы исключить из числа неизвестных краевой задачи одну сопряженную переменную $\Psi_h^{\text{л}}$. Начальные значения сопряженных переменных Ψ_m и Ψ_t могут быть выбраны произвольно, так как они не влияют на закон управления вектором тяги.

Дата отлета от Луны отсчитывалась от даты старта с начальной окололунной орбиты с учетом продолжительности части траектории в виде раскручивающейся спирали от Луны или раскрутки:

$$D_{\text{отл}} = D_0 + t_{\text{раскр}},$$

где D_0 — дата старта с начальной окололунной орбиты (или t_0 — начальный момент времени на левом конце траектории у Луны); $t_{\text{раскр}}$ — продолжительность раскрутки.

Для того чтобы обеспечить гарантированный отлет от Луны, продолжительность раскрутки $t_{\text{раскр}}$ определялась из принятого условия равенства эксцентриситета относительно Луны $e_{\text{л}} = 2$ (данное условие определялось *методом золотого сечения* с точностью 10^{-12}). Требуемая дата отлета $D_{\text{отл}}^{\text{задан}}$ задавалась при решении каждой краевой задачи и варьировалась при переходе от решения краевой задачи

с предыдущей датой отлета к следующей, отличающейся от предыдущей принятым шагом.

Если начальное приближение не получено, то для поиска траекторий перелета так же, как и в работе [9], может быть использован двухстадийный подход, приведенный ниже. (В работе [9] невязки имеют номера $S_1^* \dots S_6^*$, поэтому для рассматриваемых постановок краевых задач они будут обозначены S_7^* и S_8^* .)

На 1-й стадии компоненты невязки S_7^* будут иметь следующий вид:

$$S_7^* = \begin{pmatrix} e_3(t_k) - e_3^k \\ p_3(t_k) - p_3^k \\ r_\pi^3(t_k) - r_\pi^{3k} \\ r_\alpha^3(t_k) - r_\alpha^{3k} \\ i_3(t_k) - i_3^k \\ i_x^{32}(t_k) + i_y^{32}(t_k) - \text{tg}^2\left(\frac{i_3^k}{2}\right) \\ D_{\text{отл}} - D_{\text{отл}}^{\text{задан}} \\ \left(D_{\text{отл}} - D_{\text{отл}}^{\text{задан}}\right)^2 \end{pmatrix},$$

где e_3 — эксцентриситет орбиты; p_3 — фокальный параметр; r_π^3 / r_α^3 — радиус перицентра/апоцентра орбиты; i_3 — наклонение орбиты; $i_x^3 = \text{tg}(i_3/2) \cos \Omega_3$, $i_y^3 = \text{tg}(i_3/2) \sin \Omega_3$ (Ω_3 — долгота восходящего узла); $D_{\text{отл}}$ — дата отлета от Луны; $i_x^{32}(t_k) + i_y^{32}(t_k) - \text{tg}^2\left(\frac{i_3^k}{2}\right)$ и $\left(D_{\text{отл}} - D_{\text{отл}}^{\text{задан}}\right)^2$ — компоненты, которые вводятся для формального дополнения размерности краевой задачи до размерности невязки; e_3^k , p_3^k , r_π^{3k} , r_α^{3k} , i_3^k , $D_{\text{отл}}^{\text{задан}}$ — зафиксированы.

Решение краевой задачи на 1-й стадии с компонентами невязки S_7^* предназначено для получения начального приближения (когда реализуется траектория с заданными свойствами вида раскручивающейся спирали от Луны и скручивающейся спирали к Земле) для решения краевой задачи на 2-й стадии. Получать точное решение краевой задачи на 1-й стадии не требуется.

Если начальное приближение для решения одной из краевых задач получено, то его, как правило, можно использовать для успешного получения решения краевых задач при вариации даты отлета $D_{отл}$ и сразу начинать решение краевых задач со 2-й стадии, приведенной ниже.

На 2-й стадии краевая задача в постановке I дополнялась тремя условиями трансверсальности:

- 1) $\Psi_F^3(t_k) = 0$;
- 2) $i_x^3 \Psi_{i_y}^3 - i_y^3 \Psi_{i_x}^3 = 0$;
- 3) $i_x^{\text{II}} \Psi_{i_y}^{\text{II}} - i_y^{\text{II}} \Psi_{i_x}^{\text{II}} = 0$.

В этом случае компоненты невязки будут иметь следующий вид:

$$S_8^* = \begin{pmatrix} h_3(t_k) - h_3^k \\ e_x^3(t_k) \\ e_y^3(t_k) \\ i_x^{32}(t_k) + i_y^{32}(t_k) - \text{tg}^2\left(\frac{i_3^k}{2}\right) \\ i_x^3(t_k) \Psi_{i_y}^3(t_k) - i_y^3(t_k) \Psi_{i_x}^3(t_k) \\ \Psi_F^3(t_k) \\ i_x^{\text{II}}(t_0) \Psi_{i_y}^{\text{II}}(t_0) - i_y^{\text{II}}(t_0) \Psi_{i_x}^{\text{II}}(t_0) \\ D_{отл} - D_{отл}^{\text{задан}} \end{pmatrix},$$

где $h_3 = \sqrt{p_3/\mu_3}$; p_3 — фокальный параметр; μ_3 — гравитационный параметр; $h_3^k, i_3^k, D_{отл}^{\text{задан}}$ — зафиксированы.

Краевая задача межорбитального перелета в постановке II. Неизвестными краевой задачи в постановке II являлись начальные значения сопряженных переменных (на левом конце траектории у Луны) — $\Psi_{e_x}^{\text{II}}, \Psi_{e_y}^{\text{II}}, \Psi_{i_x}^{\text{II}}, \Psi_{i_y}^{\text{II}}$, истинная долгота у Луны $F(t_0)$, долгота восходящего узла у Луны $\Omega(t_0)$, дата старта D_0 и продолжительность перелета t . Краевая задача для постановки II дополнялась условием трансверсальности — $\Psi_F^{\text{II}}(t_0) = 0$.

Компоненты невязок S_7^* и S_8^* будут иметь такой же вид, как для краевых задач в постановке I.

Результаты оценки влияния даты старта на энергетические затраты на перелет КА между окололунной и околоземной орбитами. Ниже приведены результаты оценки затрат характеристической скорости на перелет КА с ЭРДУ в зависимости от даты старта, полученные с помощью методики расчета пространственных траекторий перелета КА с ЭРДУ между низкими окололунной и околоземной орбитами [9].

Исследование влияния даты старта для задачи в постановке I. При выборе начального вектора сопряженных переменных были использованы результаты, полученные в работе [9], при постановке краевой задачи со свободными переменными $\Omega(t_0)$, $\Omega(t_k)$, $F(t_k)$. Согласно этим результатам расчетов при оптимальных значениях долготы восходящего узла у Земли и у Луны с принятыми исходными данными, продолжительность раскрутки у Луны (до достижения эксцентриситета относительно Луны $e_{\text{л}} = 2$) составит 10,2 сут. Поскольку в качестве даты старта D_0 в работе [9] принято 22.08.2038 (согласно расчетам автора этой дате соответствует время 12:00), дата отлета от Луны $D_{\text{отл}}$ (которой соответствует начальный момент времени t_0 с учетом 10,2-суточной раскрутки) получена путем расчетов равной 01.09.2038, 15:00. В качестве начального вектора сопряженных переменных принят вектор сопряженных переменных, соответствующий оптимальным значениям долготы восходящего узла у Земли ($\Omega(t_k) = 11,7^\circ$) и у Луны ($\Omega(t_0) = 199,1^\circ$) из работы [9].

Результаты оценки затрат характеристической скорости на перелет КА при изменении даты отлета от Луны $D_{\text{отл}}$ на интервале одного оборота вращения Луны относительно Земли (~28 сут), полученные в результате решения ряда краевых задач с компонентами невязки S_8^* в постановке I, даны в табл. 1. В ней приведены следующие параметры перелета: величина характеристической скорости $V_{\text{хар}}$, необходимая на перелет; дата старта D_0 ; дата отлета от Луны $D_{\text{отл}}$; продолжительность перелета t_k ; продолжительность раскрутки $t_{\text{раскр}}$, в таблице обозначенная t_p ; долгота восходящего узла у Луны $\Omega(t_0)$, равная $F(t_0)$; долгота восходящего узла у Земли $\Omega(t_k)$; отклонения по радиусу перицентра, апоцентра $\Delta r_{\text{п}}$, $\Delta r_{\text{а}}$ (от 7171 км) и по наклону Δi (от $51,6^\circ$) (точность решения краевых задач); истинная долгота селеноцентрического участка $F_{\text{л}}(t_k)$ (с указанием целого числа витков и дробной части витка в градусах), отсчитываемая от начального значения истинной долготы $F(t_0)$; истинная долгота геоцентрического участка $F_3(t_k)$ (с указанием целого числа витков и дробной части витка в градусах, отсчитываемая от целого числа витков, сделанных относительно Луны); истинная аномалия Луны $\vartheta_{\text{л}}$ в момент отлета КА от Луны.

Основные параметры перелета КА между окололунной и околоземной орбитами (постановка I)

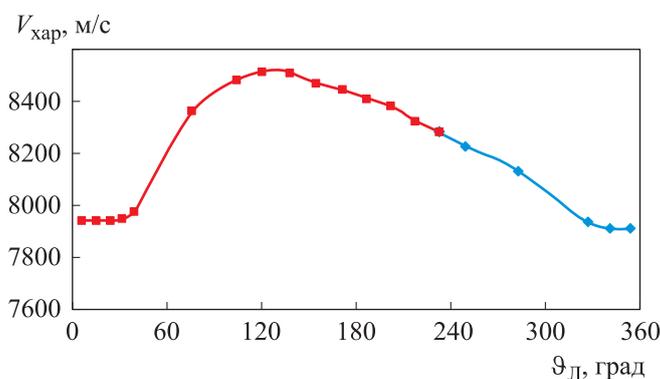
$V_{\text{хар}}$, м/с	D_0	t_k , сут	$\Omega(t_0)$, ($F(t_0)$), град	$\Omega(t_k)$, град	$\Delta r_{\pi};$ Δr_{ω} , км	Δi , град	$F_L(t_k)-F(t_0)$, град	$F_3(t_k)$, град	ϑ_L , град
	$D_{\text{отл}}$	t_p , сут					(число витков; дробная часть, град)		
8455,5	08.08.38 02:08	50,1	41	193	-22; 9	$-1,5 \cdot 10^{-2}$	12490	51879	137,7
	18.08.38 11:59	10,5					(34; 250)	(144; 39)	
8167,4	13.08.38 12:42	48,6	59	282	-21; 21	$1,5 \cdot 10^{-2}$	12510	52322	217,3
	23.08.38 12:00	10,0					(34; 270)	(145; 122)	
8064,8	15.08.38 13:04	48,0	87	308	-36; 21	$1,2 \cdot 10^{-2}$	12536	52593	249,6
	25.08.38 11:59	10,0					(34; 296)	(146; 33)	
8021,8	16.08.38 12:41	47,8	103	319	-53; 53	$-5,2 \cdot 10^{-3}$	12550	52712	266,1
	26.08.38 11:59	10,0					(34; 310)	(146; 152)	
7992,1	17.08.38 11:59	47,7	118	329	-61; 39	$-9,3 \cdot 10^{-3}$	12563	52815	282,5
	27.08.38 11:59	10,0					(34; 323)	(146; 255)	
7911,8	21.08.38 09:12	47,2	181	3	-16; 95	$1,0 \cdot 10^{-2}$	12612	52698	341,0
	31.08.38 11:59	10,2					(35; 12)	(146; 138)	
7911,2	22.08.38 11:58	47,2	199	12	-11; 12	$2,3 \cdot 10^{-3}$	12623	52792	355,9
	01.09.38 15:00	10,2					(35; 23)	(146; 232)	
7911,3	23.08.38 09:04	47,2	213	19	-46; 56	$-5,9 \cdot 10^{-4}$	12632	52730	7,2
	02.09.38 12:00	10,1					(35; 32)	(146; 170)	
7924,6	24.08.38 09:17	47,3	229	27	-34; 24	$-1,3 \cdot 10^{-2}$	12641	52890	20,1
	03.09.38 12:00	10,1					(35; 41)	(146; 330)	
7938,4	25.08.38 09:37	47,4	246	36	-17; -3	$-1,4 \cdot 10^{-3}$	12652	52960	32,6
	04.09.38 12:00	10,1					(35; 52)	(147; 240)	
7953,2	26.08.38 09:58	47,5	262	45	-18; -6	$-5,2 \cdot 10^{-3}$	12665	52900	44,5
	05.09.38 12:00	10,1					(35; 65)	(146; 340)	
8138,0	31.08.38 18:13	48,4	333	357	-65; 61	$-5,2 \cdot 10^{-3}$	13122	52609	106,7
	12.09.38 11:59	11,8					(36; 162)	(146; 49)	

Переменный шаг перебора дат отлета $D_{\text{отл}}$ (см. табл. 1) обусловлен вычислительными трудностями, возникающими при решении краевых задач. Одним из факторов, влияющим на сходимость, вероятно, является неединственность решения (многоэкстремальность), когда наличие двух и более экстремалей в одной и той же малой окрестности пространства неизвестных краевой задачи приводит к спонтанным переходам при решении краевых задач от одной экстремали к другой. Как следует из табл. 1, приведенные решения краевых задач соответствуют трем вариантам значений целой части витка у Луны — 34, 35 и 36.

Исследование также показало, что при положении Луны в окрестности перигея своей орбиты (истинная аномалия Луны $\vartheta_{\text{л}}$ приведена в табл. 1) в момент времени, соответствующей дате отлета от Луны $D_{\text{отл}}$ (01.09.38, 15:00), затраты характеристической скорости на перелет КА минимальны ($V_{\text{хар}} = 7911,2$ м/с при $\vartheta_{\text{л}} = 355,9^\circ$). Таким образом, для дальнейших исследований не требуется использовать постановку задачи со свободной датой старта (с применением условий трансверсальности), что приведет к усложнению постановки задачи и, по-видимому, к вычислительным сложностям. Целесообразно принимать дату старта, обеспечивающую положение Луны в перигее ее орбиты в момент отлета КА от Луны.

Строки с параметрами, соответствующие минимальному и максимальному значениям $V_{\text{хар}}$, в табл. 1 выделены жирным шрифтом. Разница между минимальным и максимальным значениями оценки затрат характеристической скорости в зависимости от истинной аномалии Луны (изменяется на 330°) составила ~ 500 м/с (6 % от максимального значения).

Исследование влияния даты старта для задачи в постановке II. Дата отлета $D_{\text{отл}}$ при переходе от одной краевой задачи к другой варьировалась на интервале одного синодического периода системы Земля – Луна. В результате расчетов получена оценка затрат характеристической скорости от истинной аномалии Луны $\vartheta_{\text{л}}$ на интервале от 0 до 360° с изменяемым шагом, представленная на рисунке.



Оценка затрат характеристической скорости $V_{\text{хар}}$ в зависимости от истинной аномалии Луны $\vartheta_{\text{л}}$ при числе витков у Луны:
◆ — 35; ■ — 34

Краевые задачи решены с точностью, которая составила отклонения по радиусам апоцентра и перигея до 1 км от заданного значения радиусов апоцентра и перигея (7171 км). Точность по наклонению в градусах составила до $8,8 \cdot 10^{-3}$ от заданного значения $51,6^\circ$.

Зависимость $V_{\text{хар}}(\vartheta_{\text{л}})$ при изменении истинной аномалии Луны $\vartheta_{\text{л}}$ от 0 до 360° имеет два минимума и максимум (см. рисунок), которые соответствуют значениям истинной аномалии Луны, равным 15° и 341° для минимумов и 120° для максимума соответственно. Взаимосвязь величины характеристической скорости $V_{\text{хар}}$, необходимой на перелет КА, для решенных краевых задач с параметрами перелета (аналогично табл. 1) приведена в табл. 2.

Таблица 2

Основные параметры перелета КА между окололунной и околоземной орбитами (постановка II)

$V_{\text{хар}}$, м/с	D_0	t_k , сут	$F_0(t_0)$, град	$\Omega(t_0)$, град	Δr_{π} ; Δr_{α} , км	Δi , град	$F_{\text{л}}(t_k)-F(t_0)$, град	$F_3(t_k)$, град	$\vartheta_{\text{л}}$, град
	$D_{\text{отл}}$	t_p , сут		$\Omega(t_k)$, град			(число витков; дробная часть, град)		
7944,8	27.07.38 08:11	47,4	97	230	-0,1;	$5,2 \cdot 10^{-4}$	12285 (34; 45)	52706 (146; 146)	5,7
	06.08.38 12:00	10,2		14	-0,9				
7939,9	28.07.38 10:04	47,4	101	242	-0,2;	$-2,7 \cdot 10^{-4}$	12289 (34; 49)	52734 (146; 174)	14,9
	07.08.38 12:00	10,1		28	-0,4				
7943,9	29.07.38 11:22	47,4	111	255	-0,1;	$-1,5 \cdot 10^{-3}$	12297 (34; 57)	52752 (146; 192)	23,5
	08.08.38 12:00	10,1		40	-0,2				
7950,3	30.07.38 11:02	47,4	125	265	-0,6;	$-6,9 \cdot 10^{-3}$	12309 (34; 69)	52949 (147; 29)	31,5
	09.08.38 12:00	10,1		47	0,8				
7973,4	31.07.38 11:24	47,6	142	281	-0,2;	$2,5 \cdot 10^{-5}$	12324 (34; 84)	53085 (147; 165)	39,2
	10.08.38 12:00	10,0		56	-0,3				
8360,8	04.08.38 03:30	49,6	258	23	-0,6;	$-8,4 \cdot 10^{-4}$	12447 (34; 207)	52114 (144; 274)	76,5
	14.08.38 12:00	10,4		112	-0,1				
8481,3	06.08.38 04:02	50,2	296	58	-0,1;	$-3,9 \cdot 10^{-3}$	12491 (34; 251)	51960 (144; 120)	104,3
	16.08.38 12:00	10,4		158	-0,2				
8510,1	07.08.38 04:23	50,3	314	74	-0,1;	$8,8 \cdot 10^{-3}$	12509 (34; 269)	51922 (143; 82)	120,6
	17.08.38 12:00	10,3		178	-0,2				
8506,7	08.08.38 04:33	50,3	327	85	-0,2;	$-7,2 \cdot 10^{-6}$	12522 (34; 282)	51910 (144; 100)	137,7
	18.08.38 12:00	10,4		195	-0,2				
8467,5	09.08.38 04:30	50,1	330	88	-0,2;	$1,3 \cdot 10^{-5}$	12530 (34; 290)	51684 (143; 204)	154,5
	19.08.38 12:00	10,4		210	-0,2				
8442,7	10.08.38 04:29	50,0	338	99	-0,1;	$1,1 \cdot 10^{-4}$	12542 (34; 302)	51724 (143; 244)	170,8
	20.08.38 12:00	10,4		225	-0,1				
8405,5	11.08.38 04:28	49,8	343	109	-0,4;	$-3,6 \cdot 10^{-3}$	12553 (34; 313)	51780 (143; 300)	186,5
	21.08.38 12:00	10,4		240	-0,6				
8380,1	12.08.38 04:45	49,7	366	128	-0,7;	$-1,3 \cdot 10^{-4}$	12569 (34; 329)	51811 (143; 332)	201,9
	22.08.38 12:00	10,3		252	-0,7				

$V_{\text{хар}}$, м/с	D_0	t_k , сут	$F_0(t_0)$, град	$\Omega(t_0)$, град	$\Delta r_{\text{п}};$ $\Delta r_{\text{а}}$, км	Δi , град	$F_{\text{л}}(t_k)-F(t_0)$, град	$F_{\text{з}}(t_k)$, град	$\vartheta_{\text{л}}$, град
	$D_{\text{отл}}$	$t_{\text{р}}$, сут		$\Omega(t_k)$, град			(число витков; дробная часть, °)		
8322,9	13.08.38 04:40	49,4	382	139	-0,3;	$6,5 \cdot 10^{-5}$	12583 (34; 343)	51931 (144; 91)	217,3
	23.08.38 12:00	10,4		262	-0,5				
8284,3	14.08.38 04:09	49,2	400	153	-0,3;	$3,6 \cdot 10^{-3}$	12598 (34; 358)	52011 (144; 171)	233,2
	24.08.38 12:00	10,4		271	-0,4				
8223,5	15.08.38 04:13	48,9	407	158	-0,1;	$-2,4 \cdot 10^{-3}$	12606 (35; 6)	51150 (144; 310)	249,6
	25.08.38 12:00	10,4		281	-0,3				
8131,7	17.08.38 05:08	48,4	420	168	0,7;	$-1,6 \cdot 10^{-3}$	12617 (35; 17)	52757 (146; 197)	282,5
	27.08.38 12:02	10,3		299	-0,6				
7938,5	20.08.38 08:27	47,4	430	185	0,3;	$3,0 \cdot 10^{-4}$	12620 (35; 20)	52703 (146; 143)	327,4
	30.08.38 11:59	10,2		345	-0,4				
7911,7	21.08.38 10:02	47,2	428	188	0,3;	$1,2 \cdot 10^{-3}$	12617 (35; 17)	52744 (146; 184)	341,0
	31.08.38 12:00	10,1		1	-0,6				
7913,9	22.08.38 09:41	47,3	440	208	-0,8;	$-4,4 \cdot 10^{-4}$	12629 (35; 29)	52738 (146; 178)	354,2
	01.09.38 12:00	10,1		8	-1,0				

Строки с параметрами, соответствующими минимальным и максимальным значениям $V_{\text{хар}}$, выделены в табл. 2 жирным шрифтом. Разница между минимальным и максимальными значениями оценки затрат характеристической скорости в зависимости от истинной аномалии Луны составила ~ 600 м/с (7 % от максимального значения).

Заключение. С использованием разработанной ранее методики расчета пространственных траекторий перелета КА с ЭРДУ для определения оценки затрат характеристической скорости, необходимой на перелет между низкими окололунной и околоземной орбитами, получены оценки влияния дат старта на затраты характеристической скорости.

Краевые задачи пространственных перелетов КА между окололунной и околоземной орбитами решались в двух постановках. В обеих постановках истинная долгота на правом конце траектории (у Земли), долгота восходящего узла на левом конце траектории (у Луны) и на правом конце траектории (у Земли) являлись свободными переменными, а дата отлета от Луны фиксировалась. Различие постановок I и II краевых задач заключалось в том, что в постановке I аргумент широты в начальный момент времени был зафиксирован, а в постановке II истинная долгота в начальный момент времени была свободной. Введение постановки II обеспечило улучшение сходимости краевых задач по сравнению с постановкой I. При решении краевых задач пространственного перелета КА между низкими окололунной и околоземной

орбитами в постановке II (при полном обороте Луны вокруг Земли) было показано наличие двух минимумов и максимума в зависимости $V_{\text{хар}}(\vartheta_{\text{л}})$. В постановке I при условии наличия неполного витка обращения Луны вокруг Земли (на интервале 330°) разница между минимальным (7911,2 м/с) и максимальным (8455,5 м/с) значениями оценки затрат характеристической скорости составила ~ 500 м/с (6 % от максимального значения). В постановке II разница для целого витка обращения Луны вокруг Земли между минимальным (7911,7 м/с) и максимальным (8510,1 м/с) значениями оценки затрат характеристической скорости в зависимости от истинной аномалии Луны составила ~ 600 м/с (7 % от максимального значения).

Исследование показало, что при положении Луны в окрестности перицентра своей орбиты в момент отлета КА от Луны затраты характеристической скорости на перелет минимальны. Причем на кривой зависимости $V_{\text{хар}}(\vartheta_{\text{л}})$ наблюдается пологий оптимум, и при смещении примерно на 20° от перицентра ($\vartheta_{\text{л}} \sim 0$) изменение $V_{\text{хар}}$ составит меньше 1 % от минимального значения $V_{\text{хар}}$. Это свойство оптимальных траекторий целесообразно учитывать при поиске минимальных значений затрат характеристической скорости на перелет.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Гришин С.Д., Захаров Ю.А., Оделевский В.К. *Проектирование аппаратов с двигателями малой тяги*. Москва, Машиностроение, 1990, 224 с.
- [2] Kluever C.A., Pierson B.L. Optimal Earth-Moon Trajectories Using Nuclear Electric Propulsion. *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, 1997, vol. 20, no. 2, pp. 239–245.
- [3] Casaregola C., Geurts K., Pergola P., Biagioni L., Andrenucci M. Mission analysis and architecture definition for a small electric propulsion transfer module to the Moon. *Proceedings of the 43rd AIAA/ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion Conference and Exhibit*. AIAA 2007-5232, Cincinnati, USA, July 8–11, 2007.
- [4] Ивашкин В.В., Петухов В.Г. Траектории перелета с малой тягой между орбитами спутников Земли и Луны при использовании орбиты захвата Лунной. *ИИПМ им. М.В. Келдыша РАН. Препринт № 81*. Москва, 2008, 32 с.
- [5] Петухов В.Г. Робастное квазиоптимальное управление с обратной связью для перелета с малой тягой между некомпланарными эллиптической и круговой орбитами. *Вестник МАИ*, 2010, т. 17, № 3, с. 50–58.
- [6] Grebow D.J., Ozimek M.T., Howell K.C. Advanced modeling of optimal low-thrust lunar pole-sitter trajectories. *Proceedings of the 60th International Astronautical Congress*. IAC-09-C1.5.4, Daejeon, Korea, October 12–16, 2009.
- [7] Pérez-Palau D., Epenoy R. Indirect Optimization of low-thrust Earth–Moon transfers in the Sun–Earth–Moon System. *Proceedings of the 68th International Astronautical Congress*. IAC-17-C1.6.2, Adelaide, Australia, September 25–29, 2017.
- [8] Иванюхин А.В., Петухов В.Г., Юн Сон Ук. Траектории перелета к Луне с минимальной тягой. *Космические исследования*, 2022, т. 60, № 6, с. 517–527. DOI: 10.31857/S002342062205003X (дата обращения: 27.01.2025).

- [9] Кувшинова Е.Ю. Исследование оптимальных пространственных траекторий перелета с малой тягой в системе Земля – Луна. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2024, вып. 7 (151). DOI: 10.18698/2308-6033-2024-7-2374 (дата обращения: 05.11.2024).
- [10] Кувшинова Е.Ю. Применение многоразовых буксиров с ядерной электроракетной двигательной установкой в лунной программе. *Космонавтика и ракетостроение*, 2017, № 6 (99), с. 75–80.
- [11] Кувшинова Е.Ю. Методика определения оптимальной траектории перелета с малой тягой между околоземной и окололунной орбитами. *Труды МАИ*, 2013, вып. 68. URL: <http://trudy.mai.ru/published.php?ID=41742>
- [12] Шаманский В.Е. *Методы численного решения краевых задач. Часть II. Нелинейные краевые задачи и задачи на собственные значения для дифференциальных уравнений*. Киев, Наукова думка, 1966, 244 с.

Статья поступила в редакцию 16.04.2025

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Кувшинова Е.Ю. Исследование влияния даты старта космического аппарата с малой тягой на энергетические затраты на перелет в системе Земля — Луна. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2025, вып. 6. EDN HQMBVHX

Кувшинова Екатерина Юрьевна — канд. техн. наук, ведущий научный сотрудник АО ГНЦ «Центр Келдыша». Область научных интересов: двигательные и энергетические установки космических средств межорбитальной транспортировки, динамика полета космических аппаратов с малой тягой.
e-mail: kuvshinova@kerc.msk.ru, ekkuv@mail.ru

Studying the influence of the low-thrust spacecraft launch date on energy costs in the Earth–Moon system transfer

© E.Yu. Kuvshinova

State Scientific Center of the Russian Federation “Keldysh Research Center”,
Moscow, 125438, Russian Federation

The paper considers a problem of spatial transfer of a spacecraft using the electric propulsion system between a circumlunar orbit and the near-Earth one in a minimum time. It presents results of assessing the influence of the launch date (the Moon relative orbital position to the Earth) on the characteristic velocity costs required for a transfer between the lunar and near-Earth orbits. The problem is solved in a single statement (flight trajectory “end-to-end” computation), taking into account the Earth and the Moon gravity (without using the spheres action method); their position is determined according to the EPM 2008 ephemeris model. The Pontryagin maximum principle is applied to determine the optimal law for controlling the electric propulsion system thrust vector.

Keywords: spacecraft, optimal transfer trajectories, electric propulsion system, low thrust, transfer in the Earth–Moon system

REFERENCES

- [1] Grishin S.D., Zakharov Yu.A., Odelevsky V.K. *Proektirovanie apparatov s dvigatelyami maloy tyagi* [Design of spacecraft with low-trust engines]. Moscow, Mashinostroenie, 1990, 224 p.
- [2] Kluever C.A., Pierson B.L. Optimal Earth–Moon trajectories using nuclear electric propulsion. *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, 1997, vol. 20, no. 2, pp. 239–245.
- [3] Casaregola C., Geurts K., Pergola P., Biagioni L., Andrenucci M. Mission analysis and architecture definition for a small electric propulsion transfer module to the Moon. *Proceedings of the 43rd AIAA/ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion Conference and Exhibit*. AIAA 2007-5232, Cincinnati, USA, July 8–11, 2007.
- [4] Ivashkin V.V., Petukhov V.G. Traektorii pereleta s maloy tyagoy mezhdu orbitami sputnikov Zemli i Luny pri ispolzovanii orbity zakhvata Lunoy [Trajectories for flight between Earth and Moon satellite orbits using intermediate orbit with capture by Moon]. *Keldysh Institute of Applied Mathematics Russian Academy of Sciences. Prerprint no. 81*. Moscow, 2008, 32 p.
- [5] Petukhov V.G. Robastnoe kvazioptimalnoe upravlenie s obratnoy svyazyu dlya pereleta s maloy tyagoy mezhdu nekomplanarnymi ellipticheskoy i krugovoy orbitami [Robust suboptimal feedback control for low-thrust transfer between noncoplanar elliptical and circular orbits]. *Vestnik MAI — Aerospace MAI Journal*, 2010, vol. 17, no. 3, pp. 50–58.
- [6] Grebow D.J., Ozimek M.T., Howell K.C. Advanced modeling of optimal low-thrust lunar pole-sitter trajectories. *Proceedings of the 60th International Astronautical Congress*. IAC-09-C1.5.4, Daejeon, Korea, October 12–16, 2009.
- [7] Pérez-Palau D., Epenoy R. Indirect optimization of low-thrust Earth–Moon transfers in the Sun–Earth–Moon System. *Proceedings of the 68th International Astronautical Congress*. IAC-17-C1.6.2, Adelaide, Australia, September 25–29, 2017.

- [8] Ivanyukhin A.V., Petukhov V.G., Yoon S.W. Traektorii pereleta k Lune s minimalnoy tyagoy [Minimum-thrust flight trajectories to the Moon]. *Kosmicheskie issledovaniya — Cosmic Research*, 2022, vol. 60, no. 6, pp. 481–490. <https://doi.org/10.1134/S0010952522050033> (accessed April 15, 2024).
- [9] Kuvshinova E.Yu. Issledovanie optimalnykh prostranstvennykh traektoriy pereleta s maloy tyagoy v sisteme Zemlya – Luna [Studying optimal spatial trajectories in a low thrust flight within the Earth–Moon system]. *Inzhenerny zhurnal: nauka i innovatsii — Engineering Journal: Science and Innovation* 2024, iss. 7 (151). <https://doi.org/10.18698/2308-6033-2024-7-2374> (accessed November 5, 2024).
- [10] Kuvshinova E.Yu. Primenenie mnogorazovykh buksirov s yadernoy elektromotornoy dvigatelnoy ustanovkoy v lunnoy programme [Application of reusable tugs with nuclear electric propulsion system in the lunar program]. *Kosmonavtika i raketostroenie — Cosmonautics and Rocket Engineering*, 2017, no. 6 (99), pp. 75–80.
- [11] Kuvshinova E.Yu. Metodika opredeleniya optimalnoy traektorii pereleta s maloy tyagoy mezhdru okolozemnoy i okololunnoy orbitami [The methodology for determination of optimal flight path with low thrust between the low-Earth and low-Lunar orbits]. *Trudy MAI*, 2013, iss. 68. Available at: <https://www.trudymai.ru/published.php?ID=41742>
- [12] Shamanskij V.E. *Metody chislennogo resheniya kraevykh zadach na ETsVM. Chast 2. Nelineynye zadachi i zadachi na sobstvennye znacheniya dlya differentsialnykh uravneniy* [Methods for numerical solution of boundary value problems on a computer. Part II. Nonlinear boundary value problems and eigenvalue problems of differential equations]. Kiev, Naukova dumka Publ., 1966, 244 p.

Kuvshinova E.Yu., Cand. Sc. (Eng.), Lead Research Fellow, Keldysh Research Center. Research interests: propulsion and power plants of space vehicles of interorbital transportation, dynamics of low-thrust spacecraft flight.
e-mail: kuvshinova@kerc.msk.ru, ekkuv@mail.ru