

Расчет преднагруженных металлических конструкций в комплексе MSC Nastran на стойкость к воздействию случайной вибрационной нагрузки. Часть 1

© А.А. Шульга¹, Н.А. Аликин^{1,2}, Д.В. Барышева¹

¹ПАО «Яковлев», Москва, 125315, Российская Федерация

²МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Российская Федерация

Представлена методика расчета в комплексе MSC Nastran предварительно нагруженных металлических конструкций на стойкость к воздействию случайной вибрационной нагрузки. Описано аналитическое решение данной задачи для линейных систем с распределенными параметрами на примере предварительно растянутой шарнирно опертой балки. Проведено сравнение численного решения методом конечных элементов с аналитическим решением. В задаче о собственных колебаниях сравниваемыми величинами выбраны собственные частоты колебаний, а в задаче о случайных колебаниях — прогиб, напряжение и усталостная повреждаемость в центральной точке конструкции. Результаты расчета усталостной повреждаемости по представленной методике отвечают требованиям, предъявляемым к решению инженерных задач динамической прочности, поскольку обладают достаточно высокой точностью. Так, относительное отклонение сравниваемых величин составило не более 1 %.

Ключевые слова: случайная вибрация, поперечные колебания, преднагружение, стержень, аналитическое решение, метод конечных элементов, усталостная повреждаемость

Введение. В процессе эксплуатации на технические изделия действуют внешние переменные нагрузки, вызываемые силами различной природы и характера приложения. Например, в авиационной технике преобладающими являются нагрузки, обуславливаемые инерцией, аэродинамикой и работой двигателей.

Процессы нагружения в зависимости от отношения скорости их изменения к скорости распространения волн колебаний можно разделить на квазистатические и динамические. К первым в случае летательных аппаратов допустимо относить инерционные нагрузки при посадке и маневрах, нагрузки функционирования систем и т. д. При анализе усталости от действия квазистатических нагрузок целесообразно получать их зависимость от времени и проводить расчет усталостной повреждаемости по методике, заключающейся в поиске экстремумов, схематизации процесса и линейном суммировании повреждаемостей [1]. Однако есть и эксплуатационные нагрузки, которые представлены в широком спектральном диапазоне и имеют случайную составляющую. Основанные на понятии детерминизма методы классической механики могут быть недостаточны для прочностных расчетов, и появляется

необходимость использовать методы анализа случайных процессов, в частности корреляционную теорию [2]. Для авиационных конструкций примерами динамического стохастического воздействия являются работа двигателей, турбулентный пограничный слой, срывные аэродинамические явления и т. д.

Если случайный процесс нагружения изделия является стационарным и эргодическим, то информацию, достаточную для предсказания поведения изделия, можно получить по одной реализации процесса [2]. В случае пассажирского самолета условия стационарности и эргодичности могут выполняться на крейсерском режиме полета.

Упомянутая методика анализа усталости во временной области не всегда неприменима для описанных высокочастотных нагрузок, поскольку, во-первых, расчет усталостной повреждаемости требует большого количества вычислительных операций, и, во-вторых, может быть неизвестна зависимость высокочастотной нагрузки от времени. Но при этом есть возможность получать вероятностные характеристики процессов нагружения, необходимые для расчета усталостной повреждаемости спектральными методами [3, 4], в частности одномерными [5]. Так, вероятностные характеристики случайной вибрационной нагрузки для испытаний бортового авиационного оборудования представлены в Квалификационных требованиях КТ-160G/14G [6] разделе 8 «Вибрация».

В настоящее время основным инструментом для анализа прочности технических изделий является метод конечных элементов [7].

Цель данной статьи — дать описание методики расчета в конечно-элементном комплексе MSC Nastran предварительно нагруженной металлической конструкции на стойкость к воздействию случайной вибрационной нагрузки, а также провести сравнение результатов численных экспериментов с аналитическим решением для прорастянутой шарнирно опертой балки, поскольку стержни являются одними из основных элементов силовой конструкции самолета.

Аналитическое решение задачи случайных поперечных колебаний растянутого стержня. Используется модель Тимошенко поперечного изгиба прямого стержня с учетом инерции поворота сечения и растяжения постоянной продольной силой N [2, 8].

Для однозначного определения положения каждого сечения балки в движении вводятся две координаты: вертикальное перемещение упругой линии стержня в плоскости изгиба Oxz $w(x,t)$ и поворот сечения $\vartheta(x,t)$ (рис. 1, а), где x — продольная координата; t — время.

Согласно закону Гука, изгибающий момент M пропорционален производной угла поворота сечения $\partial\vartheta/\partial x$ [8]:

$$M = EI \frac{\partial \vartheta}{\partial x}, \quad (1)$$

а в соответствии с моделью балки Тимошенко поперечная сила Q пропорциональна углу сдвига сечения $(\partial w / \partial x - \vartheta)$ [8]:

$$Q = k_1 GA \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \vartheta \right). \quad (2)$$

Здесь E и G — модули упругости и сдвига материала стержня соответственно; I и A — момент инерции и площадь поперечного сечения стержня соответственно; k_1 — безразмерный коэффициент, учитывающий неравномерность распределения касательных напряжений по сечению.

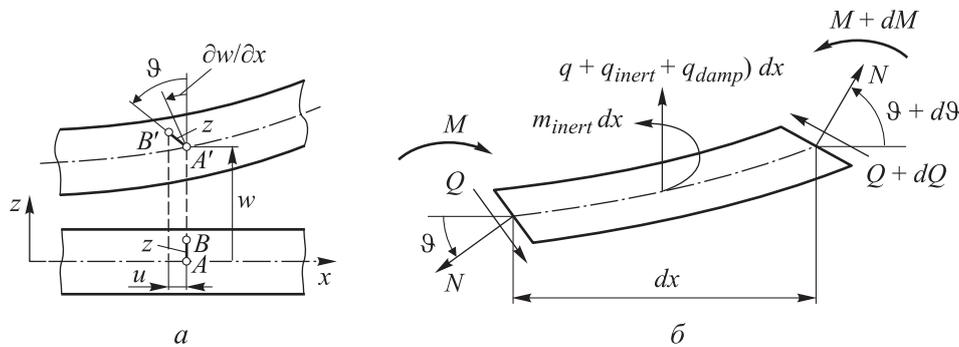


Рис. 1. Малый элемент стержня:
 а — перемещение сечения; б — равновесие

Рассматривается малый элемент стержня длиной dx (рис. 1, б), для которого с использованием принципа Д'Аламбера [8] составляются уравнения динамического равновесия по силам и моментам:

$$\begin{cases} \frac{\partial Q}{\partial x} + N \frac{\partial \vartheta}{\partial x} + q_{inert} + q_{damp} + q = 0, \\ \frac{\partial M}{\partial x} + Q + m_{inert} = 0, \end{cases} \quad (3)$$

где $q_{inert} dx$ — сила инерции, $q_{inert} dx = -\rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} dx$; $q_{damp} dx$ — сила сопротивления, $q_{damp} dx = -\alpha_1 \frac{\partial w}{\partial t} dx$; α_1 — коэффициент сопротивления; q — внешняя поперечная распределенная сила; $m_{inert} dx$ —

момент инерции вращения элемента стержня, $m_{inert} dx = -\rho I \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial t^2} dx$;

ρ — плотность материала стержня.

При подстановке в (3) выражений (1) и (2) получается разрешающая система уравнений относительно w и ϑ :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} \left[k_1 GA \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \vartheta \right) \right] + N \frac{\partial \vartheta}{\partial x} - \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \alpha_1 \frac{\partial w}{\partial t} + q = 0, \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(EI \frac{\partial \vartheta}{\partial x} \right) + k_1 GA \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \vartheta \right) - \rho I \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial t^2} = 0. \end{cases} \quad (4)$$

Далее приводится решение (4) для шарнирно опертого стержня с постоянным поперечным сечением (рис. 2).

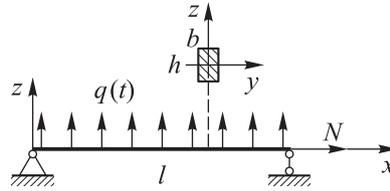


Рис. 2. Расчетная схема балки

Для решения задачи случайных колебаний линейной системы с распределенными детерминированными параметрами под действием случайной нагрузки большое распространение получил метод разложения движения системы по собственным формам колебаний [2, 8].

Решение задачи свободных колебаний $q = 0$ без учета демпфирования $\alpha_1 = 0$ определяется в виде суперпозиции собственных форм колебаний:

$$\begin{aligned} w(x, t) &= \sum_{j=1}^{\infty} B_j u_j(x) \cos(p_j t) = \sum_{j=1}^{\infty} B_j \sin(\varphi_j x) \cos(p_j t); \\ \vartheta(x, t) &= \sum_{j=1}^{\infty} C_j \theta_j(x) \cos(p_j t) = \sum_{j=1}^{\infty} C_j \cos(\varphi_j x) \cos(p_j t), \end{aligned} \quad (5)$$

для которого граничные условия (ГУ) на торцах $w|_{x=0,l} = 0$, $M|_{x=0,l} = 0$ выполняются автоматически. Здесь $u_j(x) = \sin(\varphi_j x)$ и $\theta_j(x) = \cos(\varphi_j x)$ — собственные формы колебаний системы, соответствующие собственным частотам (СЧ) p_j ; $\varphi_j = j\pi/l$ — вводимые параметры.

Подстановкой (5) в систему (4) с учетом свойства ортогональности форм колебаний [8] получаем однородную систему алгебраических уравнений относительно констант B_j и C_j для каждой собственной формы. Условие существования ее ненулевого решения приводит к следующему выражению для СЧ p_j :

$$p_j = \sqrt{\frac{k_1 G}{2\rho}} \times \sqrt{\left(\frac{A}{I} + \frac{E}{k_1 G} \varphi_j^2 + \varphi_j^2\right) \pm \sqrt{\left(\frac{A}{I} + \frac{E}{k_1 G} \varphi_j^2 + \varphi_j^2\right)^2 - 4\varphi_j^2 \left(\frac{E}{k_1 G} \varphi_j^2 + \frac{N}{k_1 G I}\right)}}. \quad (6)$$

Два значения p_j возникают из-за учета инерции поворота стержня. Колебания системы при меньшем значении p_j^- соответствуют движению «в фазе» упругой линии w и поворота сечения ϑ . Большее значение p_j^+ соответствует движению w и ϑ «в противофазе» [8].

Пусть q — случайная стационарная поперечная нагрузка с нулевым математическим ожиданием $M[q] = 0$. Тогда стационарное решение неоднородной системы (4) с учетом n собственных форм колебаний

$$\begin{aligned} w(x, t) &\approx \sum_{j=1}^n u_j(x) [r_{j0} + r_j(t)]; \\ \vartheta(x, t) &\approx \sum_{j=1}^n \theta_j(x) [\chi_{j0} + \chi_j(t)], \end{aligned} \quad (7)$$

где $[r_{j0} + r_j(t)]$ и $[\chi_{j0} + \chi_j(t)]$ — соответственно главные координаты прогиба w и угла поворота ϑ с постоянными r_{j0} , χ_{j0} и переменными $r_j(t)$, $\chi_j(t)$ составляющими.

Для анализа прочности необходимо получить вероятностные характеристики системы, определение которых рассматривается на примере прогиба $w(x, t)$.

Поскольку внешняя случайная нагрузка является стационарным процессом, главные координаты $[r_0 + r_j(t)]$, а следовательно, и функции прогиба $w(x, t)$ также являются стационарными. Автокорреляционная функция $w(x, t)$ определяется следующим выражением [2]:

$$\begin{aligned}
 K_w(x, t_1, t_2) &= M \left[\overset{\circ}{w}(x, t_1) \overset{\circ}{w}(x, t_2) \right] = \\
 &= M \left[\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n r_j(t_1) r_k(t_2) u_j(x) u_k(x) \right] = \\
 &= \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n K_{r_j r_k}(t_1, t_2) u_j(x) u_k(x), \quad (8)
 \end{aligned}$$

где $\overset{\circ}{w}(x, t) = \sum_{j=1}^n r_j(t) u_j(x)$ — центрированная величина прогиба;
 $K_{r_j r_k}(t_1, t_2) = M[r_j(t_1) r_k(t_2)]$ — взаимная корреляционная функция r_j
 и r_k .

Для стационарных случайных функций взаимная корреляционная функция зависит от разности значений времени $t_2 - t_1 = \tau$:
 $K_{r_j r_k}(t_1, t_2) = K_{r_j r_k}(\tau)$ и $K_w(x, t_1, t_2) = K_w(x, \tau)$.

Для определения $K_{r_j r_k}(\tau)$ предварительно необходимо найти взаимные спектральные плотности $S_{r_j r_k}(\omega)$, которые определяются выражением [2]

$$S_{r_j r_k}(\omega) = H_{r_j}(i\omega) H_{r_k}^*(i\omega) S_q(\omega), \quad (9)$$

где $H_{r_j}(i\omega)$ — частотная функция r_j ; $H_{r_k}^*$ — комплексно-сопряженное значение H_{r_k} ; $S_q(\omega)$ — спектральная плотность внешней нагрузки q ; ω — круговая частота.

Зная взаимную спектральную плотность $S_{r_j r_k}(\omega)$, взаимную корреляционную функцию $K_{r_j r_k}(\tau)$ можно определить по теореме Винера — Хинчина с помощью обратного преобразования Фурье [2]:

$$K_{r_j r_k}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S_{r_j r_k}(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega. \quad (10)$$

Тогда дисперсия прогиба $w(x, t)$ имеет вид

$$D_w(x) = K_w(x, \tau) \Big|_{\tau=0} = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n K_{r_j r_k}(0) u_j(x) u_k(x), \quad (11)$$

а его среднеквадратичное отклонение

$$\sigma_w(x) = \sqrt{D_w(x)}. \quad (12)$$

Спектральная плотность $w(x, t)$ определяется преобразованием Фурье соответствующей автокорреляционной функции [2]:

$$\begin{aligned} S_w(x, \omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} K_w(x, \tau) e^{-i\omega\tau} d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n K_{r_j r_k}(\tau) u_j(x) u_k(x) \right] e^{-i\omega\tau} d\tau = \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \left[\int_{-\infty}^{+\infty} K_{r_j r_k}(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \right] u_j(x) u_k(x) = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n S_{r_j r_k}(\omega) u_j(x) u_k(x). \quad (13) \end{aligned}$$

Аналогичные рассуждения справедливы и для других систем с распределенными параметрами, вектор состояния которых может быть представлен в виде суперпозиции собственных форм колебаний, например, для пластин и оболочек.

Таким образом, определение вероятностных характеристик системы сводится к отысканию собственных форм колебаний и частотных функций. Собственные формы колебаний прогиба $w(x, t)$ и угла поворота $\vartheta(x, t)$ стержня получены. Остается определить частотные функции.

Подстановкой (7) и использованием свойства ортогональности собственных форм колебаний получают n независимых систем уравнений относительно $r_j(t)$ и $\chi_j(t)$:

$$\begin{cases} -k_1 GA \varphi_j (\varphi_j r_j - \chi_j) - N \varphi_j \chi_j - \rho A \frac{\partial^2 r_j}{\partial t^2} - \alpha_1 \frac{\partial r_j}{\partial t} = \frac{2}{l} \int_0^l q(x, t) u_j(x) dx, \\ -EI \varphi_j^2 \chi_j + k_1 GA (\varphi_j r_j - \chi_j) - \rho I \frac{\partial^2 \chi_j}{\partial t^2} = 0. \end{cases} \quad (14)$$

Выполняется преобразование Лапласа [2]

$$\begin{cases} -k_1 GA \varphi_j (\varphi_j R_j - X_j) - N \varphi_j X_j - \rho A p^2 R_j - \alpha_1 p R_j = \\ = \frac{2}{l} \int_0^l \tilde{Q}(x, p) u_j(x) dx, \\ -EI \varphi_j^2 X_j + k_1 GA (\varphi_j R_j - X_j) - \rho I p^2 X_j = 0, \end{cases} \quad (15)$$

где $R_j(p)$, $X_j(p)$ и $\tilde{Q}(x, p)$ — изображения $r_j(t)$, $\chi_j(t)$ и $q(x, t)$ соответственно.

Для случая, когда внешняя нагрузка может быть представлена в виде $q(x, t) = q_1(x)q_0(t)$ произведения случайной функции времени $q_0(t)$ и детерминированной функции координаты $q_1(x)$, изображение $\tilde{Q}(x, p) = q_1(x)\tilde{Q}_0(p)$ и частотные функции r_j и χ_j определяются согласно выражениям

$$H_{r_j}(i\omega) = \left. \frac{R_j(p)}{\tilde{Q}_0(p)} \right|_{p=i\omega} = \frac{b_{0j} + b_{2j} \omega^2}{a_{4j} \omega^4 + i a_{3j} \omega^3 + a_{2j} \omega^2 + i a_{1j} \omega + a_{0j}}, \quad (16)$$

$$H_{\chi_j}(i\omega) = \left. \frac{X_j(p)}{\tilde{Q}_0(p)} \right|_{p=i\omega} = \frac{c_{0j} + c_{2j} \omega^2}{a_{4j} \omega^4 + i a_{3j} \omega^3 + a_{2j} \omega^2 + i a_{1j} \omega + a_{0j}},$$

где $a_i, i = \overline{0, 4}, b_0, b_2, c_0, c_2$ — параметры, вводимые для обозначений и равные

$$b_{0j} = 2(EI \varphi_j^2 + k_1 GA) \int_0^l q_1(x) u_j(x) dx, \quad b_{2j} = 2\rho I \int_0^l q_1(x) u_j(x) dx,$$

$$a_{0j} = -k_1 GA l \varphi_j^2 (EI \varphi_j^2 + N), \quad a_{1j} = -\alpha_1 l (EI \varphi_j^2 + k_1 GA), \quad (17)$$

$$a_{2j} = \rho A l (k_1 GA + k_1 GI \varphi_j^2 + EI \varphi_j^2), \quad a_{3j} = \rho I \alpha_1 l,$$

$$a_{4j} = -\rho^2 A I l, \quad c_{0j} = 2k_1 GA \varphi_j \int_0^l q_1(x) u_j(x) dx, \quad c_{2j} = 0.$$

Использование модели Эйлера — Бернулли, не учитывающей сдвига и инерцию поворота, для описания поведения поперечного изгиба шарнирно опертого стержня, растянутого постоянной силой N , постоянного поперечного сечения приводит к следующим формулам для СЧ и частотных функций r_j [8]:

$$p_j = \sqrt{\frac{\varphi_j^2}{\rho A} (EI \varphi_j^2 + N)}, \quad H_{r_j}(i\omega) = \frac{\frac{2}{\rho A \varphi_j} \int_0^l q_1(x) u_j(x) dx}{p_j^2 - \omega^2 + i \frac{\alpha_1}{\rho A} \omega}. \quad (18)$$

Определяются вероятностные характеристики максимальных растягивающих напряжений σ_{\max} . Согласно выражениям (1) и (7),

$$\sigma_{\max}(x, t) = \frac{M}{W_{\max}} + \frac{N}{A} = \frac{EI}{W_{\max}} \sum_{j=1}^n \frac{d\theta_j(x)}{dx} \chi_j(t) + \frac{N}{A}, \quad (19)$$

где W_{\max} — момент сопротивления сечения изгибу.

В случае прямоугольного поперечного сечения

$$\sigma_{\max}(x, t) = \frac{Eh}{2} \sum_{j=1}^n \frac{d\theta_j(x)}{dx} \chi_j(t) + \frac{N}{bh}, \quad (20)$$

где b и h — ширина и высота поперечного сечения соответственно.

Поскольку автокорреляционные функции вычисляются для центрированных величин, среднеквадратичное отклонение $\sigma_{\sigma_{\max}}$ может быть определено в соответствии с формулами (8)–(12), если за функции формы $u_j(x)$ принять $\sqrt{\frac{EI}{W_{\max}}} \frac{d\theta_j(x)}{dx}$.

Методика анализа усталости. После получения спектральной плотности компонентов напряженного состояния необходимо определить спектральную плотность эквивалентного напряжения $S_{\sigma_{\text{экв}}}$.

В случае поперечных колебаний стержня принимается

$$S_{\sigma_{\text{экв}}}(x, \omega) = S_{\sigma_{\max}}(x, \omega), \quad (21)$$

где $S_{\sigma_{\max}}(x, \omega)$ — спектральная плотность максимального нормального напряжения (в верхних или нижних волокнах).

Учет влияния постоянной преднагрузки на величину усталостной повреждаемости $D(x)$ заключается в масштабировании спектральной плотности отклика [9]:

$$S_{\sigma_{\text{экв}}}^*(x, \omega) = K^2(\sigma_{\text{экв } m}) S_{\sigma_{\text{экв}}}(x, \omega), \quad (22)$$

где $S_{\sigma_{\text{экв}}}^*(x, \omega)$ — спектральная плотность эквивалентного напряжения с учетом преднагрузки; $K^2(\sigma_{\text{экв } m})$ — коэффициент, учитывающий влияние преднагрузки; согласно модели Гербера,

$$K(\sigma_{\text{экв } m}) = \frac{1}{1 - \left(\frac{\sigma_{\text{экв } m}}{\sigma_T}\right)^2}, \quad (23)$$

где $\sigma_{\text{экв } m}$ — среднее значение эквивалентного напряжения (от воздействия только постоянной нагрузки), $\sigma_{\text{экв } m} = M[\sigma_{\text{экв}}]$; σ_T — предел текучести.

Известно много спектральных методов определения усталостной повреждаемости $D(x)$. В работе [3] они классифицированы авторами по принципу расчета на узкополосное приближение и четыре группы методов для анализа усталости от действия широкополосных процессов

нагружения. При анализе стационарных эргодических процессов нагружения целесообразно применять понятие интенсивности усталостной повреждаемости

$$d(x) = D(x) / T, \quad (24)$$

где T — длительность процесса, которая принимается равной 3 ч как время воздействия случайной жесткой вибрации на оборудование самолета с неподвижным крылом согласно КТ-160G/14G [6] разделу 8 «Вибрация».

Далее используется одномоментный метод, полученный с помощью энергетического подхода В.Л. Райхером [5] и широко распространенный в отечественной авиационной промышленности [10–15]. Согласно данному методу, интенсивность усталостной повреждаемости

$$d(x) = \frac{2^{\frac{m}{2}}}{2\pi A_{-1}} \Gamma\left(1 + \frac{m}{2}\right) \left[\eta_{\frac{2}{m}}(x) \right]^{\frac{m}{2}}, \quad (25)$$

где A_{-1} и m — параметры кривой усталости в случае ресурсных испытаний при симметричном цикле нагружения $R = -1$ (R — коэффициент асимметрии цикла нагружения); $\Gamma(\)$ — гамма-функция Эйлера; $\eta_i(x)$ — спектральный момент порядка i ,

$$\eta_i(x) = \int_{-\infty}^{\infty} |\omega|^i S_{\sigma_{\text{экв}}}^* d\omega. \quad (26)$$

Для других систем с распределенными параметрами, вектор состояния которых может быть представлен в виде суперпозиции собственных форм колебаний, справедливы аналогичные рассуждения.

Таким образом, после определения спектральной плотности эквивалентного напряжения $S_{\sigma_{\text{экв}}}^*$ расчет усталостной повреждаемости D сводится к получению спектрального момента $\eta_{2/m}$ (26) и вычислению интенсивности повреждаемости d (25), умноженной на длительность процесса нагружения T (24).

Методика анализа случайных колебаний преднагруженных конструкций в MSC Nastran. Ниже дается описание алгоритма решения задачи малых стационарных случайных колебаний систем, преднагруженных детерминированными постоянными усилиями, под действием случайных стационарных внешних сил. Применяются решатель MSC Nastran Random Response, использующий технику разложения движения системы по собственным формам колебаний (SEMFREQ — SOL 111), а также инструмент MSC Nastran Restart [16, 17].

Алгоритм содержит следующие этапы работы.

I. Провести модальный анализ преднагруженной конструкции:

а) подготовить входной файл нелинейного статического анализа MSC Nastran SOL 106 с детерминированной постоянной нагрузкой;

б) для создания «*.MASTER» файла, используемого при Restart, в секции Executive Control входного файла удалить в строке «INIT MASTER(S)» символы «(S)»;

в) в секции Bulk Data добавить набор параметров для решения задачи на собственные значения с помощью команды «EIGL» или «EIGRL»;

г) в секции Case Control добавить «METHOD = N», где вместо N подставлен идентификатор (ID) набора параметров, определенного в предыдущем пункте;

д) в секции Bulk Data объявить параметр NMLOOP со значением, равным номеру шага по нагрузке в нелинейном анализе, после которого будет проведен модальный анализ; если это значение больше числа инкрементов в нелинейном анализе (секция Bulk Data, команда NLPARM, поле NINC) или равно ему, то собственные частоты и формы будут вычислены после последнего шага по нагрузке;

е) запустить расчет.

II. Провести анализ случайных колебаний преднагруженной конструкции:

а) подготовить входной файл для анализа случайных колебаний с разложением движения системы по собственным формам колебаний MSC Nastran SOL 111; при этом Load Set со случайной нагрузкой должен иметь ID отличный от ID Load Set с детерминированной нагрузкой, действующей при модальном анализе преднагруженной конструкции;

б) в начало секции Executive Control добавить строки «RESTART VERSION=LAST KEEP» и «ASSIGN MASTER=modal.MASTER», где «modal.MASTER» соответствует файлу для Restart, созданному автоматически MSC Nastran во время модального анализа преднагруженной конструкции (п. I);

в) удалить часть входного файла, которая соответствует описанию КЭМ: узлы, элементы, модели материалов, используемые свойства элементов, граничные условия и т. д.; нагрузки, прикладываемые при анализе случайных колебаний удалять не нужно;

г) запустить расчет.

Таким образом, при анализе случайных процессов заданная преднагрузка считается детерминированной и постоянной, а для расчета используются матрицы масс и касательных жесткостей в преднагруженном положении системы, определяемые в нелинейном статическом анализе.

Для проведения MSC Nastran Random Response требуется описать во входном файле анализа дискретные значения циклических частот f_i , для которых будут вычислены спектральные плотности откликов системы. Среднеквадратичные значения откликов определяются как квадратный корень дисперсии, которая, в свою очередь, вычисляется с помощью численного интегрирования спектральной плотности [17]. При этом границы интегрирования определяются диапазоном частот, от выбора и дискретизации которого зависит точность результат расчета.

Важно покрыть всю рассматриваемую область частот, так как подробное описание только резонансных областей зачастую оказывается недостаточным. Если в области после резонанса графики спектральных плотностей достаточно быстро затухают [2], то в области до резонанса (особенно перед первым резонансом) при силовом возмущении отклик системы может быть значительным. Этот эффект показан на рис. 3, который представлен далее.

Дискретизацию частот удобно проводить с использованием команд MSC Nastran `FREQ1`, `FREQ2`, ..., `FREQ5` [17] секции Bulk Data, которые позволяют равномерно дискретизировать частоты во всем диапазоне и сгустить их в окрестностях СЧ. Такой подход позволяет получить удовлетворительную точность расчета при сравнительно небольшом наборе частот, что важно для моделей большой размерности.

В качестве результатов MSC Nastran Random Response возвращает дискретную одностороннюю спектральную плотность отклика $W_i = W(f_i)$, соответствующую заданным значениям циклической частоты f_i и связанную с двусторонним спектром $S(f)$ соотношением [3]

$$W(f) = \begin{cases} 0, & f < 0, \\ S(f), & f = 0, \\ 2S(f), & f > 0. \end{cases} \quad (27)$$

Вычисление усталостной повреждаемости D по методике, описанной ранее, реализовано на Python. Для расчета данной величины необходима спектральная плотность $S(\omega)$, соответствующая круговой частоте ω и связанная с $S(f)$ следующим образом [2]:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} S(\omega) d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} S(\omega) 2\pi df = \int_{-\infty}^{+\infty} S(f) df \Rightarrow S(f) = 2\pi S(\omega). \quad (28)$$

Численное решение задачи случайных поперечных колебаний растянутого стержня. Для конечно-элементного анализа используется комплекс MSC Nastran. Применяется двухузловой балочный конечный элемент (BEAM), основанный на теории балки Тимошенко [17] и учитывающий инерцию поворота сечения ввиду наличия ненулевых компонент в матрице масс у поворотных степеней свободы.

В расчетном ядре MSC Nastran можно использовать согласованную и несогласованную матрицы масс конечных элементов [7]. Согласованная (англ. coupled или consistent) матрица масс представляет собой дискретную аппроксимацию непрерывного распределения массы по объему элемента. Несогласованная (англ. lumped) матрица масс заменяет непрерывное распределение массы по элементу на сосредоточенные массы в его узлах. Такая матрица является диагональной, что делает ее более эффективной в вычислительном плане.

Хотя согласованная матрица является более «естественной» в плане построения, нельзя однозначно утверждать, что она приводит к более «точным» результатам, чем несогласованная матрица. Наиболее «точное» описание отклика динамических систем дает линейная комбинация этих двух матриц [7]. На результаты анализа случайных колебаний влияет не только жесткость системы, но и ее инерционность, поэтому важно понимать, насколько могут отличаться результаты, полученные с использованием различных матриц масс.

Сравнительный анализ. Проводится сравнение аналитического и конечно-элементного решения задачи свободных и вынужденных стационарных случайных поперечных колебаний шарнирно опертого стержня постоянного поперечного сечения (см. рис. 2). Стержень нагружен продольной постоянной детерминированной растягивающей силой N и поперечной случайной равномерно распределенной по длине стержня нагрузкой q с нулевым математическим ожиданием.

Исходные данные: длина стержня $l = 1$ м; ширина $b = 3$ мм и высота $h = 4$ мм поперечного сечения; момент инерции сечения в плоскости изгиба $I = bh^3 / 12 = 16$ мм⁴; модуль упругости $E = 68,65$ ГПа, предел текучести $\sigma_T = 300$ МПа, коэффициент Пуассона $\mu = 0,3$ и плотность $\rho = 2700$ кг/м³ материала стержня; константа и степень кривой усталости $A_{-1} = 10^{14}$ МПа ^{m} и $m = 4$ соответственно; спектральная плотность внешней нагрузки $S_q = 9,617 \cdot 10^{-2}$ Н²/(м²·Гц) при $f = [2, 100]$ Гц; демпфирование $\zeta = 0,04$ в долях от критического. Исходные данные взяты из работы [16].

В аналитическом решении для каждой собственной формы используется следующее значение коэффициента демпфирования α_1 :

$$\alpha_1 = 2\rho A \zeta p_j. \quad (29)$$

В случае стержня прямоугольного поперечного сечения значение коэффициента неравномерности распределения касательных напряжений по сечению принимается равным $k_1 = 5/6$.

Для конечно-элементного решения по длине стержня располагаются 10 элементов равной длины.

Пять низших СЧ системы, соответствующих колебаниям в плоскости приложения поперечной нагрузки, при разной растягивающей силе N представлены в табл. 1, 2. Результаты аналитического решения получены для моделей балки Тимошенко и Эйлера — Бернулли. Следует отметить, что для модели Тимошенко полученные СЧ соответствуют колебаниям прогиба w и угла поворота ϑ «в фазе» p_j^- . Результаты конечно-элементного решения получены при использовании несогласованной и согласованной матриц масс.

Таблица 1

Собственные частоты нерастянутого стержня, $N = 0$

Методы	p_1 , Гц	p_2 , Гц	p_3 , Гц	p_4 , Гц	p_5 , Гц
Аналитические решения: Тимошенко Эйлер	9,145677	36,57973	82,29325	146,2714	228,4934
	9,145925	36,58370	82,31332	146,3348	228,6481
MSC Nastran, матрицы масс: несогласованная согласованная	9,145616	36,57535	82,23711	145,9047	226,8157
	9,145744	36,58382	82,33882	146,5216	229,4222

Таблица 2

Собственные частоты растянутого стержня, $N = 5$ Н

Методы	p_1 , Гц	p_2 , Гц	p_3 , Гц	p_4 , Гц	p_5 , Гц
Аналитические решения: Тимошенко Эйлер	11,05539	38,63113	84,37554	148,3646	230,5915
	11,05569	38,63532	84,39612	148,4290	230,7476
MSC Nastran, матрицы масс: несогласованная согласованная	11,05543	38,62736	84,32092	147,9992	228,9072
	11,05559	38,63630	84,42514	148,6251	231,5407

Среднеквадратичные отклонения прогиба стержня и максимального растягивающего напряжения в центральной точке $x = l/2$ при различной растягивающей силе с учетом пяти низших СЧ, соответствующих колебанию системы в плоскости приложения поперечной нагрузки, приведены в табл. 3, 4.

Таблица 3

Среднеквадратичное отклонение прогиба в центральной точке стержня

Методы	$\sigma_w(l/2) \cdot 10^2$, м при	
	$N = 0$	$N = 5$ Н
Аналитические решения: Тимошенко Эйлер	4,917557	3,704179
	4,917389	3,704053
MSC Nastran, матрицы масс: несогласованная согласованная	4,879987	3,675880
	4,880021	3,675904

Среднеквадратичное отклонение максимальных напряжений
в центральной точке стержня

Методы	$\sigma_{\sigma_{\max}}(l/2)$, МПа при	
	$N = 0$	$N = 5 \text{ Н}$
Аналитические решения: Тимошенко Эйлер	67,042358	50,682464
	67,042843	50,682825
MSC Nastran, матрицы масс: несогласованная согласованная	67,079616	50,712208
	67,067172	50,697324

Графики спектральной плотности максимального нормального напряжения в центре балки представлены на рис. 3. Аналитические и численные (конечно-элементные) решения MSC Nastran оказались достаточно близки, поэтому на графике показано только одно аналитическое решение и одно конечно-элементное. Значения усталостной повреждаемости в центральной точке стержня приведены в табл. 5.

Согласно данным табл. 1 и 2, все аналитически вычисленные СЧ, за исключением первой, полученной по модели балки Эйлера — Бернулли, лежат между частотами, вычисленными MSC Nastran с использованием несогласованной и согласованной матриц масс. При этом с помощью несогласованной матрицы масс во всех рассмотренных случаях значения СЧ получились меньше, чем с помощью согласованной.

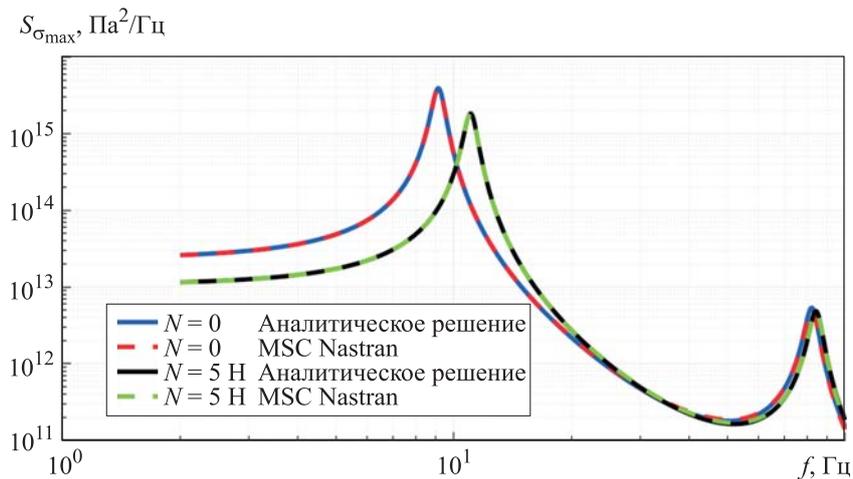


Рис. 3. Спектральная плотность $S_{\sigma_{\max}}(x, f)$ максимального нормального напряжения в центре балки $x = l/2$

Таблица 5

Усталостная повреждаемость центральной точке стержня

Методы	$D(l/2)$ при	
	$N = 0$	$N = 5 \text{ Н}$
Аналитические решения: Тимошенко Эйлер	0,164114	0,0659922
	0,164125	0,0659966
MSC Nastran, матрицы масс: несогласованная согласованная	0,164490	0,0661572
	0,164266	0,0660194

Таблица 6

Средние относительные отклонения результатов анализа балки

Метод	Среднее относительное отклонение, %			
	Собственные частоты	$\sigma_w(l/2)$	$\sigma_{\sigma_{\max}}(l/2)$	$D(l/2)$
Тимошенко и Эйлер	-0,03	< 0,01	> -0,01	-0,01
Согласованная матрица масс и несогласованная матрица масс	0,34	< 0,01	-0,02	-0,17
Тимошенко и несогласованная матрица масс	0,21	0,76	-0,06	-0,24
Тимошенко и согласованная матрица масс	-0,13	0,76	-0,03	-0,07

Относительное отклонение A и B вычисляется по формуле $(A - B)/A \cdot 100 \%$.

Относительные отклонения результатов, полученных с использованием разных аналитических моделей и конечно-элементных подходов, представлены в табл. 6. Приведены средние значения отклонений результатов для преднагруженной и не преднагруженной конструкции, так как в обоих расчетных случаях результаты оказались достаточно близки.

При анализе случайных стационарных колебаний балки с помощью конечно-элементного решения удалось получить оценку «сверху». Аналитическое решение в центре балки оказалось более податливым, чем конечно-элементное.

Заключение. Описана методика расчета предварительно нагруженных металлических конструкций на стойкость к воздействию случайной вибрационной нагрузки в MSC Nastran. Приведено также аналитическое решение данной задачи для линейных систем с распределенными параметрами, вектор состояния которых может быть представлен в виде суперпозиции собственных форм колебаний. Выполнено

сравнение аналитического и численного решений для предрастянутой шарнирно опертой балки. Аналитическое решение получено для двух моделей: учитывающей сдвиги и пренебрегающей ими. Конечно-элементные решения получены в MSC Nastran с использованием согласованной и несогласованной матриц масс. Для расчета усталостной повреждаемости использован одномоментный метод.

В задаче о собственных колебаниях сравниваемыми величинами выбраны собственные частоты колебаний, а в задаче о случайных колебаниях — прогиб, напряжение и усталостная повреждаемость в центральной точке конструкции. Следует отметить, что напряжения от растяжения в рассмотренном примере гораздо меньше изгибных, и возрастание собственных частот, соответствующее повышению жесткости конструкции, сказывается сильнее, чем добавление напряжений от растяжения. Поэтому усталостная повреждаемость предварительно растянутой конструкции получилась ниже, чем у конструкции без такой преднагрузки.

При рассмотрении случайных стационарных поперечных колебаний с помощью метода конечных элементов по сравнению с выбранными аналитическими моделями в случае балки удалось получить консервативную оценку с относительным отклонением сравниваемых величин не более 1 %. Консервативность конечно-элементного решения поставленной задачи и стабильность его точности при различных параметрах конструкции являются предметами дополнительного исследования, и в данной работе не изучались. Для более подробной оценки необходимо использовать некоторую суммарную характеристику. Так, для модального анализа можно взять работу сил инерции на собственных формах колебаний, а для анализа случайных процессов — среднеквадратичное отклонение работы внешних сил на возникающих перемещениях.

Важно подчеркнуть, что полученные результаты обладают достаточно высокой точностью: относительное отклонение сравниваемых величин в рассмотренном примере не превысило 1 %. Таким образом, описанная методика подходит для решения инженерных задач.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Palmgren A. Die Lebensdauer von Kugellagern. *Zeitschrift Des Vereines Deutscher Ingenieure*, 1924, Bd. 68 (14), S. 339–341.
- [2] Светлицкий В.А. *Случайные колебания механических систем*. Москва, Машиностроение, 1976, 216 с.
- [3] Zorman A., Slavič J., Boltežar M. Vibration fatigue by spectral methods — A review with open-source support. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2023, no. 190, pp. 110–149.
- [4] Шульга А.А., Никитин Е.А., Медведский А.Л. Сравнительный анализ спектральных методов расчета усталостной повреждаемости элементов конструкции авиационной техники. *Сборник тезисов III Научно-практической*

- конференции аспирантов (г. Жуковский, Технопарк ЦАГИ, 3 декабря 2024 г.). Жуковский, ЦАГИ, 2024, с. 110–118.
- [5] Райхер В.Л. Гипотеза спектрального суммирования и ее применение для определения усталостной долговечности при действии случайных нагрузок. *Труды ЦАГИ*, 1969, № 1134, с. 3–39.
- [6] *Квалификационные требования. КТ-160G/14G*. Условия эксплуатации и окружающей среды для бортового авиационного оборудования (Внешние воздействующие факторы — ВВФ). Требования, нормы и методы испытаний. 2015, 462 с.
- [7] Bathe K.J. *Finite Element Procedure*. Second edition. Klaus-Jurgen Bathe, 2014, 1065 p.
- [8] Бидерман В.Л. *Теория механических колебаний*. Москва, ЛЕНАНД, 2017, 416 с.
- [9] Nieslony A., Böhm M. Mean stress value in spectral method for the determination of fatigue life. *Acta Mechanica et Automatica*, 2012, no. 6, pp. 71–74.
- [10] Шульга А.А., Барышева Д.В., Медведский А.Л. Оценка вклада высокочастотной составляющей нагрузки в усталостную повреждаемость металлических конструкций. *Сборник тезисов II научно-практической конференции аспирантов (г. Жуковский, Технопарк ЦАГИ, 27 сентября 2023 г.)*. Жуковский, ЦАГИ, 2023, с. 39–46.
- [11] Шульга А.А., Никитин Е.А., Медведский А.Л. Оценка вклада высокочастотной составляющей нагрузки в усталостную повреждаемость авиационных конструкций одномоментным методом. *Сборник докладов IX Всероссийской научно-технической конференции «Проблемы и перспективы развития авиации, наземного транспорта и энергетики» (Казань, КНИТУ – КАИ, 3–4 октября 2024 г.)*. Казань, КАИ, 2024, с. 50–52.
- [12] Ильичев В.Д. Применение спектрального суммирования усталостных повреждений при сложно-напряженном состоянии конструкции. *Ученые записки ЦАГИ*, 1979, т. 10, № 2, с. 65–75.
- [13] Зарецкий М.В., Сидоренко А.С. Оценка показателей долговечности конструкции авиационного изделия при действии случайных нагрузок. *Труды МАИ*, 2013, № 70, 8 с. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=44479>
- [14] Рыбаулин А.Г. *Исследование динамического напряженного состояния и долговечности тонкостенных авиационных конструкций с дискретными сварными соединениями при случайном нагружении: спец. 01.02.06 «Динамика, прочность машин, приборов и аппаратуры»: дис. ... канд. техн. наук*. Москва, 2017, 121 с.
- [15] Чухлебов Р.В. *Экспериментально-теоретический метод оценки вибрационной прочности авиационных изделий при действии полетных нагрузок: спец. 01.02.06 «Динамика, прочность машин, приборов и аппаратуры»: дис. ... канд. техн. наук*. Москва, 2019, 98 с.
- [16] Xiaocheng X. *Random response analysis of pre-stressed structures using MSC/NASTRAN*. Beijing, China Academy of Launch Vehicle Technology, 1999, 5 p.
- [17] *MSC NASTRAN 2022.1 Quick Reference Guide*. Newport Beach, MSC Software Corporation, 2022, 3418 p.

Статья поступила в редакцию 21.04.2025

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Шульга А.А., Аликин Н.А., Барышева Д.В. Расчет преднагруженных металлических конструкций в комплексе MSC Nastran на стойкость к воздействию случайной вибрационной нагрузки. Часть 1. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2025, вып. 6. EDN IFMLUF

Шульга Александр Андреевич — инженер-конструктор II категории ПАО «Яковлев». e-mail: sozencz@mail.ru

Аликин Николай Анатольевич — студент кафедры «Прикладная механика» МГТУ им. Н.Э. Баумана; инженер-конструктор ПАО «Яковлев». e-mail: nickalikin@gmail.com

Барышева Дарья Валерьевна — начальник отдела ПАО «Яковлев». e-mail: dariya.barysheva@yakovlev.ru

Random response analysis of preloaded metal designs using the MSC Nastran software package. Part 1

© A.A. Shulga¹, N.A. Alikin^{1,2}, D.V. Barysheva¹

¹PJSC Yakovlev, Moscow, 125315, Russian Federation

²Bauman Moscow State Technical University, Moscow, 105005, Russian Federation

The paper presents a methodology of random response analysis of preloaded metal designs carried out in the MSC Nastran software package. It describes an analytical solution to this problem for the linear systems with distributed parameters using a preloaded pinned beam as an example. Comparison of the numerical solution using the finite element method against the analytical solution is provided. The compared values are the natural vibration frequencies in the natural vibrations problem, and in the problem of random vibrations, they include displacement, stress, and fatigue damage in the structure central point. Results of computing the fatigue damage according to the presented methodology are meeting the requirements in solving the dynamic strength engineering problems, since they are of sufficiently high accuracy. Thus, relative deviation in the compared values is no more than 1%.

Keywords: random vibration, transverse vibrations, preload, beam, analytical solution, finite element method, fatigue damage

REFERENCES

- [1] Palmgren A. Die Lebensdauer von Kugellagern. *Zeitschrift Des Vereines Deutscher Ingenieure*, 1924, Bd. 68 (14), S. 339–341.
- [2] Svetlitskiy V.A. *Sluchainye kolebaniya mekhanicheskikh sistem* [Random vibrations in the mechanical systems]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1976, 216 p.
- [3] Zorman A., Slavič J., Boltežar M. Vibration fatigue by spectral methods — A review with open-source support. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2023, no. 190, pp. 110–149.
- [4] Shulga A.A., Nikitin E.A., Medvedskii A.L. Sravnitelnyi analiz spektralnykh metodov rascheta ustalostnoy povrezhdaemosti elementov konstruktivnoy aviatsionnoy tekhniki [Comparative analysis of spectral methods for computing fatigue damage of the aircraft equipment structural elements]. *Sbornik tezisev III Nauchno-prakticheskoy konferentsii aspirantov (g. Zhukovskiy, Tekhnopark TsAGI, 3 dekabrya 2024 g.)* [Collection of abstracts of the III Scientific and Practical Conference of the Postgraduate Students (Zhukovsky, TsAGI Technopark, December 3, 2024)]. Zhukovsky, TsAGI Publ., 2024, pp. 110–118.
- [5] Raikher V.L. Gipoteza spektralnogo summirovaniya i ee primeneniye dlya opredeleniya ustalostnoy dolgovechnosti pri deystvii sluchaynykh nagruzok [Spectral summation hypothesis and its application in determining fatigue life under the random loads]. *Trudy TsAGI*, 1969, no. 1134, pp. 3–39.
- [6] *Kvalifikatsionnye trebovaniya. KT-160G/14G* [Qualification requirements. KT-160G/14G]. Usloviya ekspluatatsii i okruzhayushchey sredy dlya bortovogo aviatsionnogo oborudovaniya (Vneshnie vozdeystviyushchie faktory – VVF). Trebovaniya, normy i metody ispytaniy [Operating and environmental conditions for the on-board aviation equipment (External influencing factors – EIF). Requirements, standards and test methods]. 2015, 462 p.

- [7] Bathe K.J. *Finite element procedure*. Second edition. Klaus-Jurgen Bathe, 2014, 1065 p.
- [8] Biderman V.L. *Teoriya mekhanicheskikh kolebaniy* [Theory of mechanical oscillations]. Moscow, LENAND Publ., 2017, 416 p.
- [9] Niesiony A., Böhm M. Mean stress value in spectral method for the determination of fatigue life. *Acta Mechanica et Automatica*, 2012, no. 6, pp. 71–74.
- [10] Shulga A.A., Barysheva D.V., Medvedskiy A.L. Otsenka vklada vysokochastotnoy sostavlyayushchey nagruzki v ustalostnuyu povrezhdaemost metallicheskikh konstruksii [Assessment of contribution of the load high-frequency component to fatigue damage of the metal structures]. *Sbornik tezisov II nauchno-prakticheskoy konferentsii aspirantov (g. Zhukovsky, Tekhnopark TsAGI, 27 sentyabrya 2023 g.)* [Collection of abstracts of the II Scientific and Practical Conference of the Postgraduate Students (Zhukovsky, TsAGI Technopark, September 27, 2023)]. Zhukovsky, TsAGI Publ., 2023, pp. 39–46.
- [11] Shulga A.A., Nikitin E.A., Medvedskiy A.L. Otsenka vklada vysokochastotnoy sostavlyayushchey nagruzki v ustalostnuyu povrezhdaemost aviatsionnykh konstruksiy odnomomentnym metodom [Assessment of contribution of the load high-frequency component to fatigue damage of the aircraft structures using the one-stage method]. *Sbornik dokladov IX Vserossiyskoy nauchno-tekhnicheskoy konferentsii "Problemy i perspektivy razvitiya aviatsii, nazemnogo transporta i energetiki" (g. Kazan, KNITU "KAI", 3-4 oktyabrya 2024 g.)* [Collection of reports of the IX All-Russian Scientific and Technical Conference "Problems and Prospects for the Development of Aviation, Land Transport and Energy" (Kazan, KNITU "KAI", October 3-4, 2024)]. Kazan, KAI Publ., 2024, pp. 50–52.
- [12] Ilichev V.D. Primenenie spektralnogo summirovaniya ustalostnykh povrezhdeniy pri slozhno-napryazhennom sostoyanii konstruksii [Application of spectral summation of fatigue damage in the complex stress state of a structure]. *Uchenye zapiski TsAGI — TsAGI Science Journal*, 1979, vol. 10, no. 2, pp. 65–75.
- [13] Zareckiy M.V., Sidorenko A.S. Otsenka pokazateley dolgovechnosti konstruksii aviatsionnogo izdeliya pri deystvii sluchainykh nagruzok [Estimation of longevity index for flying vehicles structures under random loadings]. *Trudy MAI*, 2013, no. 70, 8 p. Available at: <https://trudymai.ru/published.php?ID=44479>
- [14] Rybaulin A.G. *Issledovanie dinamicheskogo napryazhennogo sostoyaniya i dolgovechnosti tonkostennykh aviatsionnykh konstruksii s diskretnymi svarnymi soedineniyami pri sluchaynom nagruzhении: spets. 01.02.06 – Dinamika, prochnost mashin, priborov i apparatury: Dis. ... kand. tekhn. nauk* [Study of dynamic stress state and durability of the thin-walled aircraft structures with discrete welded joints under random loading. Spec. 01.02.06 – Dynamics, strength of machines, devices and equipment: Diss. ... Cand. Sc. (Eng.)]. Moscow, 2017, 121 p.
- [15] Chukhlebov R.V. *Eksperimentalno-teoreticheskiiy metod otsenki vibratsionnoy prochnosti aviatsionnykh izdeliy pri deystvii poletnykh nagruzok: spets. 01.02.06 – Dinamika, prochnost mashin, priborov i apparatury: Dis. ... kand. tekhn. nau* [Experimental and theoretical method for assessing vibration strength of the aircraft products under the flight loads. Spec. 01.02.06 – Dynamics, strength of machines, devices and equipment: Diss. ... Cand. Sc. (Eng.)]. Moscow, 2019, 98 p.
- [16] Xiaocheng X. *Random response analysis of pre-stressed structures using MSC/NASTRAN*. Beijing, China Academy of Launch Vehicle Technology, 1999, 5 p.
- [17] *MSC NASTRAN 2022.1 Quick Reference Guide*. Newport Beach, MSC Software Corporation, 2022, 3418 p.

Shulga A.A., Design Engineer of the II category, JSC Yakovlev Corporation.
e-mail: sozencz@mail.ru

Alikin N.A., Student, Department of Applied Mechanics, Bauman Moscow State Technical University; Design Engineer, JSC Yakovlev Corporation.
e-mail: nickalikin@gmail.com

Barysheva D.V., Department Head, JSC Yakovlev Corporation.
e-mail: dariya.barysheva@yakovlev.ru