

Весовая эффективность анизотридных круговых цилиндрических оболочек при поперечном изгибе и внутреннем давлении

© Л.П. Железнов

ФАУ «СибНИА имени С.А. Чаплыгина»,
Новосибирск, 630051, Российская Федерация
СГУПС, Новосибирск, 630049, Российская Федерация

Изложены результаты исследований, полученные на основе разработанной автором методики, которая реализует метод конечных элементов для решения задач прочности и устойчивости подкрепленных цилиндрических оболочек, выполненных из композиционного материала, с учетом моментности и нелинейности их докритического напряженно-деформированного состояния. Геометрически нелинейная задача устойчивости решена методом конечных элементов с использованием линеаризации Ньютона — Канторовича. Критические нагрузки определялись в процессе решения нелинейной задачи на основе критерия Сильвестра. При решении задачи были использованы разработанные автором на основе гипотезы Тимошенко конечные элементы композитных цилиндрических оболочек естественной кривизны, в аппроксимации перемещений которых в явном виде выделены их жесткие перемещения, что положительно влияет на сходимость решения. Исследована устойчивость при поперечном изгибе с внутренним давлением анизотридной круговой цилиндрической оболочки. Выяснено влияние нелинейности деформирования, внутреннего давления, жесткости подкрепляющего набора, углов укладки подкреплений и толщины оболочки на критические нагрузки потери устойчивости оболочки и весовую эффективность применения композиционных материалов.

Ключевые слова: поперечный изгиб, внутреннее давление, цилиндрические композитные оболочки, нелинейное деформирование, устойчивость, весовая эффективность, метод конечных элементов

Введение. В настоящее время в конструкциях современных летательных аппаратов (ЛА), особенно в конструкциях космических аппаратов (КА), нашли широкое применение анизотридные сетчатые конструкции из композиционных материалов, которые изготавливаются методом непрерывной намотки. В конструкциях ЛА анизотридные конструкции можно применять либо как самостоятельные агрегаты, состоящие только из подкреплений, либо совместно с обшивкой, что необходимо для фюзеляжей самолетов с целью восприятия внутреннего избыточного давления. Основополагающий вклад в разработку сетчатых композиционных конструкций внес коллектив школы В.В. Васильева [1]. Аналитические оценки напряженно-деформированного состояния регулярной сетчатой оболочки с использованием вариационного принципа и безмоментной теории оболочек, а также заменой реберной структуры условно сплошным слоем с осредненной жесткостью

приведены в работе [2]. Дискретный подход к моделированию сетчатых анизотридных конструкций использовали В.В. Васильев, А.Ф. Разин, А.А. Бабичев, В.П. Булдаков, М.В. Никитин и др. [3, 4]. Тем не менее методы расчета на прочность и устойчивость сетчатых конструкций с учетом нелинейности исходного напряженно-деформированного состояния в условиях неоднородного, неосесимметричного нагружения в настоящее время недостаточно развиты. Большинство известных решений задач устойчивости оболочек получено аналитическими методами и, как правило, в линейном приближении, т. е. в классической постановке [5–7], и крайне мало работ — при нелинейном деформировании [8–11]. Поэтому разработка надежных и эффективных методов расчета анизотридных конструкций является, несомненно, актуальной задачей. В этом случае наиболее подходящим будет метод конечных элементов. Преимущества его в универсальности, физичности и неограниченной возможности применения к сложным конструкциям при произвольном нагружении.

Цель работы — провести исследование прочности и устойчивости композитных анизотридных оболочек в условиях нелинейного напряженно-деформированного состояния, оценить влияние конструктивно-технологических факторов, а также нелинейности на потерю устойчивости оболочки и весовую эффективность применения композитных материалов.

В настоящей работе задача прочности и устойчивости цилиндрических композитных оболочек при нагружении поперечной краевой силой и внутренним давлением решена методами конечных элементов и линеаризации Ньютона — Канторовича. Используются разработанные авторами на основе гипотезы Тимошенко конечные элементы естественной кривизны цилиндрических композитных оболочек, в аппроксимации перемещений которых в явном виде выделены жесткие перемещения конечных элементов как твердого тела [10]. Исследовано влияние нелинейности деформирования на устойчивость отсека фюзеляжа перспективного пассажирского самолета в виде круговой анизотридной цилиндрической оболочки в широком диапазоне изменения параметров жесткости как оболочки, так и подкреплений, а кроме того, углов укладки подкрепляющего набора.

Представленные результаты исследований получены с использованием разработанного автором программного продукта «Программа для расчета на прочность и устойчивость подкрепленных некруговых цилиндрических оболочек», зарегистрированного в Федеральной службе по интеллектуальной собственности (Роспатенте) [12].

Основные соотношения для конечного элемента некруговой цилиндрической оболочки, выполненной из полимерного композиционного материала, разработанные автором алгоритмы решения задачи

прочности и устойчивости цилиндрических оболочек в условиях нелинейного исходного напряженно-деформированного состояния опубликованы в работах [13–16]. В данном случае оболочка будет рассматриваться как ортотропная.

Алгоритм решения нелинейной задачи. Для конечного элемента оболочки вариационное уравнение Лагранжа представим в следующем виде:

$$\delta \Pi = \delta W - \delta V = 0, \quad (1)$$

где δ — знак вариации; Π , W , V — потенциальная энергия, энергия деформации и работа внешних сил соответственно.

Если варьировать (1) по узловым перемещениям конечного элемента, то получится система нелинейных алгебраических уравнений относительно узловых перемещений конечного элемента. С учетом условия совместности перемещений в узлах конечных элементов и граничных условий можно получить систему нелинейных алгебраических уравнений относительно узловых перемещений оболочки:

$$\mathbf{K}\mathbf{u}' - \mathbf{Q} = 0, \quad (2)$$

где \mathbf{K} — матрица жесткости оболочки, создаваемая суммированием матриц жесткости отдельных конечных элементов с использованием матрицы индексов [17]; \mathbf{u}' и \mathbf{Q} — векторы узловых перемещений и обобщенных узловых сил Q оболочки соответственно.

Для решения системы (2) используется метод Ньютона — Канторовича [18], уравнения которого имеют вид

$$\mathbf{H}(\mathbf{u}'_n)\Delta = \mathbf{Q} - \mathbf{G}(\mathbf{u}'_n); \quad \mathbf{G} = \mathbf{K}(\mathbf{u}'_n)\mathbf{u}'_n; \quad \mathbf{u}'_{n+1} = \mathbf{u}'_n + \Delta, \quad (3)$$

где \mathbf{H} — гессиан системы, элементами которого являются элементы второй вариации потенциальной энергии деформации оболочки; \mathbf{G} — градиент потенциальной энергии деформации; Δ — вектор приращений узловых перемещений оболочки.

Для решения системы (3) используется метод последовательных приближений и шаговый метод по нагрузке. На каждой итерации решение системы линейных алгебраических уравнений следует отыскивать методом Краута [19] с применением L^TDL разложения матрицы \mathbf{H} на диагональную \mathbf{D} и две треугольные матрицы \mathbf{L} .

Определив компоненты вектора узловых перемещений \mathbf{u}' , можно найти все компоненты напряженно-деформированного состояния оболочки. Критическая нагрузка определяется или как предельная по расходимости итерационного процесса при резком возрастании перемещений в отдельных узлах конечно-элементной сетки, или как бифуркационная с помощью энергетического критерия устойчивости, согласно которому равновесное состояние устойчиво, если $\delta^2\Pi > 0$.

Для этого условия требуется положительная определенность гессиана \mathbf{H} или положительность всех диагональных элементов матрицы \mathbf{D} в L^TDL разложении матрицы \mathbf{H} . Определив критическую нагрузку, можно отыскивать форму потери устойчивости оболочки из решения системы $\mathbf{H}\dot{\mathbf{u}} = 0$, где $\dot{\mathbf{u}}$ — вектор бифуркационных узловых перемещений. В случае предельной точки форма потери устойчивости оболочки отыскивается из нелинейного исходного напряженно-деформированного состояния для нагрузки, близкой к предельной.

Результаты исследования. Рассмотрим подкрепленную продольным и поперечным наборами круговую цилиндрическую оболочку, близкую по форме и размерам поперечного сечения к корпусу самолета Ту-204. Она находится под действием краевой поперечной силы, приложенной к свободному краю оболочки, и внутреннего избыточного давления $q = 0,15$ МПа. Нагруженный край оболочки подкреплен жестким в своей плоскости шпангоутом. Действие поперечной силы можно заменить статически эквивалентными ей касательными усилиями $T_3 = QS/J$, где S — статический момент отсеченной части поперечного сечения оболочки; J — момент инерции площади поперечного сечения относительно горизонтальной плоскости симметрии оболочки. Граничные условия с другого (закрепленного) края: все перемещения равны нулю ($u = v = w = w_x = w_\varphi = w_{x\varphi} = 0$).

Оболочка длиной $L = 2000$ мм и радиусом $R = 2000$ мм подкреплена набором равностоящих подкреплений с прямоугольным поперечным сечением разной жесткости (рис. 1).

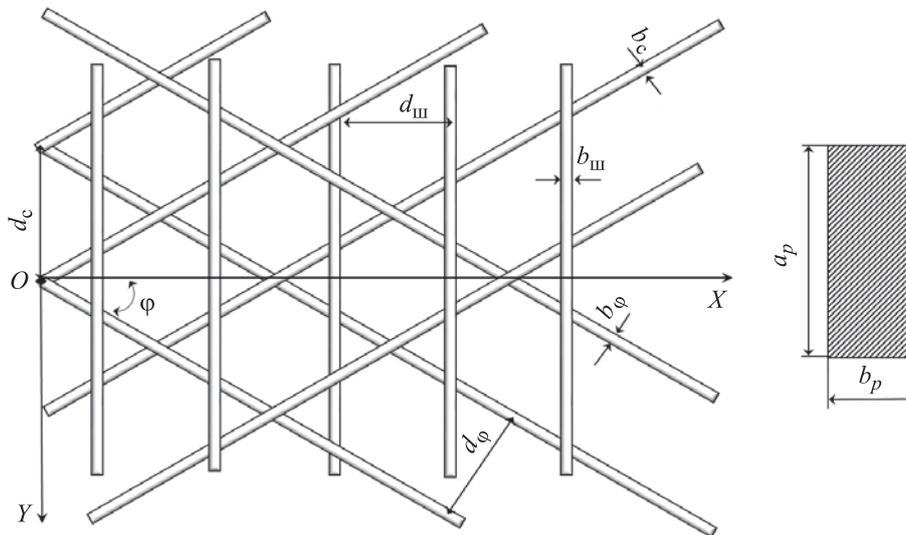


Рис. 1. Схема расположения подкреплений в оболочке и сечение подкрепления:

φ — угол укладки подкреплений; d_φ — шаг укладки для стрингеров; $d_{ш}$ — шаг укладки для шпангоутов; b_φ — толщина стрингера; $b_{ш}$ — толщина шпангоута; d_c — шаг укладки стрингеров; a_p — высота подкрепления; b_p — ширина подкрепления

Обшивка оболочки выполнена из слоистого композиционного материала ПКМ на основе волокон Тогауса T700, механические характеристики монослоя которого приведены в работе [20]. Монослой толщиной $\delta = 0,192$ мм имеет характеристики: модули упругости в продольном направлении $E_1 = 125\,510$ МПа и поперечном направлении $E_2 = 8780$ МПа, модуль сдвига $G_{12} = 4740$ МПа, коэффициент Пуассона монослоя $\mu_{12} = 0,34$. Приведенные жесткостные характеристики слоистого материала обшивки определены с помощью формул из работы [21].

Подкрепления в оболочке, представленные в виде наклонных под углом φ (стрингеры) и окружных (шпангоуты) ребер (см. рис. 1), равномерно распределены по ее поверхности с фиксированным шагом d_φ для стрингеров и $d_{ш}$ для шпангоутов. Они выполнены из того же композиционного материала с однонаправленной укладкой волокон, создаваемой путем специальной спиральной непрерывной намотки. В результате получается так называемая анизотропная оболочка. Приведенный модуль упругости и модуль сдвига принимались равными 90000 МПа и 4000 МПа соответственно. Все расчеты проводились для случая внутреннего расположения подкреплений относительно обшивки оболочки. В разработанном конечно-элементном алгоритме рассматривается конструктивно ортотропная схема расположения подкреплений и дискретная — для краевого шпангоута.

Жесткостные характеристики приведенного набора подкреплений были определены с использованием формул из работы [22], а также с учетом их приведения к срединной поверхности обшивки:

$$\begin{aligned}
 B_{11p} &= E_p a_p b_p / d_p \cos^4 \varphi, \quad B_{22p} = E_p a_p b_p / d_p \sin^4 \varphi; \\
 B_{12p} &= E_p a_p b_p / d_p \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi, \quad B_{33p} = E_p a_p b_p / d_p \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi; \\
 D_{11p} &= E_p a_p b_p / d_p (a_p^2 / 12 + e_p^2) \cos^4 \varphi, \\
 D_{22p} &= E_p a_p b_p / d_p (a_p^2 / 12 + e_p^2) \sin^4 \varphi; \\
 D_{12p} &= E_p a_p b_p / d_p (a_p^2 / 12 + e_p^2) \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi, \\
 D_{33p} &= E_p a_p b_p / d_p (a_p^2 / 12 + e_p^2) \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi; \\
 K_{11p} &= E_p a_p b_p e_p / d_p \cos^4 \varphi; \quad K_{22p} = E_p a_p b_p e_p / d_p \sin^4 \varphi; \\
 K_{12p} &= E_p a_p b_p e_p / d_p \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi, \quad K_{33p} = E_p a_p b_p e_p / d_p \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi,
 \end{aligned}$$

где B_p — мембранная жесткость подкреплений; D_p — изгибная жесткость подкреплений; K_p — жесткость подкреплений относительно центра тяжести; E_p — модуль упругости подкреплений; φ — угол наклона

подкреплений при укладке; e_p — эксцентриситет подкреплений относительно срединной поверхности обшивки.

В случае расчета оболочки для ее ортогонального подкрепления используются известные формулы для конструктивно ортотропной оболочки [23].

Рассмотрены четыре варианта укладки монослоев, влияющей на толщину обшивки (табл. 1).

Таблица 1

Варианты укладки монослоев обшивки

Вариант	Укладка	$h_{об}$, мм
1	0, 90°, 90°, 0	0,768
2	0, 90°, ±45°, 90°, 0	1,152
3	0, 90°, ±45°, 0, ±45°, 90°, 0	1,728
4	0, 90°, 0, 0, ±45°, ±45°, 0, 0, 90°, 0	2,304

Рассчитать фиксированные шаги $d_{ш}$ и d_{φ} распределения подкреплений по поверхности оболочки для шпангоутов и для стрингеров можно по следующим формулам:

$$d_{ш} = 2\pi R / (ntg(\varphi)), \quad d_{\varphi} = 4\pi R \cos \varphi / n,$$

где R — радиус оболочки; n — количество наклонных ребер (стрингеров); приведенные материалы исследований получены для $n = 80$.

Шесть вариантов жесткостных характеристик J_p подкреплений размерами a_p и b_p приведены в табл. 2, и семь вариантов углов наклона стрингеров φ и шагов расположения подкреплений — в табл. 3.

Таблица 2

Размеры подкреплений и их приведенная жесткость

Вариант	a_p , мм	b_p , мм	J_p , мм ⁴
1 (C ₁)	0	0	0
2 (C ₂)	10	5	417
3 (C ₃)	15	5	1406
4 (C ₄)	20	5	3333
5 (C ₅)	25	5	6510
6 (C ₆)	30	5	11 250

Таблица 3

Углы наклона φ и шаг расположения подкреплений

Вариант	φ , град	d_φ , мм	$d_{ш}$, мм
1 (A ₁)	±20,90	295,21	431,57
2 (A ₂)	±25,90	284,72	336,86
3 (A ₃)	±30,90	272,07	272,07
4 (A ₄)	±35,90	257,34	224,33
5 (A ₅)	±40,90	240,66	187,20
6 (A ₆)	±45,90	222,14	157,08
7 (A ₇)	±50,90	201,94	131,81

Для того чтобы обеспечивалась сходимость решения по числу конечных элементов, оболочка разбивалась конечно-элементной сеткой $m \times n = 15 \times 90$, где m — число конечных элементов по образующей оболочки; n — число конечных элементов по направляющей. Были приняты следующие обозначения:

$$k_\tau = Q^*/Q_0; \underline{k}_\tau = \underline{Q}^* / \underline{Q}_0,$$

где Q^* — критические значения поперечной силы; $Q_0 = \pi R C S_b$; $\underline{Q}_0 = \pi R C \underline{S}_b$ — верхние критические значения поперечной силы для неподкрепленных металлических оболочек толщиной h и h_p ; C — коэффициент, $C = 0,953$, $S_b = 0,74 \frac{Eh}{(1-\nu^2)^{5/8}} \left(\frac{h}{R}\right)^{5/4} \left(\frac{R}{L}\right)^{1/2}$; $\underline{S}_b = 0,74 \frac{Eh_p}{(1-\nu^2)^{5/8}} \times \left(\frac{h_p}{R}\right)^{5/4} \left(\frac{R}{L}\right)^{1/2}$; $h_p = h + \sum_{i=1}^3 a_{pi} b_{pi} / d_{pi}$ [23].

Значения параметра критической поперечной силы k_τ для линейного (числитель) и нелинейного (знаменатель) исходного напряженно-деформированного состояния для разных значений параметра жесткости подкрепляющего набора J_p ($J_p = b_p a_p^3 / 12$) и углов наклона подкреплений φ (см. табл. 3) в случае расчета оболочек с разной толщиной обшивки h приведены в табл. 4.

Анализ значений, приведенных в табл. 4, показывает, что критические значения параметра нагрузки k_τ существенно зависят как от жесткости подкрепляющего набора, так и от толщины оболочки h и углов φ укладки стрингеров. С увеличением жесткости подкреплений J_p и углов их укладки значения параметра k_τ возрастают. Причем с ростом параметра жесткости J_p интенсивность увеличения параметра k_τ понижается

независимо от толщины обшивки оболочки. С возрастанием толщины h значения параметра k_τ уменьшаются, причем весьма существенно, почти в 9 раз. С увеличением угла укладки стрингеров параметр k_τ увеличивается, но не так существенно, как при росте жесткости подкреплений (в 1,5 раза), причем независимо от их толщины и жесткости.

Таблица 4

Значения параметра k_τ в зависимости от жесткости подкреплений J_p и углов φ для четырех значений h

$J_p, \text{мм}^4$	k_τ при φ , равном						
	20°	25°	30°	35°	40°	45°	50°
$h = 0,756 \text{ мм}$							
0	100/104	100/104	100/104	100/104	100/104	100/104	100/104
417	140/138	147/145	147/152	155/152	155/152	163/160	163/152
1406	173/178	181/187	190/197	200/206	210/206	210/217	220/217
3333	216/212	227/234	250/246	262/258	275/271	275/284	289/284
6510	259/267	285/280	300/309	330/325	347/341	364/358	364/376
11250	313/307	345/339	362/374	399/392	419/432	440/432	462/454
$h = 1,152 \text{ мм}$							
0	40/39	40/39	40/39	40/39	40/39	40/39	40/39
417	60/59	63/62	63/65	66/68	69/68	69/68	69/68
1406	76/75	80/78	84/82	88/86	92/91	92/95	97/95
3333	93/101	102/101	107/106	113/116	118/122	124/122	131/128
6510	114/117	125/123	138/136	145/142	152/150	160/157	168/165
11250	140/138	147/152	163/168	179/176	188/185	198/194	208/204
$h = 1,728 \text{ мм}$							
0	18/17	18/17	18/17	18/17	18/17	18/17	18/17
417	26/26	27/28	28/28	30/29	30/29	30/29	31/29
1406	33/34	34/36	36/37	38/39	40/41	42/41	42/41
3333	42/41	44/45	48/47	50/50	53/55	56/55	58/57
6510	52/51	57/56	60/62	66/65	69/68	73/72	73/75
11250	62/61	68/67	75/74	79/78	83/86	87/90	92/90
$h = 2,304 \text{ мм}$							
0	10/10	10/10	10/10	10/10	10/10	10/10	10/10
417	14/14	15/15	16/15	16/16	16/16	16/16	16/16
1406	18/18	19/20	20/21	21/22	22/22	23/23	23/23
3333	23/23	25/24	26/27	29/28	30/30	30/31	32/31
6510	28/29	31/31	34/34	36/35	38/37	40/39	42/41
11250	34/35	37/39	41/40	43/45	48/47	50/49	50/52

Результаты исследования влияния нелинейности исходного состояния ($\Delta(\%) = (k_{\tau n} - k_{\tau l}) / k_{\tau l} \times 100 \%$) на значения параметра k_{τ} в зависимости от параметра жесткости подкрепляющего набора J_p для различных углов укладки подкреплений φ и различных толщин обшивки h , где l и n в индексах при k_{τ} относятся к линейному и нелинейному решениям, приведены в табл. 5. Анализ данных из табл. 5 дает возможность сделать следующий вывод: нелинейность в основном снижает критические значения параметра нагрузки k_{τ} для всех вариантов расчета оболочек, ее влияние — незначительное, не более 4 %.

Таблица 5

Влияние нелинейности на критические значения параметра k_{τ}

$J_p, \text{мм}^4$	$k_{\tau}, \%$, при φ , равном						
	20°	25°	30°	35°	40°	45°	50°
$h = 0,756 \text{ мм}$							
0	3,2	3,2	3,2	3,2	3,2	3,2	3,2
417	-1,7	-1,7	3,2	-1,7	-1,7	-1,7	-6,4
1406	3,2	3,2	3,2	3,2	-1,7	3,2	-1,7
3333	-1,7	3,2	-1,7	-1,7	-1,7	3,2	-1,7
6510	3,2	-1,7	3,2	-1,7	-1,7	-1,7	3,2
11250	-1,7	-1,7	3,2	-1,7	3,2	-1,7	-1,7
$h = 1,152 \text{ мм}$							
0	-1,7	-1,7	-1,7	-1,7	-1,7	-1,7	-1,7
417	-1,7	-1,7	3,2	3,2	-1,7	-1,7	-1,7
1406	-1,7	-1,7	-1,7	-1,7	-1,7	3,2	-1,7
3333	8,4	-1,7	-1,7	3,2	3,2	-1,7	-1,7
6510	3,2	-1,7	-1,7	-1,7	-1,7	-1,7	-1,7
11250	-1,7	3,2	3,2	-1,7	-1,7	-1,7	-1,7
$h = 1,728 \text{ мм}$							
0	-1,7	-1,7	-1,7	-1,7	-1,7	-1,7	-1,7
417	3,2	3,2	-1,7	-1,7	-1,7	-1,7	-6,4
1406	3,2	3,2	3,2	3,2	3,2	-1,7	-1,7
3333	-1,7	3,2	-1,7	-1,7	3,2	-1,7	-1,7
6510	-1,7	-1,7	3,2	-1,7	-1,7	-1,7	3,2
11250	-1,7	-1,7	-1,7	-1,7	3,2	3,2	-1,7
$h = 2,304 \text{ мм}$							
0	3,2	3,2	3,2	3,2	3,2	3,2	3,2
417	-1,7	-1,7	-1,7	3,2	-1,7	-1,7	-1,7
1406	-1,7	3,2	3,2	3,2	-1,7	-1,7	-1,7
3333	3,2	-1,7	3,2	-1,7	-1,7	3,2	-1,7
6510	3,2	-1,7	-1,7	-1,7	-1,7	-1,7	-1,7
11250	3,2	3,2	-1,7	3,2	-1,7	-1,7	3,2

Зависимости k_{τ} от жесткости подкрепляющего набора J_p для различных углов наклона подкреплений φ в случае расчета оболочек различной толщины h приведены на рис. 2, причем здесь и далее сплошными линиями показаны результаты линейного, а пунктирными — нелинейного решения. Анализ графиков, приведенных на рис. 2, показывает, что нелинейность и в этом случае в основном снижает критические значения параметра нагрузки k_{τ} . Влияние нелинейности в большинстве случаев расчета колеблется в диапазоне 3...5 %. С увеличением толщины h критические значения параметра k_{τ} уменьшаются до 50 % относительно результатов расчета оболочки с меньшей толщиной ($h = 0,768$ мм). Это обусловлено тем, что в знаменатель для параметра k_{τ} входит параметр Q_0 , напрямую зависящий от приведенной толщины оболочки h_p .

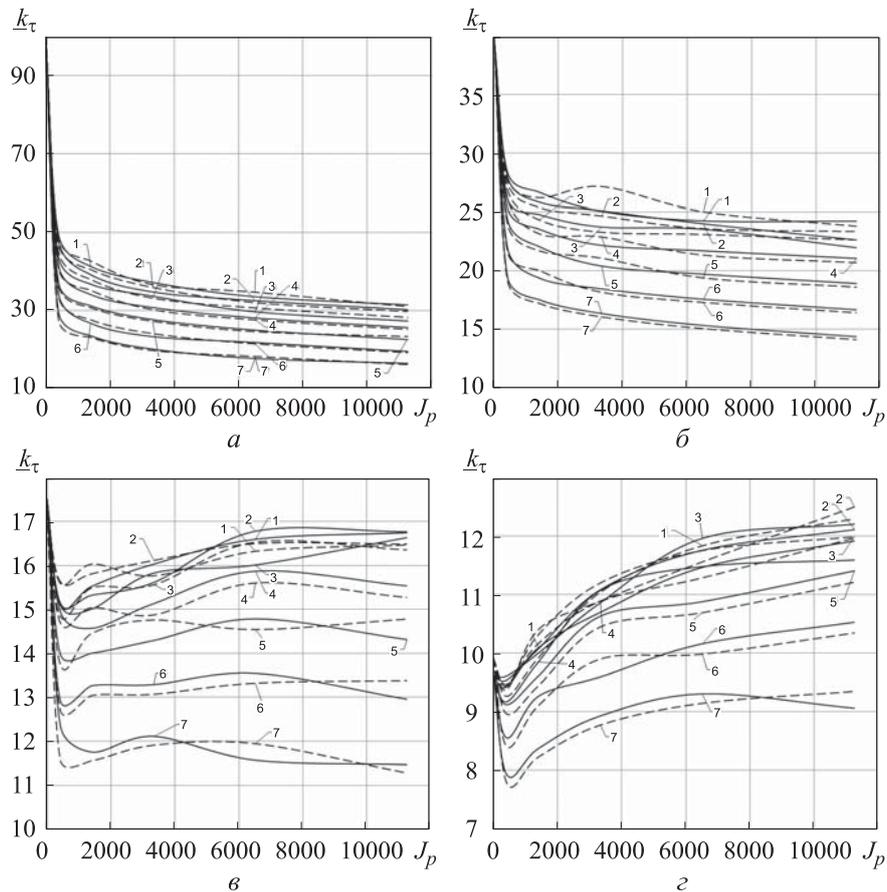


Рис. 2. Зависимости параметра k_{τ} от жесткости подкрепляющего набора J_c для оболочки толщиной h , равной 0,768 мм (а); 1,152 мм (б); 1,728 мм (в); 2,304 мм (г)

Весовая эффективность (рис. 3) рассчитывается по формуле

$$k_g = k_\tau / (k_{\tau 0}(G / G_0)),$$

где G — масса рассчитанного отсека; k_τ и G_0 — параметр критической нагрузки и масса эталонного отсека (металлическая оболочка с ортогональным расположением подкреплений), для линейного исходного (сплошные кривые) и нелинейного (пунктирные кривые) состояний в зависимости от жесткости подкрепляющего набора J_p для различных углов наклона подкреплений φ в случае расчета оболочек различной толщины h .

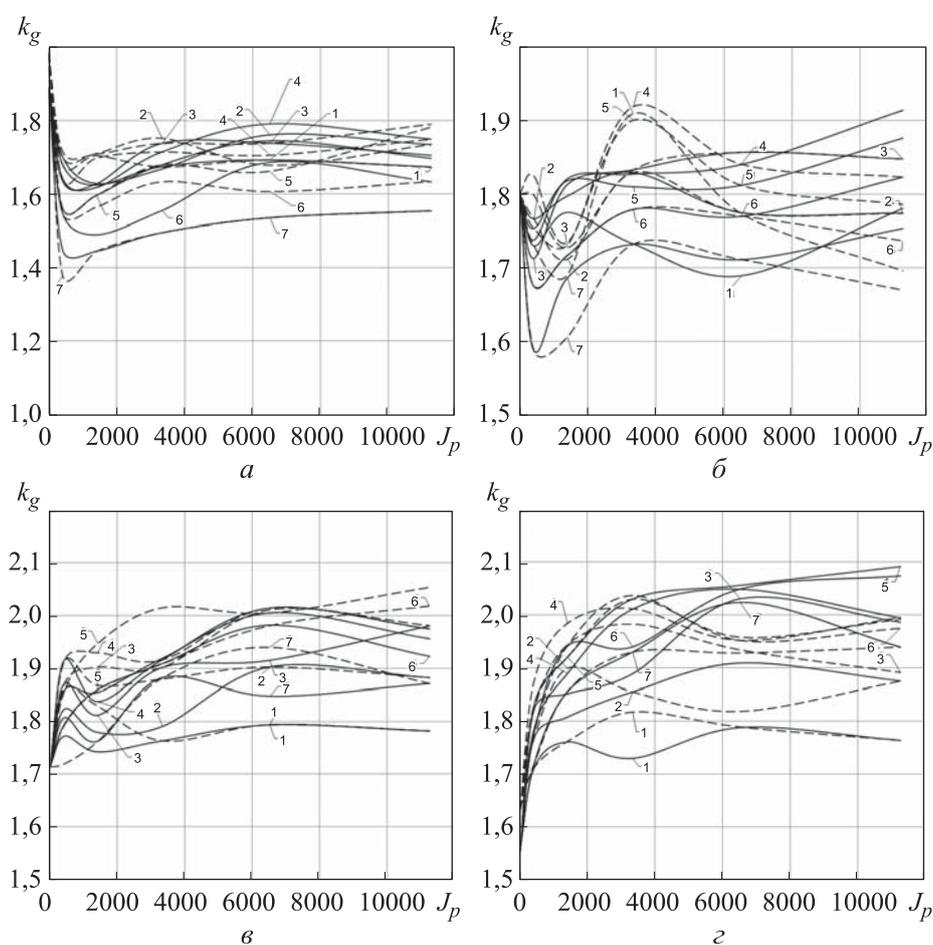


Рис. 3. Зависимости параметра k_g от жесткости подкрепляющего набора J_p для оболочки толщиной h , равной 0,768 мм (а), 1,152 мм (б), 1,728 мм (в), 2,304 мм (г)

Для металлической оболочки площади поперечного сечения подкреплений принимались такими же, что и для композитной, причем количество стрингеров у металлической оболочки было в 2 раза меньше, чем у композитной. В этом случае приведенная толщина для

металлической оболочки $h_p = h + \sum_{i=1}^2 a_{pi} b_{pi} / d_{pi}$ получалась меньше, чем для композитной оболочки $h_p = h + \sum_{i=1}^3 a_{pi} b_{pi} / d_{pi}$, при одинаковых параметрах a_p , b_p и d_p .

Анализ кривых на рис. 3 показывает, что весовая эффективность k_g композитных оболочек существенно зависит как от жесткости подкреплений, так и от толщины оболочки, а также от шага установки подкреплений d_p . Жесткость подкреплений наиболее сильно влияет на параметр k_g для малых значений $J_p < 1000$, весовая эффективность композитных оболочек при этом повышается. При дальнейшем увеличении жесткости J_p ее влияние на параметр k_g снижается. С увеличением толщины обшивки h значения параметра k_g повышаются незначительно. Влияние нелинейности на параметр k_g неоднозначно. В основном нелинейность снижает весовую эффективность композитных оболочек, тем не менее в отдельных случаях может и повышать ее по сравнению с линейным решением. В большинстве случаев расчета нелинейность влияет незначительно. Полученные значения параметра $k_g > 1$ обусловлены тем, что общая жесткость подкреплений металлической оболочки в данном случае меньше, чем композитной.

Значения параметра k_g для линейного исходного (числитель) и нелинейного (знаменатель) состояний в зависимости от жесткости подкрепляющего набора J_p для разных вариантов углов наклона подкреплений φ в случае расчета оболочек с разной толщиной обшивки h приведены в табл. 6.

Таблица 6

Значения параметра k_g в зависимости от жесткости подкреплений и углов φ

$J_p, \text{мм}^4$	k_g для φ , равного						
	20°	25°	30°	35°	40°	45°	50°
$h = 0,768 \text{ мм}$							
0	1,9/2	1,9/2	1,9/2	1,9/2	1,9/2	1,9/2	1,9/2
417	1,7/1,7	1,7/1,7	1,6/1,7	1,6/1,6	1,6/1,6	1,5/1,5	1,4/1,4
1406	1,6/1,7	1,6/1,7	1,6/1,7	1,6/1,7	1,6/1,6	1,5/1,6	1,4/1,4
3333	1,7/1,7	1,7/1,8	1,7/1,7	1,7/1,7	1,7/1,7	1,6/1,6	1,5/1,5
6510	1,7/1,7	1,8/1,7	1,7/1,7	1,8/1,7	1,7/1,7	1,7/1,6	1,5/1,5
11250	1,7/1,7	1,7/1,7	1,7/1,8	1,7/1,7	1,7/1,8	1,6/1,6	1,6/1,6
$h = 1,152 \text{ мм}$							
0	1,8/1,8	1,8/1,8	1,8/1,8	1,8/1,8	1,8/1,8	1,8/1,8	1,8/1,8
417	1,7/1,7	1,8/1,8	1,7/1,8	1,7/1,8	1,8/1,8	1,7/1,7	1,6/1,6
1406	1,8/1,7	1,8/1,7	1,8/1,7	1,8/1,7	1,8/1,7	1,7/1,7	1,7/1,6

$J_p, \text{мм}^4$	k_g для φ , равного						
	20°	25°	30°	35°	40°	45°	50°
3333	1,7/1,9	1,8/1,8	1,8/1,8	1,8/1,9	1,8/1,9	1,8/1,8	1,7/1,7
6510	1,7/1,8	1,8/1,8	1,9/1,9	1,8/1,8	1,8/1,8	1,8/1,8	1,7/1,7
11250	1,8/1,7	1,8/1,8	1,8/1,8	1,9/1,8	1,9/1,8	1,8/1,7	1,8/1,7
$h = 1,728 \text{ мм}$							
0	1,7/1,7	1,7/1,7	1,7/1,7	1,7/1,7	1,7/1,7	1,7/1,7	1,7/1,7
417	1,8/1,9	1,8/1,9	1,9/1,9	1,9/1,9	1,9/1,9	1,8/1,8	1,8/1,7
1406	1,7/1,8	1,8/1,9	1,8/1,9	1,8/1,9	1,9/1,9	1,9/1,9	1,8/1,8
3333	1,8/1,8	1,8/1,9	1,9/1,9	1,9/1,9	1,9/2	1,9/1,9	1,9/1,9
6510	1,8/1,8	1,9/1,9	1,9/2	2/2	2/2	2/2	1,8/1,9
11250	1,8/1,8	1,9/1,9	2/2	2/2	2/2,1	1,9/2	1,9/1,9
$h = 2,304 \text{ мм}$							
0	1,6/1,6	1,6/1,6	1,6/1,6	1,6/1,6	1,6/1,6	1,6/1,6	1,6/1,6
417	1,7/1,7	1,8/1,8	1,8/1,8	1,8/1,9	1,8/1,8	1,8/1,8	1,7/1,7
1406	1,8/1,8	1,8/1,9	1,9/1,9	1,9/2	1,9/1,9	1,9/1,9	1,9/1,9
3333	1,7/1,8	1,9/1,9	1,9/2	2/2	2/2	1,9/2	1,9/1,9
6510	1,8/1,8	1,9/1,8	2/1,9	2/2	2,1/2	2/2	2/1,9
11250	1,8/1,8	1,9/1,9	2/1,9	2/2	2,1/2	2,1/2	1,9/1,9

Анализ данных из табл. 6 показывает, что с увеличением жесткости подкреплений весовая эффективность композитных оболочек по сравнению с металлической оболочкой с аналогичными характеристиками поперечного сечения и шага расположения повышается. В то же время с увеличением угла установки спиральных ребер весовая эффективность понижается, но все же остается больше 1.

Приведенные на рис. 4 значения параметра весовой эффективности $k_g = k_\tau / (k_{13} (G / G'_3))$ в зависимости жесткостей подкрепляющего набора J_p для разных углов φ и толщин оболочки h , где G'_3 — масса металлической оболочки с приведенной толщиной $h_p = h + \sum_{i=1}^2 a_{pi} b_{pi} / d_{pi}$,

равной приведенной толщине композитной оболочки $h_p = h + \sum_{i=1}^3 a_{pi} b_{pi} / d_{pi}$. При сохранении одинаковых параметров b_p для

металлической и композитной оболочек параметр a_p подбирался так, чтобы обеспечить равную с композитной приведенную толщину оболочки h_p . С учетом того, что высота a_p , ширина b_p и шаг d_p расположения стрингеров и шпангоутов для металлической оболочки одинаковы, можно получить выражение для высоты подкрепления металлической

оболочки a_p , как функцию от высоты a_p^k подкреплений композитной оболочки и углов φ укладки продольных ребер:

$$a_p = a_p^k (1 + \sin \varphi) / \cos \varphi.$$

Значения параметра k_g для линейного исходного (числитель) и нелинейного (знаменатель) состояний в зависимости от жесткости подкрепляющего набора J_p для разных вариантов углов φ и толщин обшивки h представлены в табл. 7.

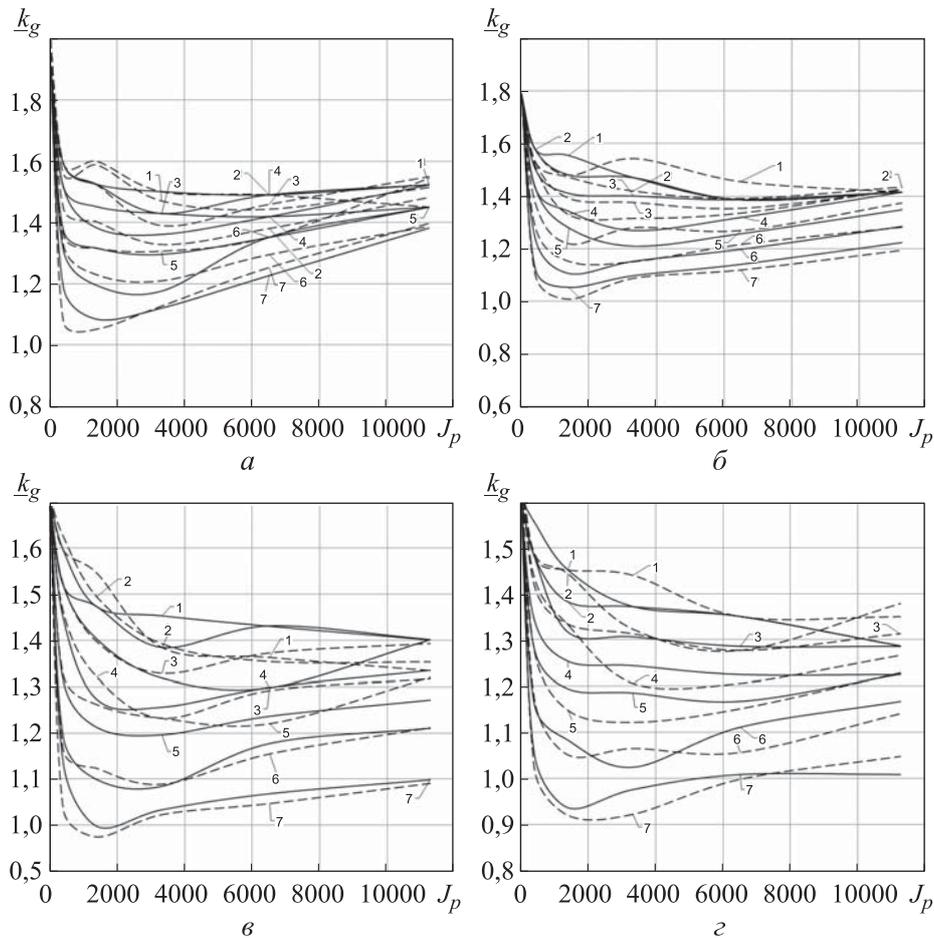


Рис. 4. Зависимости параметра k_g от параметра жесткости J_p для оболочки толщиной h , равной 0,768 мм (а), 1,152 мм (б), 1,728 мм (в), 2,304 мм (з)

Анализ кривых на рис. 4 и данных в табл. 7 приводит к выводу о том, что весовая эффективность k_g , как и k_g , композитных оболочек существенно зависит и от жесткости подкреплений, и от толщины оболочки. С увеличением жесткости J_p весовая эффективности k_g сначала резко падает ($J_p < 2000$), потом незначительно повышается, причем наиболее интенсивно для малых толщин h . Весовая эффективность

неподкрепленных оболочек всегда выше, чем у подкрепленных. Влияние нелинейности на параметр k_g неоднозначно. В основном нелинейность понижает весовую эффективность композитных оболочек (для больших жесткостей подкреплений $J_p > 2000$), однако в отдельных случаях может и повышать по сравнению с линейным решением. Влияние нелинейности в большинстве случаев расчета небольшое — менее 5 %.

Таблица 7

Значения параметра k_g в зависимости от жесткости подкреплений J_p , углов φ и толщины обшивки h

$J_p, \text{мм}^4$	k_g для φ , равном						
	20°	25°	30°	35°	40°	45°	50°
$h = 0,756 \text{ мм}$							
0	1,9/2	1,9/2	1,9/2	1,9/2	1,9/2	1,9/2	1,9/2
417	1,6/1,6	1,6/1,6	1,5/1,6	1,5/1,4	1,4/1,4	1,3/1,3	1,2/1,1
1406	1,5/1,6	1,5/1,6	1,5/1,5	1,4/1,4	1,3/1,3	1,2/1,2	1,1/1,1
3333	1,5/1,5	1,4/1,5	1,4/1,4	1,4/1,3	1,3/1,3	1,2/1,2	1,1/1,1
6510	1,5/1,5	1,5/1,4	1,4/1,5	1,4/1,4	1,4/1,4	1,4/1,3	1,2/1,3
11250	1,5/1,5	1,5/1,5	1,5/1,6	1,5/1,5	1,5/1,5	1,5/1,4	1,4/1,4
$h = 1,152 \text{ мм}$							
0	1,8/1,8	1,8/1,8	1,8/1,8	1,8/1,8	1,8/1,8	1,8/1,8	1,8/1,8
417	1,6/1,6	1,6/1,5	1,5/1,5	1,4/1,5	1,4/1,4	1,2/1,3	1,1/1,1
1406	1,6/1,5	1,5/1,5	1,4/1,4	1,3/1,3	1,3/1,2	1,1/1,2	1,1/1
3333	1,5/1,5	1,5/1,4	1,4/1,4	1,3/1,3	1,2/1,3	1,2/1,2	1,1/1,1
6510	1,4/1,5	1,4/1,4	1,4/1,4	1,3/1,3	1,3/1,3	1,2/1,2	1,1/1,1
11250	1,4/1,4	1,4/1,4	1,4/1,4	1,4/1,4	1,3/1,4	1,3/1,3	1,2/1,2
$h = 1,728 \text{ мм}$							
0	1,7/1,7	1,7/1,7	1,7/1,7	1,7/1,7	1,7/1,7	1,7/1,7	1,7/1,7
417	1,6/1,6	1,5/1,6	1,5/1,5	1,4/1,5	1,3/1,3	1,2/1,2	1,1/1
1406	1,5/1,5	1,5/1,5	1,4/1,4	1,3/1,3	1,2/1,3	1,1/1,1	1/1
3333	1,5/1,4	1,4/1,4	1,3/1,3	1,3/1,2	1,2/1,2	1,1/1,1	1/1
6510	1,4/1,4	1,4/1,4	1,3/1,4	1,3/1,3	1,2/1,2	1,2/1,2	1,1/1
11250	1,4/1,3	1,4/1,4	1,4/1,4	1,3/1,3	1,3/1,3	1,2/1,2	1,1/1,1
$h = 2,304 \text{ мм}$							
0	1,6/1,7	1,6/1,7	1,6/1,7	1,6/1,7	1,6/1,7	1,6/1,7	1,6/1,7
417	1,6/1,5	1,5/1,5	1,5/1,4	1,3/1,4	1,3/1,3	1,2/1,2	1,1/1
1406	1,5/1,5	1,4/1,4	1,3/1,3	1,3/1,3	1,2/1,1	1,1/1,1	0,9/0,9
3333	1,4/1,4	1,4/1,3	1,3/1,3	1,2/1,2	1,2/1,1	1/1,1	1/0,9
6510	1,3/1,4	1,4/1,3	1,3/1,3	1,2/1,2	1,2/1,2	1,1/1,1	1/1
11250	1,3/1,3	1,3/1,4	1,3/1,3	1,2/1,3	1,2/1,2	1,2/1,1	1/1

Формы потери устойчивости оболочки толщиной $h = 1,152$ мм для разных случаев жесткости подкреплений приведены на рис. 5: вариант подкрепления C_1 — на рис. 5, а, вариант подкрепления C_5 — на рис. 5, б. Оболочка теряет устойчивость боковой поверхности в виде косых складок от действия максимальных касательных усилий T_3 . С уменьшением жесткости подкреплений (вариант C_1) число волн по окружности оболочки увеличивается.

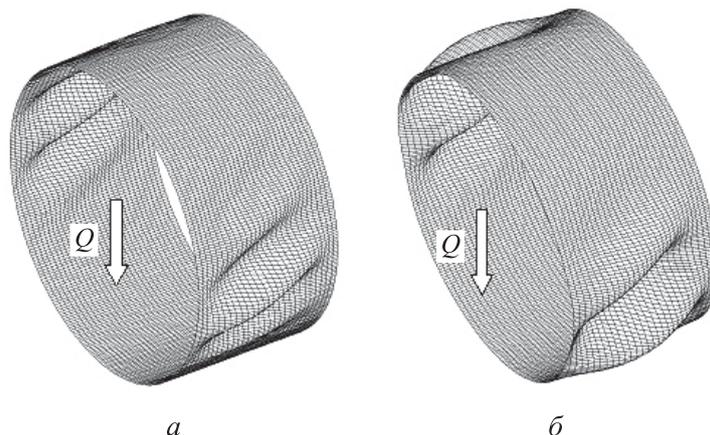


Рис. 5. Формы потери устойчивости оболочки

Заключение. На основе проведенных исследований можно сделать следующие выводы: критические значения параметра k_τ зависят как от толщины оболочки h , так и от жесткости подкрепляющего набора и углов наклона подкреплений φ . С увеличением толщины обшивки h значения параметра k_τ существенно снижаются — до 8 раз. Влияние нелинейности на критические значения параметра нагрузки k_τ незначительно — в пределах 5 %. Весовая эффективность k_g и \underline{k}_g композитных оболочек зависит как от жесткости подкреплений, так и от толщины оболочки, а также от угла укладки подкреплений φ . Весовая эффективность композитных оболочек колеблется в пределах значений 1,05–1,95 в зависимости от толщины оболочки и параметров подкреплений. Влияние нелинейности на параметр k_g неоднозначно. В основном нелинейность снижает весовую эффективность композитных оболочек, тем не менее в отдельных случаях может и повышать ее по сравнению с линейным решением. Влияние нелинейности небольшое, в пределах 5 %.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Васильев В.В. *Механика конструкций из композитных материалов*. Москва, Машиностроение, 1988, 272 с.
- [2] Васильев В.В., Бунаков В.А. Проектирование сетчатых композитных цилиндрических оболочек, сжатых в осевом направлении. *Механика конструкций из композиционных материалов*, 2000, № 2, с. 68–77.

- [3] Бурнышева Т.В. *Разработка и применение методологии вычислительного эксперимента при расчете и диагностике анизотропных конструкций космических летательных аппаратов: дис. ... д-ра техн. наук.* Новосибирск, Новосибирский государственный технический университет, 2017, 451 с.
- [4] Азаров А.В. Проблема проектирования аэрокосмических сетчатых композитных конструкций. *Известия РАН. МТТ*, 2018, № 4, с. 85–93.
- [5] Ванин Г.А., Семенюк Н.П., Емельянов Р.Ф. *Устойчивость оболочек из армированных материалов.* Киев, Наукова Думка, 1978, 211 с.
- [6] Кармишин А.В., Лясковец В.А., Мяченков В.И., Фролов А.Н. *Статика и динамика оболочечных конструкций.* Москва, Машиностроение, 1975, 376 с.
- [7] Бакулин В.Н., Виноградов Ю.И. Аналитическое и асимптотическое решение краевых задач механики деформирования оболочек при сосредоточенном нагружении. *Известия вузов. Авиационная техника*, 2017, № 1, с. 14–20.
- [8] Дмитриев В.Г., Бирюков В.И., Егорова О.В., Жаворонок С.И., Рабинский Л.Н. Нелинейное деформирование многослойных композитных оболочек вращения при больших перемещениях и углах поворота нормали. *Известия вузов. Авиационная техника*, 2017, № 2, с. 8–15.
- [9] Гуреева Н.А., Клочков Ю.В., Николаев А.П. Расчет осесимметрично нагруженной оболочки вращения с учетом геометрической нелинейности на основе смешанного МКЭ. *Известия вузов. Авиационная техника*, 2014, № 3, с. 14–19.
- [10] Железнов Л.П., Кабанов В.В. Исследование нелинейного деформирования и устойчивости некруговых цилиндрических оболочек при осевом сжатии и внутреннем давлении. *СО РАН. ПМТФ*, 2002, т. 43, № 4, с. 155–160.
- [11] Бакулин В.Н. Послойное исследование напряженно-деформированного состояния трехслойных конических отсеков летательных аппаратов с прямоугольными в плане вырезами. *Известия вузов. Авиационная техника*, 2022, № 4, с. 37–43.
- [12] Железнов Л.П. *Программа для расчета на прочность и устойчивость подкрепленных некруговых цилиндрических оболочек.* Свидетельство о гос. регистрации программы для ЭВМ № 2013615613 РФ. Зарегистрировано в реестре Роспатента 17.06.2013.
- [13] Бойко Д.В., Железнов Л.П., Кабанов В.В. Нелинейное деформирование и устойчивость овальных цилиндрических оболочек при чистом изгибе с внутренним давлением. *СО РАН. ПМТФ*, 2006, т. 47, № 3, с. 119–125.
- [14] Бойко Д.В., Железнов Л.П., Кабанов В.В. Исследование нелинейного деформирования и устойчивости овальных цилиндрических оболочек при комбинированном нагружении изгибающим и крутящим моментами. *Известия вузов. Авиационная техника*, 2007, № 3, с. 3–8.
- [15] Бойко Д.В., Железнов Л.П., Кабанов В.В. Нелинейное деформирование и устойчивость дискретно-подкрепленных овальных цилиндрических композитных оболочек при поперечном изгибе и внутреннем давлении. *Проблемы машиностроения и надежности машин*, 2014, № 6, с. 23–30.
- [16] Бойко Д.В., Железнов Л.П., Кабанов В.В. Нелинейное деформирование и устойчивость дискретно-подкрепленных эллиптических цилиндрических композитных оболочек при кручении и внутреннем давлении. *Известия вузов. Авиационная техника*, 2018, № 2, с. 27–34.
- [17] Постнов В.А., Хархурим И.Я. *Метод конечных элементов в расчетах судовых конструкций.* Ленинград, Судостроение, 1974, 341 с.
- [18] Канторович Л.В., Акилов Г.П. *Функциональный анализ в нормированных пространствах.* Москва, Физматгиз, 1959, 684 с.

- [19] Уилкинсон Д., Райнш К. *Справочник алгоритмов на языке Алгол. Линейная алгебра*. Москва, Машиностроение, 1976, 390 с.
- [20] Железнов Л.П. Исследование влияния порядка укладки монослоев на устойчивость композитной цилиндрической оболочки. *Известия высших учебных заведений. Машиностроение*, 2022, № 1, с. 71–83.
- [21] Олегин И.П., Максименко В.Н. *Теоретические основы методов расчета прочности элементов конструкций из композитов*. Новосибирск, Изд-во НГТУ, 2006, 240 с.
- [22] Васильев В.В., Барынин В.А., Разин А.Ф., Петроковский С.А., Халиманович В.И. Анизотридные композитные сетчатые конструкции — разработка и приложение к космической технике. *Композиты и наноструктуры*, 2009, № 3, с. 38–50.
- [23] Кабанов В.В. *Устойчивость неоднородных цилиндрических оболочек*. Москва, Машиностроение, 1982, 256 с.

Статья поступила в редакцию 19.12.2024

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Железнов Л.П. Весовая эффективность анизотридных круговых цилиндрических оболочек при поперечном изгибе и внутреннем давлении. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2025, вып. 6. EDN IBNWWJ

Железнов Лев Петрович — д-р техн. наук, заместитель начальника отделения усталостной и статической прочности конструкций по науке, Сибирский научно-исследовательский институт авиации имени С.А. Чаплыгина (СибНИА); профессор кафедры ИТТ, СГУПС; автор более 130 научных работ в области «Прочность летательных аппаратов». e-mail: zgeleznov@sibnia.ru

Weight efficiency of the anisogrid circular cylindrical shells exposed to transverse bending and internal pressure

© L.P. Zheleznov

S.A. Chaplygin Siberian Research Institute of Aviation (SibNIA),
Novosibirsk, 630051, Russian Federation
Siberian Transport University, Novosibirsk, 630049, Russian Federation

The paper presents results of studies obtained on the basis of a methodology developed by the author that implements the finite element method in solving the strength and stability problems of the reinforced cylindrical shells made of the composite material, taking into account their momentness and nonlinearity in the subcritical stress-strain state. The geometrically nonlinear stability problem is solved by the finite element method using the Newton—Kantorovich linearization. Critical loads are determined in the process of solving the nonlinear problem based on the Sylvester criterion. In solving the problem, finite elements of the composite cylindrical shells of natural curvature developed by the author based on the Timoshenko hypothesis are used. Their displacement approximation exactly identifies the rigid displacement positively effecting the solution convergence. The paper studies stability under the transverse bending with internal pressure provided by the anisogrid circular cylindrical shell. It demonstrates the influence of nonlinear deformation, internal pressure, reinforcement set stiffness, laying reinforcement angles and the shell thickness on the critical loads in losing the shell stability and weight efficiency while using the composite materials.

Keywords: *transverse bending, internal pressure, cylindrical composite shells, nonlinear deformation, stability, weight efficiency, finite element method*

REFERENCES

- [1] Vasiliev V.V. *Mekhanika konstruksiy iz kompozitnykh materialov* [Mechanics of structures made of composite materials]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1988, 272 p.
- [2] Vasiliev V.V., Bunakov V.A. *Proektirovanie setchatykh kompozitnykh tsilindricheskikh obolochek, szhatykh v osevom napravlenii* [Design of the mesh composite cylindrical shells compressed in the axial direction]. *Mekhanika konstruksiy iz kompozitsionnykh materialov*, 2000, no. 2, pp. 68–77.
- [3] Burnysheva T.V. *Razrabotka i primeneniye metodologii vychislitel'nogo eksperimenta pri raschete i diagnostike anizogridnykh konstruksiy kosmicheskikh letatelnykh apparatov: Dis. ... d-ra tekhn. nauk* [Development and application of the methodology of computational experiment in calculation and diagnosis of the spacecraft anisogrid structures. Diss. ... Dr. Sc. (Eng.)]. Novosibirsk, Novosibirsk State Technical University Publ., 2017, 451 p.
- [4] Azarov A.V. *Problema proektirovaniya aerokosmicheskikh setchatykh kompozitnykh materialov* [The Problem of designing aerospace mesh composite structures]. *Izvestiya RAN. MTT — Mechanics of Solids. A Journal of Russian Academy of Sciences*, 2018, no. 4, pp. 85–93.
- [5] *Ustoychivost obolochek iz armirovannykh materialov* [Stability of shells made of the reinforced materials]. Kyiv, Naukova Dumka Publ., 1978, 211 p.
- [6] Karmishin A.V., Lyaskovets V.A., Myachenkov V.I., Frolov A.N. *Statistika i dinamika obolochechnykh konstruksiy* [Statistics and dynamics of the shell structures]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1975, 376 p.

- [7] Bakulin V.N., Vinogradov Yu.I. Analiticheskoe i asimptotichnoe reshenie kraevykh zadach mekhaniki deformirovaniya obolochek pri sosredotochenom nagruzhenii [Analytical and asymptotic solution of boundary value problems in the mechanics of deformed shells under concentrated loading]. *Izvestiya vuzov. Aviatcionnaya tekhnika — Russian Aeronautics*, 2017, no. 1, pp. 14–20.
- [8] Dmitriev V.G., Biryukov V.I., Egorova O.V., Zhavoronok S.I., Rabinsky L.N. Nelineynoe deformirovanie mnogosloynnykh kompozitnykh obolochek vrashcheniya pri bolshikh peremeshcheniyakh i uglakh povorota normali [Nonlinear deformation of the multilayer composite shells of rotation at large displacements and angles of the normal]. *Izvestiya vuzov. Aviatcionnaya tekhnika — Russian Aeronautics*, 2017, no. 2, pp. 8–15.
- [9] Gureeva N.A., Klochkov Yu.V., Nikolaev A.P. Raschet osesimmetrichno nagruzhennoy obolochka vrashcheniya s uchetom geometricheskoy nelineynosti na osnove smeshannogo MKE [Analysis of a shell of revolution subjected to axisymmetric loading taking into account geometric nonlinearity on the basis of the mixed finite element method]. *Izvestiya vuzov. Aviatcionnaya tekhnika — Russian Aeronautics*, 2014, no. 3, pp. 14–19.
- [10] Zheleznov L.P., Kabanov V.V. Issledovanie nelineynogo deformirovaniya i ustoychivosti nekrugovykh tsilindricheskikh obolochek pri osevom szhatii i vnutrennem davlenii [Nonlinear deformation and stability of noncircular cylindrical shells under internal pressure and axial compression]. *SO RAN. PMTF — Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 2002, vol. 43, no. 4, pp. 155–160.
- [11] Bakulin V.N. Posloynnoe issledovanie napryazhenno-deformirovannogo sostoyaniya trekhslonnykh konicheskikh otsekov letatelnykh apparatov s pryamougolnymi v plane vyrezami [Layered study of the stress-strain state of three-layer conical compartments of aircraft with rectangular cutouts in plan]. *Izvestiya vuzov. Aviatcionnaya tekhnika — Russian Aeronautics*, 2022, no. 4, pp. 37–43.
- [12] Zheleznov L.P. *Programa dlya rascheta na prochnost i ustoychivost podkrepennykh negruzovykh tsilindricheskikh obolochek* [Program for calculating the strength and stability of reinforced non-circular cylindrical shells]. Svidetelstvo o gos. registratsii programmy dlya EVM No. 2013615613 RF. Zaregistrirvano v reestre Rospatenta 17.06. 2013 [Certificate of State Registration of the Computer Program No. 2013615613, the Russian Federation. Registered in the Rospatent register on 17.06.2013].
- [13] Boyko D.V., Zheleznov L.P., Kabanov V.V. Nelineynoe deformirovanie i ustoychivost ovalnykh tsilindricheskikh obolochek pri chistom izgibe s vnutrennim davleniem [Nonlinear deformation and stability of oval cylindrical shells under pure bending and internal pressure]. *SO RAN. PMTF — Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 2006, vol. 47, no. 3, pp. 119–125.
- [14] Boyko D.V., Zheleznov L.P., Kabanov V.V. Issledovanie nelineynogo deformirovaniya i ustoychivosti ovalnykh tsilindricheskikh obolochek pri kombinirovannom nagruzhenii izgibayushchim i krutyashchim momentami [Investigation of nonlinear deformation and stability of oval cylindrical shells under combined bending and torque loading]. *Izvestiya vuzov. Aviatcionnaya tekhnika — Russian Aeronautics*, 2007, no. 3, pp. 3–8.
- [15] Boyko D.V., Zheleznov L.P., Kabanov V.V. Nelineynoe deformirovanie i ustoychivost diskretno-podkrepennykh ovalnykh tsilindricheskikh kompozitnykh obolochek pri poperechnom izgibe i vnutrennem davlenii [Nonlinear deformation and stability of discretely-supported egg-shaped cylindrical composite shells under transversal bending and internal pressure]. *Problemy mashinostroeniya i nadezhnosti mashin — Journal of Machinery Manufacture and Reliability*, 2014, no. 6, pp. 23–30.

- [16] Boyko D.V., Zheleznov L.P., Kabanov V.V. Nelineynoe deformirovanie i ustoychivost diskretno-podkreplennykh elipticheskikh tsilindricheskikh kompozitnykh obolochek pri kruchenii i vnutrennem davlenii [Nonlinear deformation and stability of discretely supported egg-shaped cylindrical composite shells under torsion and internal pressure]. *Izvestiya vuzov. Aviatsionnaya tekhnika — Russian Aeronautics*, 2018, no. 2, pp. 27–34.
- [17] Postnov V.A., Kharkhurim I.Ya. *Metod konechnykh elementov v raschetakh sudovykh konstruksiy* [The finite element method in calculations of the ship structures]. Leningrad, Sydstroenie Publ., 1974, 341 p.
- [18] Kantorovich L.V., Akilov G.P. *Funktsionalnyi analiz v normirovannykh prostanstvakh* [Functional analysis in the normalized space]. Moscow, Fizmatgiz Publ., 1959, 684 p.
- [19] Wilkinson D., Reinsch K. *Handbook for Automatic Computation, Vol. II, Linear Algebra*. New York, Springer Verlag, 1971 [In Russ.: Uilkinson D., Raynsh K. Spravochnik algoritmov na yazyke Algol. Lineynaya algebra. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1976, 390 p.].
- [20] Zheleznov L.P. Issledovanie poryadka ukladyvaniya monosloev na ustoychivost kompozitnoy tsilindricheskoy obolochki [Study of the effect of the monolayers stacking sequence on the composite cylindrical shell stability]. *Izvestiya vysokikh uchebnykh zavedeniy. Mashinostroenie — BMSTU Journal of Mechanical Engineering*, 2022, no. 1, pp. 71–83.
- [21] Olegin I.P., Maksimenko V.N. *Teoreticheskie osnovy metodov rascheta prochnosti elementov konstruksiy iz kompozitov* [Theoretical foundations of methods for calculating the strength of structural elements made of composites]. Novosibirsk, NGTU Publ., 2006, 240 p.
- [22] Vasiliev V.V., Barynin V.A., Razin A.F., Petrokovsky S.A., Khaimanovich V.I. Anizogridnye kompozitnye setchatye konstruksii – razrabotka i prilozhenie k kosmicheskoy tekhnike [Anisogrid composite mesh structures development and application to space technology]. *Kompozity i nanostruktury — Composites and Nanostructures*, 2009, no. 3, pp. 38–50.
- [23] Kabanov V.V. *Ustoychivost neodnorodnykh tsilindricheskikh obolochek* [Stability of inhomogeneous cylindrical shells]. Moscow, Mashinostroenie, 1982, 256 p.

Zheleznov L.P., Dr. Sc. (Eng.), Deputy Head for Science of the Department of Fatigue and Static Strength of Structures, Chaplygin Siberian Research Institute of Aviation (SibNIA); Professor, Department of ITT, Siberian Transport University; author of more than 130 scientific papers in the aircraft strength. e-mail: zgeleznov@sibnia.ru