

## **Разработка и верификация энергетического метода расчета расщепления частот собственных колебаний кольцевых резонаторов гироскопических приборов**

© Р.М. Киселев, Ф.Д. Сорокин

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Российская Федерация

*Предложен энергетический метод для расчета расщепления частоты собственных колебаний резонатора микромеханического гироскопа кольцевой формы. Известно, что расщепление собственной частоты, на которой работает прибор, приводит к существенному снижению его точности, поэтому знание величины расщепления важно для практики. Традиционным способом расчета расщепления является исследование дифференциальных уравнений колебаний динамически несимметричного упругого кольца в сочетании с методом возмущений. Вместо анализа дифференциальных уравнений предложено рассчитывать расщепление на основе выражений для потенциальной и кинетической энергий вибрирующего кольца. Математический аппарат при этом значительно упрощается, так как вычисления сводятся к традиционным матричным операциям. Выполнен анализ влияния дефектов резонатора на расщепление. Результаты успешно верифицированы по литературным источникам.*

**Ключевые слова:** инерциальная навигация, микромеханический гироскоп, кольцевой резонатор, расщепление частоты собственных колебаний, погрешность измерений

**Введение.** Кольцевые резонаторы широко применяются в качестве чувствительного элемента в микромеханических гироскопах (ММГ) и твердотельных волновых гироскопах (ТВГ) [1, 2]. Указанные гироскопы являются датчиками определения угловых скоростей и углов поворота. Как правило, ММГ и ТВГ объединяются в инерциально-навигационную систему (ИНС), состоящую из трех ортогонально расположенных гироскопов и акселерометра, а также вспомогательных элементов [3, 4]. В свою очередь, ИНС используется для автономного определения ориентации и перемещения объектов в инерциальном пространстве. Широкое применение ИНС нашли в системах с краткосрочной навигацией — в беспилотных летательных аппаратах [5], робототехнике [6], прецизионных станках [7], космических аппаратах [8], а также в устройствах, в которых не требуется высокая точность измерений [9]: смартфонах, планшетах, «умных» часах и т. д.

Преимущества ММГ и ТВГ заключаются в их низкой стоимости, простоте, технологичности, автономности, малых габаритах, низком энергопотреблении. К недостаткам ММГ и ТВГ относятся существенное влияние дефектов на точность измерений и ярко выраженная зависимость погрешностей прибора от температуры, времени работы, давления и внешнего воздействия. Для оценки влияния

дефектов на качественные показатели работы ММГ и ТВГ необходимо математически описать динамику неидеального резонатора гироскопа, поскольку резонатор является основным рабочим элементом гироскопа и непосредственно от резонатора поступает информация о положении тела в инерциальном пространстве.

Основной проблемой инерциальных датчиков определения угловых скоростей, к которым относятся и кольцевые гироскопы, является существенное накопление погрешности измерения в зависимости от времени запуска. По этой причине данный класс датчиков используется преимущественно в краткосрочной навигации и в устройствах, в которых не требуется высокая точность измерений [10].

Главной причиной низкой точности измерений кольцевых гироскопов является сильная чувствительность резонатора гироскопа к дефектам и диссипации энергии. Вследствие различных дефектов, связанных с непостоянностью механических характеристик материала резонатора и технологическими нарушениями, возникает расщепление частот собственных колебаний резонатора (далее — просто «расщепление»), которое приводит к возникновению неестественной прецессии рабочей формы колебаний резонатора и, как следствие, к снижению точности инерциальных измерений [11]. Одним из методов уменьшения расщепления является балансировка гироскопа, которая назначается в соответствии с результатами исследования динамики дефектного резонатора [12].

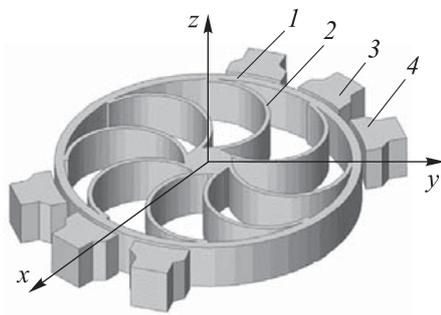
Цель данной работы — продемонстрировать энергетический метод (ЭМ) расчета расщепления собственных частот неидеального кольцевого резонатора ММГ или ТВГ. В качестве критерия для оценки качества измерений прибора выбрано расщепление, вызванное неидеальностью механических характеристик или неравномерным распределением плотности материала. Математическая модель строилась на традиционной расчетной схеме упругого кольца [13].

**Математическая модель неидеального кольцевого резонатора.** Кольцевой резонатор микромеханического гироскопа (рис. 1) является тонкостенной осесимметричной оболочкой постоянного радиуса с отношением толщины к радиусу от 1:100 до 1:20, поэтому для его описания могут быть использованы уравнения теории оболочек. Однако размеры поперечного сечения резонатора существенно меньше его диаметра, поэтому вполне пригодной оказывается гораздо более простая расчетная схема криволинейного стержня с круговой осью, которая и взята за основу в данной работе.

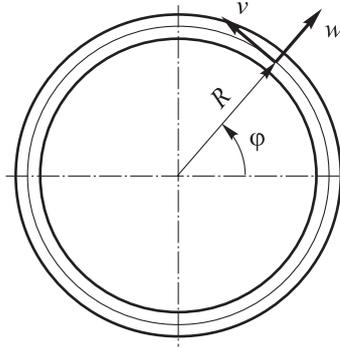
Рассмотрим колебания тонкостенного кольца (рис. 2).

При исследовании изгибных колебаний растяжимостью кольца можно пренебречь [13, 14], что приводит к условию нерастяжимости

$$\frac{\partial v}{R \partial \varphi} + \frac{w}{R} = 0. \quad (1)$$



**Рис. 1.** Основные элементы гироскопа с кольцевым резонатором:  
1 — резонатор; 2 — торсионы; 3 — электроды возбуждения; 4 — измерительные электроды



**Рис. 2.** Расчетная схема резонатора:  
 $R$  — радиус осевой линии сечения;  $v$  — окружное перемещение;  $w$  — радиальное перемещение;  $\varphi$  — полярный угол

Из уравнения (1) выразим радиальное перемещение  $w$ :

$$w = -\frac{\partial v}{\partial \varphi}. \quad (2)$$

Угол поворота сечения кольца [14]

$$\vartheta = \frac{v}{R} - \frac{\partial w}{R \partial \varphi}. \quad (3)$$

Из соотношений (2) и (3) следует,

$$\vartheta = \frac{1}{R} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} + v \right). \quad (4)$$

Приращение кривизны осевой линии кольца  $\varkappa$  равно производной угла поворота по дуге [13, 14]:

$$\varkappa = \frac{\partial \vartheta}{R \partial \varphi} = \frac{1}{R^2} \left( \frac{\partial^3 v}{\partial \varphi^3} + \frac{\partial v}{\partial \varphi} \right). \quad (5)$$

Для вывода дифференциального уравнения (ДУ) колебаний резонатора запишем выражения для кинетической и потенциальной энергии системы и воспользуемся принципом Гамильтона. Кинетическая энергия динамической системы

$$T = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left( \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 \right) \rho A R d\varphi = \frac{R}{2} \int_0^{2\pi} \left( \left( \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi \partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 \right) \rho A d\varphi, \quad (6)$$

где  $t$  — время;  $\rho$  — плотность материала;  $A$  — площадь поперечного сечения кольца.

Потенциальная энергия вычисляется через найденное выше представление кривизны:

$$U = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} EJ\alpha^2 R d\varphi = \frac{1}{2R^3} \int_0^{2\pi} EJ \left( \frac{\partial^3 v}{\partial \varphi^3} + \frac{\partial v}{\partial \varphi} \right)^2 d\varphi, \quad (7)$$

где  $E$  — модуль упругости;  $J$  — момент инерции поперечного сечения кольца относительно оси, перпендикулярной плоскости кольца.

Из условия стационарности функционала действия (принцип Гамильтона [15]) могут быть получены ДУ движения кольца в частных производных:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (T - U) dt = 0. \quad (8)$$

Однако ДУ в частных производных для достижения целей данной статьи оказываются излишне общими. При определении собственных частот и форм достаточно принять, что движение происходит по гармоническому закону

$$v(\varphi, t) = \tilde{v}(\varphi) \cos pt, \quad (9)$$

где  $\tilde{v}(\varphi)$  — амплитудное по времени значение  $v$ ;  $p$  — круговая частота собственных колебаний.

Подстановка выражения (9) в формулы (6) и (7) приводит к амплитудным значениям кинетической и потенциальной энергий

$$\begin{aligned} \tilde{T} &= \frac{Rp^2}{2} \int_0^{2\pi} \left( \left( \frac{d\tilde{v}}{d\varphi} \right)^2 + \tilde{v}^2 \right) \rho A d\varphi; \\ \tilde{U} &= \frac{1}{2R^3} \int_0^{2\pi} EJ \left( \frac{d^3 \tilde{v}}{d\varphi^3} + \frac{d\tilde{v}}{d\varphi} \right)^2 d\varphi. \end{aligned} \quad (10)$$

Принцип Гамильтона при этом сводится к условию стационарности амплитудного значения действия

$$\delta(\tilde{T} - \tilde{U}) = 0. \quad (11)$$

Из выражения (11) следует обыкновенное дифференциальное уравнение для вычисления форм и частот собственных колебаний кольца

$$\frac{1}{R^3} \left( \frac{d^3}{d\varphi^3} + \frac{d}{d\varphi} \right) \left[ EJ \left( \frac{d^3 \tilde{v}}{d\varphi^3} + \frac{d\tilde{v}}{d\varphi} \right) \right] + Rp^2 \left[ \frac{d}{d\varphi} \left( \rho A \frac{d\tilde{v}}{d\varphi} \right) - \rho A \tilde{v} \right] = 0. \quad (12)$$

Аналогичное ДУ в иной форме получено в [2].

В случае постоянства параметров  $EJ$  и  $\rho A$  по угловой координате  $\varphi$  уравнение (12) преобразуется к известному виду [2]:

$$\frac{EJ}{\rho AR^4} \left( \frac{d^6 \tilde{v}}{d\varphi^6} + 2 \frac{d^4 \tilde{v}}{d\varphi^4} + \frac{d^2 \tilde{v}}{d\varphi^2} \right) + p^2 \left( \frac{d^2 \tilde{v}}{d\varphi^2} - \tilde{v} \right) = 0. \quad (13)$$

В случае замкнутого кольца естественным решением ДУ (13) являются тригонометрические функции

$$\tilde{v} = B \cos k(\varphi - \psi), \quad (14)$$

где  $B$  — амплитуда колебаний;  $\psi$  — произвольная фаза.

Подстановка формулы (14) в уравнение (13) дает известное из [2, 13] аналитическое выражение для круговых частот собственных колебаний идеального кольца:

$$p = \sqrt{\frac{k^2 (k^2 - 1)^2 EJ}{(k^2 + 1) \rho AR^4}}. \quad (15)$$

Для идеального кольца каждая из собственных частот (15) является кратной, что объясняется полной динамической симметрией (нет зависимости от фазы  $\psi$ ). Если же один из параметров  $EJ$ ,  $\rho A$  или оба сразу начинают отклоняться от постоянного значения, то динамическая симметрия нарушается и вместо двух одинаковых частот получаются близкие, но разные частоты, т. е. собственная частота расщепляется. Полученное выше ДУ (12) в сочетании с методом возмущений позволяет находить указанное расщепление [16]. Однако построение возмущенных операторов для ДУ (12) приводит в общем случае к чрезвычайно громоздким выкладкам. С целью избежать этих выкладок и был разработан указанный в названии статьи энергетический метод.

**Энергетический метод.** Полученное выше ДУ колебаний неидеального кругового кольца ( $EJ \neq \text{const}$ ,  $\rho A \neq \text{const}$ ) является чрезвычайно громоздким, особенно если возмутить его коэффициенты. Однако формулы (10) для амплитудных значений потенциальной и кинетической энергий не выглядят громоздкими. Поэтому весьма привлекательным оказывается вычислительный прием преобразования энергий (10) в матричную форму с полным отказом от построения ДУ. При этом вычисление расщепления сводится к операциям над матрицами [17].

Аналогично тому, как это сделано в работе [14], представим функцию окружных перемещений отрезком тригонометрического ряда:

$$\tilde{v} = \sum_{k=0}^n \tilde{v}_k^{(c)} \cos k\varphi + \sum_{k=1}^n \tilde{v}_k^{(s)} \sin k\varphi, \quad (16)$$

где  $n$  — наибольший номер удерживаемой гармоники; верхние индексы помечают принадлежность к косинусу или синусу.

Все переменные по окружности параметры ( $E(\varphi)$ ,  $A(\varphi)$ ,  $J(\varphi)$ ,  $\rho(\varphi)$ ), определяющие свойства кольца, тоже могут быть представлены суммами вида (16). Например, напыление небольшого слоя материала на поверхность кольца, которое выполняется при балансировке, можно условно представить в виде неравномерного распределения плотности:

$$\rho = \rho_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (\rho_k^{(c)} \cos k\varphi + \rho_k^{(s)} \sin k\varphi). \quad (17)$$

Коэффициенты разложения (16) образуют вектор состояния механической системы, состоящий из  $(2n + 1)$  элементов:

$$\mathbf{Y} = (\tilde{v}_0^{(c)}, \tilde{v}_1^{(c)}, \tilde{v}_1^{(s)}, \tilde{v}_2^{(c)}, \tilde{v}_2^{(s)}, \dots, \tilde{v}_n^{(c)}, \tilde{v}_n^{(s)})^T. \quad (18)$$

Подстановка разложения (16) в формулы (10) с учетом представления параметров  $E(\varphi)$ ,  $A(\varphi)$ ,  $J(\varphi)$ ,  $\rho(\varphi)$  тригонометрическими суммами вида (17) и вычисления определенных интегралов по  $\varphi$  превращает амплитудные значения энергий в квадратичные формы:

$$\begin{aligned} \tilde{T} &= \lambda \frac{1}{2} \mathbf{Y}^T [\mathbf{M}] \mathbf{Y}; \\ \tilde{U} &= \frac{1}{2} \mathbf{Y}^T [\mathbf{K}] \mathbf{Y}, \end{aligned} \quad (19)$$

где  $\lambda = p^2$  — характеристическое число;  $[\mathbf{M}]$  — матрица масс;  $[\mathbf{K}]$  — матрица жесткости.

Элементы матриц  $[\mathbf{M}]$  и  $[\mathbf{K}]$  вычисляли символьным дифференцированием после взятия интегралов по  $\varphi$ :

$$M_{ij} = \frac{1}{p^2} \frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial Y_i \partial Y_j}; \quad K_{ij} = \frac{\partial^2 \tilde{U}}{\partial Y_i \partial Y_j}. \quad (20)$$

Характеристическое число  $\lambda$  введено в выражения (19) для перехода к стандартным обозначениям и методикам линейной алгебры. Отметим, что вычисление определенных интегралов по  $\varphi$ , необходимое при переходе от формул (10) к формулам (19), выполнялось в аналитическом виде с привлечением процедур символьных преобразований компьютерного математического пакета MATLAB [18]. Таким образом, выражения для матриц  $[\mathbf{M}]$  и  $[\mathbf{K}]$  были получены в символьном виде, поэтому некоторые последующие результаты также удалось представить в символьном виде.

Условие стационарности функционала действия (11) с учетом формул (19) приводит к стандартной задаче линейной алгебры на собственные значения:

$$[\mathbf{K}]\mathbf{Y} - \lambda[\mathbf{M}]\mathbf{Y} = 0. \quad (21)$$

Как известно, собственные значения  $\lambda$  для однородной системы (21) определяются следующим характеристическим уравнением:

$$|[\mathbf{K}] - \lambda[\mathbf{M}]| = 0. \quad (22)$$

Таким образом, энергетический метод позволил свести определение собственных значений и далее расщепления к стандартной задаче линейной алгебры, которая весьма хорошо исследована.

**Численная реализация и верификация энергетического метода.** Для вывода символьных выражений коэффициентов матриц  $[\mathbf{M}]$  и  $[\mathbf{K}]$  и решения уравнения (22) были использованы стандартные процедуры из пакета MATLAB для аналитических и численных вычислений с применением библиотек `vpsolve`, `nsolve`, `int`, `diff`, `vpaintegral` [18].

Верификация ЭМ выполнялась сопоставлением результатов указанного метода с результатами альтернативных подходов. Рассмотрим кольцевой резонатор микромеханического гироскопа с параметрами, приведенными ниже:

Радиус срединной окружности $R$ , мм .....	20
Ширина поперечного сечения кольца $h$ , мм .....	0,5
Высота поперечного сечения кольца $b$ , мм .....	3
Модуль Юнга $E$ , Па .....	$7 \cdot 10^{10}$
Средняя плотность $\rho_0$ , кг/м <sup>3</sup> .....	2210
Коэффициенты функции плотности $\rho(\varphi)$ , $\rho_m$ ( $m \neq 0$ ), кг/м <sup>3</sup> .....	22,1

Простейшая проверка предлагаемого метода состоит в вычислении собственных значений для идеального кольцевого резонатора ( $\rho(\varphi) = \text{const} = \rho_0$ ,  $A = \text{const}$ ,  $EJ = \text{const}$ ). Формула (15) для случая  $k = 2$  при этом приводит к известному результату:

$$\lambda_0 = \frac{36EJ}{5\rho_0AR^4} = \frac{3Eh^2}{5\rho_0R^4}; \quad A = bh, \quad J = \frac{bh^3}{12}. \quad (23)$$

Разумеется, результаты вычисления  $\lambda_0$  по (22) и (23) полностью совпали.

Более сложной является проверка предлагаемого метода при наличии только одной гармоники дефекта плотности  $\rho(\varphi) = \rho_0 + \rho_m \cos(m\varphi)$ . Напомним, что в действительности плотность не изменяется по гармоническому закону вдоль дуги кольца, эта зависимость условно учитывает дополнительные массы, напыляемые на кольцо при балансировке гироскопа. Результаты аналитических вычислений представлены в табл. 1.

Верификация ЭМ для случая  $\rho = \rho_0 + \rho_m \cos(m\varphi)$ 

$m$	Относительное расщепление $\frac{P_{\max} - P_{\min}}{P_0}$	
	ЭМ	Альтернативный метод [16]
1	0	0
2	$\frac{\rho_2^2}{20\rho_0^2 - 2\rho_2^2}$	$\frac{\rho_2^2}{20\rho_0^2}$
3	0	0
4	$\frac{30\rho_0\rho_4}{100\rho_0^2 - 9\rho_4^2}$	$\frac{3\rho_4}{10\rho_0}$
5 и более	0	0

Вычисления выполнялись с количеством удерживаемых гармоник  $n = k_{\max} = 2m$  в разложении (16), так как дальнейшее увеличение  $n$  не изменяло результатов.

Как видно из табл. 1, в случае удержания одной гармоники несовершенства плотности ЭМ показывает хорошее соответствие с альтернативным аналитическим решением. При этом следует отметить, что ЭМ дает более сложные, но более точные аналитические выражения для расщепления. Очевидно, что оба столбца в табл. 1 совпадут, если отбросить  $\rho_2^2$  и  $\rho_4^2$  с учетом малости этих слагаемых по сравнению с  $\rho_0^2$ . Указанное совпадение можно рассматривать как успех ЭМ.

Рассмотрим более сложный случай одновременного учета в разложении плотности двух разных гармоник:

$$\rho = \rho_0 + \rho_{m_1} \cos(m_1\varphi) + \rho_{m_2} \cos(m_2\varphi). \quad (24)$$

Для случая (24) в работе [16] расщепление также удалось представить в аналитическом виде, однако полученные в [16] формулы довольно громоздки, поэтому здесь не приведены. Так как символьные выражения в данной статье показать невозможно, последующие расчеты были выполнены численно с применением библиотек пакета MATLAB [18]. Результаты численных экспериментов для случая (24) представлены в табл. 2.

Вычисления выполнялись с количеством удерживаемых гармоник  $n = k_{\max} = \max(2m_1, 2m_2)$  в разложении (16), так как дальнейшее увеличение  $n$  не изменяло результатов.

Верификация ЭМ для случая  $\rho = \rho_0 + \rho_{m_1} \cos(m_1\varphi) + \rho_{m_2} \cos(m_2\varphi)$ 

Номера гармоник дефекта плотности		Относительное расщепление $\frac{p_{\max} - p_{\min}}{p_0}$		Относительная погрешность, %
$m_1$	$m_2$	Решение [16]	ЭМ	
2	0	$1,25 \cdot 10^{-6}$	$1,25000185 \cdot 10^{-6}$	$1,85 \cdot 10^{-4}$
4	0	$1,5 \cdot 10^{-3}$	$1,500000135 \cdot 10^{-3}$	$1,35 \cdot 10^{-5}$
1	3	$3,75 \cdot 10^{-6}$	$3,7500029 \cdot 10^{-6}$	$7,33 \cdot 10^{-5}$
1	5	$1,25 \cdot 10^{-6}$	$1,250003235 \cdot 10^{-6}$	$2,6 \cdot 10^{-4}$
2	6	$3,26087 \cdot 10^{-7}$	$1,5760895 \cdot 10^{-6}$	–
3	7	$1,253799 \cdot 10^{-7}$	$1,2538011 \cdot 10^{-7}$	$2,1 \cdot 10^{-4}$
4	8	$5,87 \cdot 10^{-8}$	$1,500003375 \cdot 10^{-3}$	–
5	9	$3,11895 \cdot 10^{-8}$	$3,1189996 \cdot 10^{-8}$	$5 \cdot 10^{-3}$
6	10	$1,81 \cdot 10^{-8}$	$1,810306576 \cdot 10^{-8}$	$3 \cdot 10^{-2}$
7	11	$1,1228 \cdot 10^{-8}$	$1,122806059 \cdot 10^{-8}$	$6 \cdot 10^{-3}$
8	12	$0,733325 \cdot 10^{-8}$	$0,733362 \cdot 10^{-8}$	$5,1 \cdot 10^{-3}$

Как видно из табл. 2, ЭМ обладает очень высокой точностью. Погрешность ЭМ намного меньше погрешности измерительных приборов. В работе [16] проводилось сопоставление решений аналитических и методом конечных элементов (МКЭ). При этом выяснилось, что в применении к рассмотренной задаче (случай  $m_1 = 8$ ,  $m_2 = 12$ ) погрешность МКЭ составляет около 5 %. Такой уровень погрешности вполне приемлем для оценки влияния дефектов, но не очень приемлем при проведении верификации, т. е. из табл. 2 следует, что ЭМ дает намного точнее результаты, чем МКЭ.

При оценке влияния дефектов плотности в литературе обычно рассматривают каждую гармонику отдельно от других и полагают, что наибольший вклад оказывает 4-я гармоника дефекта плотности. Однако в работе [16] показано, что комбинация двух гармоник, удовлетворяющих условию  $m_1 = m_2 + 4$  ( $m_2 \neq 0$ ), или сочетание ( $m_1 = 1$ ,  $m_2 = 3$ ) являются опасными.

Кроме того, расчеты путем ЭМ подтвердили, что 4-я гармоника  $\rho_4$  дефекта плотности  $\Delta\rho = \rho - \rho_0$  подавляет влияние других гармоник разложения  $\Delta\rho$  в тригонометрический ряд по  $\varphi$ , однако выяснилось, что комбинация ( $m_1 = 2$ ,  $m_2 = 6$ ) приводит к значительному увеличению расщепления (см. табл. 2).

**Заключение.** Предложен энергетический метод расчета расщепления частот собственных колебаний кольцевых резонаторов ММГ и ТВГ, который позволяет отказаться от сложного и громоздкого аппарата метода возмущений дифференциальных операторов и заменить его намного более простым математическим аппаратом линейной алгебры, включая матрицы, скалярные произведения, собственные значения и т. п. Энергетический метод успешно верифицирован по результатам, приведенным в работах других авторов.

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Матвеев В.А. *Гироскоп – это просто*. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2012, 149 с.
- [2] Журавлев В.Ф., Климов Д.М. *Волновой твердотельный гироскоп*. Москва, Наука, 1985, с. 125.
- [3] Sorokin F., Kiselev R., Golovleva A. Analysis of post-processing methods of IMU MEMS cluster of autonomous navigation of ground transport systems. *E3S Web of Conferences*, 2024, vol. 471, Article Number 04026. <https://doi.org/10.1051/e3sconf/202447104026>
- [4] Тимошенко С.П., Михеев А.В., Тимошенко А.С., Полушкин В.М. Перспективы разработки и производства микроакселерометров, микрогироскопов и инерциальных навигационных систем на основе МЭМС. *Наноиндустрия*, 2020, № S499, с. 468–469.
- [5] Ермаков П.Г., Гоголев А.А. Сравнительный анализ схем комплексирования информации бесплатформенных инерциальных навигационных систем беспилотных летательных аппаратов. *Труды МАИ*, 2021, № 117, с. 2. DOI: 10.34759/trd-2021-117-11
- [6] Бобцов А.А., Добриборщ Д., Капитонова А.А. Система навигации и управления движением мобильным роботом. *Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики*, 2017, № 2, с. 365–367.
- [7] Е Тет Л., Хтет П.С., Чжо С.В. Моделирование и визуализация траекторий гиба трубы с помощью МЭМС. *Инженерный вестник Дона*, 2021, № 3 (75), с. 58–68.
- [8] Нестеров И.И., Мальгин Н.В., Кутман А.Б., Торпок А.А. Высокоточные МЭМС инерциальные навигационные системы. *Экстремальная робототехника*, 2022, № 1 (33), с. 229–231.
- [9] Levitskiy A.A., Marinushkin P.S. Development and applications of MEMS components. *Journal of Siberian Federal University, Engineering and Technologies*, 2015, no. 3, pp. 290–296.
- [10] Киселев Р.М., Бабаев Е.В., Некрасов А.В., Косторной А.Н. О построении кластерного решения на базе ИНС МЭМС с целью повышения точностных характеристик навигационных систем. *Моделирование авиационных систем. Сб. тез. докл. V Всерос. науч.-техн. конф. Москва, 29–30 ноября 2023 г., ГосНИИАС*. Москва, 2023, с. 398–401.
- [11] Нарайкин О.С., Сорокин Ф.Д., Гуськов А.М., Козубняк С.А., Вахлярский Д.С. Расчет расщепления собственной частоты цилиндрического резонатора твердотельного волнового гироскопа на основе численного интегрирования высокой точности. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2019, вып. 5 (89), с. 4. DOI: 10.18698/2308-6033-2019-5-1876
- [12] Бабаев Е.В., Косторной А.Н., Большаков Д.С. *Способ настройки вибрационного кольцевого датчика угловых скоростей*. Пат. № 2792945 С1 Российская Федерация, МПК G01C 19/5684, 2023, бюл. № 10.

- [13] Бидерман В.Л. *Теория механических колебаний*. Москва, URSS: Ленанд, 2017, с. 185.
- [14] Бидерман В.Л. *Механика тонкостенных конструкций. Статика*. Москва, URSS: Ленанд, 2017, с. 211.
- [15] Серов М.В., Аверьянова Г.М., Карначева Е.В. Опыт применения вариационного принципа Гамильтона — Остроградского к практическим вопросам составления дифференциальных уравнений свободных малых колебаний. *Известия МГТУ МАМИ*, 2014, № 4 (22), с. 84–89.
- [16] Sorokin F., Vakhlyarsky D., Gousov A. High rise of ring resonator frequency split due to combination of two harmonics of density defect. *Applied Mathematical Modelling*, 2022, vol, 103, pp. 376–387.
- [17] Елисеева Ю.В., Бондаренко А.А. Один метод вычисления собственных значений дискретных задач Штурма—Лиувилля высших порядков. *Вестник МГТУ «Станкин»*, 2011, № 1 (13), с. 95–101.
- [18] Федотов А.А., Храпов П.В. *Численные методы интегрирования, решения дифференциальных уравнений и задач оптимизации*. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2015, с. 76.

Статья поступила в редакцию 17.02.2025

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Киселев Р.М., Сорокин Ф.Д. Разработка и верификация энергетического метода расчета расщепления частот собственных колебаний кольцевых резонаторов гироскопических приборов. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2025, вып. 4. EDN RKABAK

**Киселев Роман Михайлович** — ассистент кафедр «Прикладная механика» и «Теория механизмов и машин» МГТУ им. Н.Э. Баумана.  
e-mail: kiselev.rom@bmstu.ru

**Сорокин Федор Дмитриевич** — д-р техн. наук, профессор кафедры «Прикладная механика» МГТУ им. Н.Э. Баумана. e-mail: sorokinf@bmstu.ru

## Development and verification of the energy method in computing the natural oscillation frequency splitting in a gyroscope ring resonator

© R.M. Kiselev, F.D. Sorokin

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, 105005, Russian Federation

*The paper proposes a new energy method to compute the natural oscillation frequency splitting in a ring-shaped micromechanical gyroscope resonator. It is known that splitting of a natural frequency used by the device in operation leads to a significant decrease in its accuracy; therefore, knowing the splitting value is important in practice. Traditional methods used in the splitting computation include a study of the oscillation differential equations for a dynamically asymmetric elastic ring in combination with the perturbation method. Instead of analyzing the differential equations, the paper suggests to compute splitting based on the expressions for potential and kinetic energies of the oscillating ring. In this case, the mathematical apparatus is significantly simplified, since computation is reduced to the traditional matrix operations. The paper analyzes the resonator defects influence on splitting. The results were successfully verified against the literary sources.*

**Keywords:** inertial navigation, micromechanical gyroscope, ring resonator, natural oscillation frequency splitting, measurement error

### REFERENCES

- [1] Matveev V.A. *Giroskop – eto prosto* [Gyroscope: It is simple]. Moscow, BMSTU Publ., 2012, 149 p.
- [2] Zhuravlev V.F., Klimov D.M. *Volnovoy tverdotelnyi giroskop* [Wave solid-state gyroscope]. Moscow, Nauka Publ., 1985, p. 125.
- [3] Sorokin F., Kiselev R., Golovleva A. Analysis of post-processing methods of IMU MEMS cluster of autonomous navigation of ground transport systems. *E3S Web of Conferences*, 2024, vol. 471, Article Number 04026. <https://doi.org/10.1051/e3sconf/202447104026>
- [4] Timoshenkov S.P., Mikheev A.V., Timoshenkov A.S., Polushkin V.M. Perspektivy razrabotki i proizvodstva mikroakslerometrov, mikrogiroskopov i inertsialnykh navigatsionnykh sistem na osnove MEMS [Prospects for the development and production of the microaccelerometers, microgyroscopes, and inertial navigation systems based on MEMS]. *Nanoindustriya — Nanoindustry*, 2020, no. S499, pp. 468–469.
- [5] Ermakov P.G., Gogolev A.A. Sravnitelnyi analiz skhem kompleksirovaniya informatsii besplatformennykh inertsialnykh navigatsionnykh sistem bespilotnykh letatelnykh apparatov [Comparative analysis of information integration architectures of strapdown inertial navigation systems for unmanned aerial vehicles]. *Trudy MAI*, 2021, no. 117, p. 2. <https://doi.org/10.34759/trd-2021-117-11>
- [6] Bobtsov A.A., Dobriborshch D., Kapitonova A.A. Sistema navigatsii i upravleniya dvizheniem mobilnym robotom [Navigation and control system for a mobile robot]. *Nauchno-tehnicheskiiy vestnik informatsionnykh tekhnologiy, mekhaniki i optiki — Scientific and Technical Journal of Information Technologies, Mechanics and Optics*, 2017, no. 2, pp. 365–367.

- [7] Ye Htet Linn, Htet Soe Paing, Kyaw Soe Win. Modelirovanie i vizualizatsiya traektoriy giba trubyy s pomoshchyu MEMS [Modeling and visualization of pipe bending trajectories using a MEMS sensor]. *Inzhenerny vestnik Dona — Engineering Journal of Don*, 2021, no. 3 (75), pp. 58–68.
- [8] Nesterov I.I., Malgin N.V., Kutman A.B., Toropkov A.A. Vysokotochnye MEMS inertzialnye navigatsionnye sistemy [High-precision MEMS inertial navigation systems with gyrocompassing]. *Ekstremalnaya robototekhnika — Extreme Robotics*, 2022, no. 1 (33), pp. 229–231.
- [9] Levitskiy A.A., Marinushkin P.S. Development and Applications of MEMS Components. *Journal of Siberian Federal University, Engineering and Technologies*, 2015, no. 3, pp. 290–296.
- [10] Kiselev R.M., Babaev E.V., Nekrasov A.V., Kostornoy A.N. O postroenii klaster'nogo resheniya na baze INS MEMS s tselyu povysheniya tochnostnykh kharakteristik navigatsionnykh sistem [On construction of a cluster solution based on the MEMS INS to improve accuracy characteristics of the navigation systems]. *Modelirovanie aviatsionnykh sistem: Sbornik tezisov dokladov V Vserossiyskoy nauchno-tekhnicheskoy konferentsii* [Modeling of Aviation Systems: Collection of Abstracts of the V All-Russian Scientific and Technical Conference]. Moscow, November 29–30, 2023, GosNIIAS Publ., pp. 398–401.
- [11] Naraykin O.S., Sorokin F.D., Guskov A.M., Kozubnyak S.A., Vakhlyarsky D.S. Raschet rasshchepleniya sobstvennoy chastoty tsilindricheskogo rezonatora tverdotelnogo volnovogo giroskopa na osnove chislennogo integrirovaniya vysokoy tochnosti [Calculation of eigen frequency splitting of a cylindrical resonator of a solid-state wave gyroscope based on numerical integration of high accuracy]. *Inzhenerny zhurnal: nauka i innovatsii — Engineering Journal: Science and Innovation*, 2019, iss. 5 (89), p. 4.  
<https://doi.org/10.18698/2308-6033-2019-5-1876>
- [12] Babaev E.V., Kostornoy A.N., Bolshakov D.S. *Sposob nastroyki vibratsionnogo koltsevogo datchika uglovykh skorostey* [Method for adjusting the vibrating ring angular velocity sensor]. Pat. no. 2792945 C1 Russian Federation, IPC G01C 19/5684, 2023, Bulletin no. 10.
- [13] Biderman V.L. *Teoriya mekhanicheskikh kolebaniya* [Theory of mechanical oscillations]. Moscow, URSS, Lenand Pubs., 2017, 185 p.
- [14] Biderman V.L. *Mekhanika tonkostennykh konstruksiy. Statistika* [Mechanics of the thin-walled structures. Statistics]. Moscow, URSS, Lenand Pubs., 2017, 211 p.
- [15] Serov M.V., Averyanova G.M., Karnacheva E.V. Opyt primeneniya variatsionnogo printsipa Gamiltona-Ostrogradskogo k prakticheskim voprosam sostavleniya differentsialnykh uravneniy svobodnykh malykh kolebaniy [Experience of using the variational principle of Hamilton-Ostrogradskiy to practical issues of compilation of differential equations of autonomous small oscillations]. *Izvestia MGTU MAMI*, 2014, no. 4 (22), pp. 84–89.
- [16] Sorokin F., Vakhlyarsky D., Guskov A. High rise of ring resonator frequency split due to combination of two harmonics of density defect. *Applied Mathematical Modelling*, 2022, vol. 103, pp. 376–387.
- [17] Eliseeva Yu.V., Bondarenko A.A. Odin metod vychisleniya sobstvennykh znacheniy diskretnykh zadach Shturma-Liuvillya vysshikh poryadkov [A method of calculating eigenvalues of discrete high order Sturm-Liouville problem]. *Vestnik MGTU "Stankin" – Vestnik MSTU "Stankin"*, 2011, no. 1 (13), pp. 95–101.
- [18] Fedotov A.A., Khrapov P.V. *Chislennyye metody integrirovaniya, resheniya differentsialnykh uravneniy i zadach optimizatsii: Metodicheskie ukazaniya* [Numerical methods in integration and solution of the differential equations and optimization problems: guidelines]. Moscow, BMSTU Publ., 2015, 76 p.

**Kiselev R.M.**, Assistant, Departments of Applied Mechanics and Theory of Mechanisms and Machines, Bauman Moscow State Technical University.  
e-mail: kiselev.rom@bmstu.ru

**Sorokin F.D.**, Dr. Sc. (Eng.), Professor, Department of Applied Mechanics, Bauman Moscow State Technical University. e-mail: sorokinfd@bmstu.ru