

Динамическая осесимметричная задача теории упругости для полого консольно закрепленного цилиндра

© Д.А. Шляхин, Д.В. Раков

Самарский государственный технический университет,
Самара, 443001, Российская Федерация

Построено новое замкнутое решение осесимметричной задачи для толстостенного полого изотропного цилиндра в случае действия на его торцевой и внешней цилиндрической поверхностях нестационарной осесимметричной нагрузки в виде напряжений, нормальных к поверхностям нагружения. Нижняя грань цилиндра жестко закреплена (отсутствуют перемещения в радиальном и аксиальном направлениях), а верхняя грань мембранно закреплена в радиальной плоскости. Замкнутое решение построено при последовательном применении однокомпонентного интегрального преобразования Фурье по аксиальной переменной и обобщенного интегрального преобразования по радиальной координате. Для реализации данного подхода используется процедура приведения граничных условий по торцам цилиндра к смешанным расчетным соотношениям. Построенный алгоритм расчета дает возможность определить напряженно-деформированное состояние цилиндра, а также проанализировать влияние вида нагрузок и их соотношения на поля перемещений и напряжений.

Ключевые слова: нестационарная осесимметричная задача теории упругости, круглый толстостенный цилиндр, конечные интегральные преобразования

Введение. Классической задаче теории упругости, связанной с определением напряженно-деформированного состояния толстостенного кругового цилиндра, посвящены многочисленные исследования. Вместе с тем даже в случае статического нагружения построение аналитического решения связано с большими трудностями. Задача становится значительно сложнее при динамическом воздействии, поэтому в большинстве публикаций анализируется работа конструкций с вырожденной геометрией или выполняются более простые исследования, связанные с анализом установившихся вынужденных [1, 2] и собственных [3–5] колебаний.

В работах [1, 2] совместное использование решений для слоя и длинного цилиндра позволяет составить бесконечную систему алгебраических уравнений для определения постоянных интегрирования. Ее решение дает возможность удовлетворить граничным условиям с заданной точностью. В работах [3, 4] исследования собственных значений позволяют точно удовлетворить граничным условиям на торцах цилиндра и приближенно — на его боковых поверхностях. В публикации [5] уравнения движения представляются в несвязанной форме, что позволяет существенно упростить решение задачи.

Благодаря развитию современной техники возрастает интерес к исследованию цилиндрических тел при действии тепловых и механических нагрузок. Здесь можно отметить работы [6–14], связанные с определением динамической реакции в коротких цилиндрах при нестационарном нагружении. Исследования [6] посвящены определению напряженно-деформированного состояния упругого элемента при осесимметричном динамическом нагружении в виде нормальных напряжений. В [7, 8] задействован алгоритм решения, при котором точно выполняется лишь часть граничных условий на боковых поверхностях и торцах цилиндра. Для удовлетворения оставшихся краевых условий применяется система бесконечных алгебраических уравнений.

В работе [9] при использовании конечного интегрального преобразования построено точное решение осесимметричной динамической задачи для полого цилиндра с произвольными граничными условиями и его криволинейных поверхностей. В статьях [10, 11] исследуется напряженно-деформированное состояние жестко закрепленного кругового диска при силовом и температурном воздействиях, а в [12] определяют остаточные напряжения в термоупругом цилиндре в результате послойной наплавки. В исследовании [13, 14] нижнее основание цилиндра в радиальном направлении и боковая поверхность закреплены, а на верхнюю плоскость действует осесимметричная нормальная нагрузка. В [13] с помощью интегрального преобразования Ганкеля задача сводится к интегральному уравнению первого рода, решение которого записывается в виде ряда, а в [14] решение строится вариационным методом.

В настоящей работе рассматривается динамическая осесимметричная задача для короткого консольно закрепленного цилиндра, выполненного из изотропного материала. Особенность найденного решения заключается в том, что в отличие от полученных ранее аналитических результатов, которые точно удовлетворяли смешанным граничным условиям на торцевых поверхностях, в приведенном алгоритме выполняется условие жесткого закрепления конструкции, а именно отсутствие перемещений. Новое замкнутое решение построено с помощью обобщенного метода конечных интегральных преобразований [15].

Постановка задачи. Пусть полый круглый консольно закрепленный цилиндр занимает в цилиндрической системе координат (r_*, θ, z_*) область $\Omega: \{a \leq r_* \leq b, 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq z_* \leq h^*\}$. (Здесь и далее верхний и нижний индексы в виде звездочки означают, что функция или переменная представлена в размерной форме).

На ее торцевой $(z_* = h^*)$ и цилиндрической $(r_* = b)$ поверхностях задана осесимметричная нестационарная нагрузка $q_1^*(r_*, t_*)$, $q_2^*(z_*, t_*)$

в виде нормальных напряжений (рис. 1). Конструкция выполнена из изотропного материала при мембранном закреплении в радиальной плоскости ее торцевой поверхности.

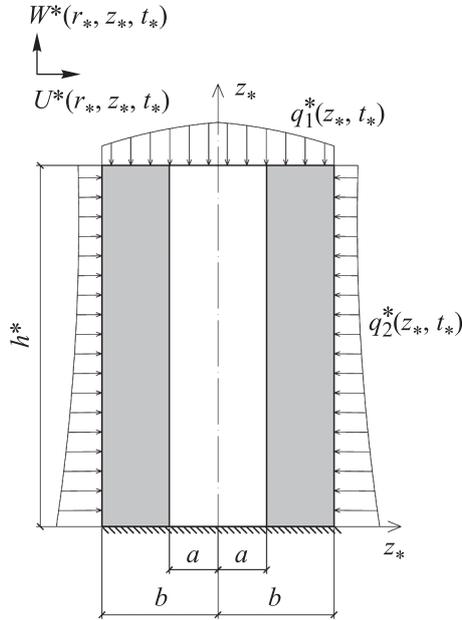


Рис. 1. Расчетная схема цилиндра

Математическая формулировка рассматриваемой задачи в безразмерной форме записывается следующим образом [16]:

$$\frac{\partial}{\partial r} \nabla U + a_1 \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + a_2 \frac{\partial^2 W}{\partial r \partial z} - \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = 0, \quad (1)$$

$$a_1 \nabla \frac{\partial W}{\partial r} + \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} + a_2 \frac{\partial}{\partial z} \nabla U - \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = 0;$$

$$z = 0, h, \left(a_3 \nabla U + \frac{\partial W}{\partial z} \right)_{z=h} = q_1, \quad W|_{z=0} = 0, \quad U|_{z=0, h} = 0; \quad (2)$$

$$r = 1, R, \left[\frac{\partial U}{\partial r} + a_3 \left(\frac{U}{r} + \frac{\partial W}{\partial z} \right) \right]_{r=1} = q_2, \quad (3)$$

$$\left[\frac{\partial U}{\partial r} + a_3 \left(\frac{U}{r} + \frac{\partial W}{\partial z} \right) \right]_{r=R} = 0, \quad \left(\frac{\partial W}{\partial r} + \frac{\partial U}{\partial z} \right)_{z=0, h} = 0;$$

$$t = 0, \quad U = U_0, \quad W = W_0, \quad \frac{\partial U}{\partial t} = \dot{U}_0, \quad \frac{\partial W}{\partial t} = \dot{W}_0; \quad (4)$$

$$\{U, W, r, z, R, h\} = \{U^*, W^*, r_*, z_*, a, h^*\} / b, \quad t = \frac{a_4}{b} t_*, \quad \{q_1, q_2\} = \frac{\{q_1^*, q_2^*\}}{a_4^2 \rho},$$

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}, \quad a_1 = a_2(1-2\nu), \quad a_2 = 0,5(1-\nu)^{-1}, \quad a_3 = \nu(1-\nu)^{-1},$$

$$a_4 = \left[\frac{E(1-\nu)}{\rho(1+\nu)(1-2\nu)} \right]^{0,5};$$

где $U_0, \dot{U}_0, W_0, \dot{W}_0$ — известные в начальный момент перемещения и их скорости; $U^*(r_*, z_*, t_*)$, $W^*(r_*, z_*, t_*)$ — компоненты вектора перемещений; t_* — время; ρ, ν, E — плотность изотропного материала, коэффициент Пуассона и модуль упругости соответственно.

Построение общего решения. Решение краевой задачи (1)–(4) строится методом разделения переменных по пространственным переменным. Для применения конечного интегрального преобразования по переменной z необходимо сформулировать смешанные однородные граничные условия. Для этого граничные условия при $z = 0$ представляются в виде

$$z = 0, \quad a_3 \nabla U + \frac{\partial W}{\partial z} = q_3, \quad U = 0, \quad (5)$$

кроме того, используется следующее разложение:

$$W(r, z, t) = W_1(t) + H_1(r, z, t) + w(r, z, t), \quad (6)$$

где $H_1(r, z, t) = \frac{z^2}{2h} q_1(r, t) + \left(z - \frac{1}{2h} z^2 \right) q_3(r, t)$, $q_3(r, t)$ и $W_1(t)$ — определяются в процессе решения задачи из условия (2) отсутствия вертикальных перемещений при $z = 0$.

В результате подстановки формулы (6) в выражения (1)–(5) формулируется новая краевая задача относительно функций $U(r, z, t)$, $w(r, z, t)$ с однородными смешанными условиями по переменной z . При этом дифференциальные уравнения (1) и граничные условия (3) становятся неоднородными с правыми частями $F_1(r, z, t)$, $F_2(r, z, t)$, $B_1(1, z, t)$, $B_1(R, z, t)$, $B_3(r, z, t)$, а начальные условия относительно аксиальных перемещений имеют вид w_0, \dot{w}_0 :

$$F_1 = -a_2 \frac{\partial^2 H_1}{\partial r \partial z}, \quad F_2 = -a_1 \nabla \frac{\partial H_1}{\partial r} - \frac{\partial^2 H_1}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 H_1}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 W_1}{\partial t^2},$$

$$B_3 = -\frac{z^2}{2h} \frac{\partial q_1}{\partial r} + \left(z - \frac{1}{2h} z^2 \right) \frac{\partial q_3}{\partial r}, \quad B_2 = -a_3 \left[\frac{z}{h} q_1(R, t) + \left(1 - \frac{z}{h} \right) q_3(R, t) \right],$$

$$B_1 = q_2(z, t) - a_3 \left[\frac{z}{h} q_1(1, t) + \left(1 - \frac{z}{h} \right) q_3(1, t) \right], \quad w_0 = W_0 - H_{1|t=0} - W_{1|t=0},$$

$$\dot{w}_0 = \dot{W}_0 - \frac{\partial H_1}{\partial t} - \frac{dW_1}{dt}.$$

К преобразованной краевой задаче (1)–(5) применяют синус- и косинус-преобразования Фурье с конечными пределами по переменной z , используя следующие трансформанты [17]:

$$u_H(r, n, t) = \int_0^h U(r, z, t) \sin(j_n z) dz, \quad (7)$$

$$w_H(r, n, t) = \int_0^h w(r, z, t) \cos(j_n z) dz,$$

с соответствующими формулами обращения

$$U(r, z, t) = \frac{2}{h} \sum_{n=1}^{\infty} u_H(r, n, t) \sin j_n z,$$

$$w(r, z, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \Omega^{-1} w_H(r, n, t) \cos j_n z, \quad (8)$$

$$j_n = n\pi/h, \quad \Omega_n = \begin{cases} h, & (n = 0) \\ h/2, & (n \neq 0). \end{cases}$$

В пространстве изображений Фурье получается следующая начально-краевая задача:

$$\frac{\partial}{\partial r} \nabla u_H - a_1 j_n^2 u_H - a_2 j_n \frac{\partial w_H}{\partial r} - \frac{\partial^2 u_H}{\partial t^2} = F_{1H}, \quad (9)$$

$$a_1 \nabla \frac{\partial w_H}{\partial r} - j_n^2 w_H + a_2 j_n \nabla u_H - \frac{\partial^2 w_H}{\partial t^2} = F_{2H};$$

$$r = 1, R, \quad \frac{\partial u_H}{\partial r} + a_3 \left(\frac{u_H}{r} - j_n w_H \right) = B_{1H}, \quad \frac{\partial w_H}{\partial r} + j_n u_H = B_{2H}; \quad (10)$$

$$t = 0, \quad u_H = u_{0H}, \quad w_H = w_{0H}, \quad \frac{\partial u_H}{\partial t} = \dot{u}_{0H}, \quad \frac{\partial w_H}{\partial t} = \dot{w}_{0H}, \quad (11)$$

где

$$\{F_{1H}, B_{1H}|_{r=1}, B_{1H}|_{r=R}, u_{0H}, \dot{u}_{0H}\} = \int_0^h \{F_1, B_1, B_2, u_0, \dot{u}_0\} \sin(j_n z) dz,$$

$$\{F_{2H}, B_{2H}, w_{0H}, \dot{w}_{0H}\} = \int_0^h \{F_2, B_3, w_0, \dot{w}_0\} \cos(j_n z) dz.$$

Повторяем процедуру приведения неоднородных граничных условий (10) к однородным при использовании следующих разложений:

$$u_H(r, n, t) = H_2(r, n, t) + U_H(r, n, t), \quad (12)$$

$$w_H(r, n, t) = H_3(r, n, t) + W_H(r, n, t).$$

Подстановка формул (12) в выражения (9)–(11) при выполнении условий

$$r = 1, R, \quad \frac{\partial H_2}{\partial r} + a_3 \left(\frac{H_2}{r} - j_n H_3 \right) = B_{1H}, \quad \frac{\partial H_3}{\partial r} + j_n H_2 = B_{2H} \quad (13)$$

позволяет получить новую краевую задачу относительно функций U_H, W_H :

$$\frac{\partial}{\partial r} \nabla U_H - a_1 j_n^2 U_H - a_2 j_n \frac{\partial W_H}{\partial r} - \frac{\partial^2 U_H}{\partial t^2} = F_{1H}^*, \quad (14)$$

$$a_1 \nabla \frac{\partial W_H}{\partial r} - j_n^2 W_H + a_2 j_n \nabla U_H - \frac{\partial^2 W_H}{\partial t^2} = F_{2H}^*;$$

$$r = 1, R, \quad \frac{\partial U_H}{\partial r} + a_3 \left(\frac{U_H}{r} - j_n W_H \right) = 0, \quad \frac{\partial W_H}{\partial r} + j_n U_H = 0; \quad (15)$$

$$t = 0, \quad U_H = U_{0H}, \quad W_H = W_{0H}, \quad \frac{\partial U_H}{\partial t} = \dot{U}_{0H}, \quad \frac{\partial W_H}{\partial t} = \dot{W}_{0H}, \quad (16)$$

где

$$F_{1H}^* = F_{1H} - \frac{\partial}{\partial r} \nabla H_2 + a_1 j_n^2 H_2 + a_2 j_n \frac{\partial H_3}{\partial r} + \frac{\partial^2 H_2}{\partial t^2},$$

$$F_{2H}^* = F_{2H} - a_1 \nabla \frac{\partial H_3}{\partial r} + j_n^2 H_3 - a_2 j_n \nabla H_2 + \frac{\partial^2 H_3}{\partial t^2}, \quad U_{0H} = u_{0H} - H_{2|t=0},$$

$$W_{0H} = w_{0H} - H_{3|t=0}, \quad \dot{U}_{0H} = \dot{u}_{0H} - \frac{\partial H_2}{\partial t}, \quad \dot{W}_{0H} = \dot{w}_{0H} - \frac{\partial H_3}{\partial t}.$$

Краевая задача (14)–(16) решается обобщенным методом конечных интегральных преобразований [15] с неизвестными компонентами вектор-функции ядра преобразований $K_1(\lambda_{in}, r)$, $K_2(\lambda_{in}, r)$:

$$G(\lambda_{in}, n, t) = \int_R^1 [U_H(r, n, t)K_1(\lambda_{in}, r) + W_H(r, n, t)K_2(\lambda_{in}, r)] r dr, \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \{U_H(n, z, t), W_H(n, z, t)\} &= \sum_{i=1}^{\infty} G(\lambda_{in}, n, t) \{K_1(\lambda_{in}, r), K_2(\lambda_{in}, r)\} \|K_{in}\|^{-2}, \\ \|K_{in}\|^2 &= \int_R^1 [K_1^2(\lambda_{in}, r) + K_2^2(\lambda_{in}, r)] r dr. \end{aligned} \quad (18)$$

где λ_{in} — положительные параметры, образующие счетное множество $(i = \overline{1, \infty})$.

Согласно алгоритму метода конечных интегральных преобразований, первое уравнение (14) и начальные условия (16) относительно функции U_H умножаем на $rK_1(\lambda_{in}, r)$, а второе уравнение (14) и оставшиеся начальные условия (16) — на $rK_2(\lambda_{in}, r)$. Затем выполняем интегрирование преобразованных уравнений в пределах $[1, R]$, складывая полученные уравнения и попарно — начальные условия. При использовании условия обращения в нуль внеинтегральных членов и операционного свойства [15] получаем систему задач относительно трансформанты $G(\lambda_{in}, n, t)$:

$$\frac{d^2 G(\lambda_{in}, n, t)}{dt^2} + \lambda_{in}^2 G(\lambda_{in}, n, t) = -F(\lambda_{in}, n, t), \quad (19)$$

$$t = 0, \quad G = G_0, \quad \frac{dG}{dt} = \dot{G}_0. \quad (20)$$

Общее решение уравнения (19) при начальных условиях (20) записывается в виде

$$\begin{aligned} G(\lambda_{in}, n, t) &= G_0 \cos(\lambda_{in} t) + \dot{G}_0 \sin(\lambda_{in} t) / \lambda_{in} - \\ &- \lambda_{in}^{-1} \int_0^t F(\lambda_{in}, n, \tau) \sin \lambda_{in} (t - \tau) d\tau, \end{aligned} \quad (21)$$

$$\text{где } \{F, G_0, \dot{G}_0\} = \int_R^1 \left(\{F_{1H}^*, U_{0H}, \dot{U}_{0H}\} K_1 + \{F_{2H}^*, W_{0H}, \dot{W}_{0H}\} K_2 \right) r dr.$$

Кроме того, с учетом граничных условий (15) получаем однородную задачу относительно компонент ядра преобразования $K_1(\lambda_{in}, r)$, $K_2(\lambda_{in}, r)$:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr} \nabla K_1 + (\lambda_{in}^2 - a_1 j_n^2) K_1 - a_2 j_n \frac{dK_2}{dr} &= 0, \\ a_1 \nabla \frac{dK_2}{dr} + (\lambda_{in}^2 - j_n^2) K_2 + a_2 j_n \nabla K_1 &= 0; \end{aligned} \quad (22)$$

$$r = 1, R, \quad \frac{dK_1}{dr} + a_3 \left(\frac{K_1}{r} - j_n K_2 \right) = 0, \quad \frac{dK_2}{dr} + j_n K_1 = 0, \quad (23)$$

где $\{F, G_0, \dot{G}_0\} = \int_R^1 \left(\{F_{1H}^*, U_{0H}, \dot{U}_{0H}\} K_1 + \{F_{2H}^*, W_{0H}, \dot{W}_{0H}\} K_2 \right) r dr$.

Система (22) приводится к следующему разрешающему уравнению четвертого порядка относительно $K_1(\lambda_{in}, r)$:

$$\begin{aligned} \frac{d^4 K_1}{dr^4} + \frac{2}{r} \frac{d^3 K_1}{dr^3} + \left(m_{1n} - \frac{3}{r^2} \right) \frac{d^2 K_1}{dr^2} + \\ + \left(\frac{m_{1n}}{r} + \frac{3}{r^3} \right) \frac{dK_1}{dr} - \left[m_{2n} + \frac{m_{1n}}{r^2} + \frac{3}{r^4} \right] K_1 = 0, \end{aligned} \quad (24)$$

которое раскладывается на коммутативные дифференциальные сомножители второго порядка

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} + \left(A_{in}^2 - \frac{1}{r^2} \right) \right] \left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} + \left(D_{in}^2 - \frac{1}{r^2} \right) \right] K_1 = 0, \quad (25)$$

где

$$\begin{aligned} A_{in}^2 &= \frac{m_{1in}}{2} + \sqrt{\frac{m_{1in}^2}{4} + m_{2in}}; \quad D_{in}^2 = -\frac{m_{1in}}{2} + \sqrt{\frac{m_{1in}^2}{4} + m_{2in}}; \\ m_{1in} &= \frac{(a_1 + 1)\lambda_{in}^2}{a_1} - 2j_n^2; \quad m_{2in} = \frac{(j_n^2 - \lambda_{in}^2)(\lambda_{in}^2 - a_1 j_n^2)}{a_1}. \end{aligned}$$

Приравнивая к нулю каждый сомножитель уравнения (25) в зависимости от отношения постоянных материала и собственных значений, получаем следующие частные случаи решения:

$$A_{in}^2 < 0, \quad D_{in}^2 < 0:$$

$$K_1(\lambda_{in}, r) = C_{1in} I_1(A_{in} r) + C_{2in} \tilde{K}_1(A_{in} r) + C_{3in} I_1(D_{in} r) + C_{4in} \tilde{K}_1(D_{in} r); \quad (26)$$

$$A_{in}^2 > 0, \quad D_{in}^2 < 0:$$

$$K_1(\lambda_{in}, r) = C_{1in}J_1(A_{in}r) + C_{2in}Y_1(A_{in}r) + C_{3in}I_1(D_{in}r) + C_{4in}\tilde{K}_1(D_{in}r);$$

$$A_{in}^2 > 0, \quad D_{in}^2 > 0:$$

$$K_1(\lambda_{in}, r) = C_{1in}J_1(A_{in}r) + C_{2inI_1}(A_{in}r) + C_{3in}J_1(D_{in}r) + C_{4in}Y_1(D_{in}r),$$

где $J_\nu(\dots), Y_\nu(\dots), I_\nu(\dots), \tilde{K}_\nu(\dots)$ — обыкновенные и модифицированные функции Бесселя первого и второго рода порядка ν [16].

Выражение для $K_2(\lambda_{in}, r)$ определяется на основании зависимости, полученной в результате приведения (22) к (24):

$$K_2(\lambda_{in}, r) = \frac{a_1}{a_2 j_n (j_n^2 - \lambda_{in}^2)} \left[\frac{d^3 K_1(\lambda_{in}, r)}{dr^3} + \frac{2}{r} \frac{d^2 K_1(\lambda_{in}, r)}{dr^2} + \left(m_{3in} - \frac{1}{r^2} \right) \frac{dK_1(\lambda_{in}, r)}{dr} + \left(\frac{m_{3in}}{r} + \frac{1}{r^3} \right) K_1(\lambda_{in}, r) \right], \quad (27)$$

где $m_{3in} = (\lambda_{in}^2 - a_1 j_n^2) + a_1^{-1} a_2^2 j_n^2$.

Подстановка $K_1(\lambda_{in}, r), K_2(\lambda_{in}, r)$ в граничные условия (23) позволяет получить систему дифференциальных уравнений относительно $C_{1in} \dots C_{4in}$. Принимая без ограничения общности $C_{1in} = 1$, из первых трех уравнений выражаются постоянные $C_{2in}, C_{3in}, C_{4in}$. В результате оставшееся (четвертое) равенство представляет собой трансцендентное уравнение для определения собственных значений λ_{in} :

$$\frac{dK_2(\lambda_{in}, R)}{dr} + j_n K_1(\lambda_{in}, R) = 0,$$

которые находят численным методом.

Окончательные выражения для компонент вектора перемещений с учетом формул обращения (8), (18) и разложений (6), (12) имеют вид

$$U(r, z, t) = \frac{2}{h} \sum_{n=1}^{\infty} \left[H_2(r, n, t) + \sum_{n=1}^{\infty} G(\lambda_{in}, n, t) K_1(\lambda_{in}, r) \|K_{in}\|^{-2} \right] \sin(j_n z), \quad (28)$$

$$W(r, z, t) = W_1(t) + H_1(r, z, t) + \sum_{n=0}^{\infty} \Omega_n \left[H_3(r, n, t) + \sum_{i=1}^{\infty} G(\lambda_{in}, n, t) K_2(\lambda_{in}, r) \|K_{in}\|^{-2} \right] \cos(j_n z).$$

Выражения для $H_2(r, n, t)$, $H_3(r, n, t)$ определяются из условия упрощения правых частей дифференциальных уравнений (14) F_{1H}^*, F_{2H}^* :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} \nabla H_2 - a_1 j_n^2 H_2 - a_2 j_n \frac{\partial H_3}{\partial r} &= F_{1H}, \\ a_1 \nabla \frac{\partial H_3}{\partial r} - j_n^2 H_3 + a_2 j_n \nabla H_2 &= F_{3H}, \end{aligned} \quad (29)$$

где $F_{3H} = -\int_0^h \left(a_1 \nabla \frac{\partial H_1}{\partial r} + \frac{\partial^2 H_1}{\partial z^2} \right) \cos(j_n z) dz$.

Система (29) приводится к следующему разрешающему неоднородному уравнению:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - j_n^2 \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - j_n^2 \right) H_2 = F_H. \quad (30)$$

Здесь $F_H = a_1^{-1} \left(\nabla \frac{\partial F_{3H}}{\partial r} - F_{3H} - a_2 j_n \nabla F_{1H} \right)$.

Общий интеграл уравнения (30) имеет вид

$$H_2(r, n, t) = \bar{H}_2(r, n, t) + H_{2N}(r, n, t), \quad (31)$$

где $\bar{H}_2(r, n, t)$, $H_{2N}(r, n, t)$ — общее решение однородного уравнения (30) (без правой части) и частное решение неоднородного уравнения (30).

Левая часть однородного уравнения (30) состоит из двух некоммутативных дифференциальных сомножителей второго порядка. В результате приравнивания к нулю первого сомножителя:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - j_n^2 \right) \bar{H}_2 = 0$$

получаем модифицированное уравнение Бесселя (здесь время t является параметром), решение которого имеет вид

$$\bar{H}_2(r, n, t) = D_1(t) I_0(j_n r) + D_2(t) \tilde{K}_0(j_n r). \quad (32)$$

Для определения оставшихся частных решений для функции $\bar{H}_2(r, n, t)$, принимая во внимание выражение (32), формируем следующее неоднородное уравнение Бесселя:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - j_n^2 \right) \bar{H}_2 = D_1(t) I_0(j_n r) + D_2(t) \tilde{K}_0(j_n r). \quad (33)$$

Решение неоднородных уравнений (33) и (30) относительно $H_{2N}(r, n, t)$ осуществляется методом вариации произвольных постоянных. Окончательные выражения для $\bar{H}_2(r, n, t)$ и $H_{2N}(r, n, t)$ имеют вид

$$\begin{aligned} \bar{H}_2(r, n, t) &= D_1(t)I_0(j_n r) + D_2(t)\tilde{K}_0(j_n r) + \\ &+ D_3(t)[V_1(r)I_0(j_n r) + V_2(r)\tilde{K}_0(j_n r)] + \\ &+ D_4(t)[V_3(r)I_0(j_n r) - V_1(r)\tilde{K}_0(j_n r)], \\ H_{2N} &= V_6(r)I_0(j_n r) + V_7(r)\tilde{K}_0(j_n r), \quad V_1(r) = \int rI_0(j_n r)\tilde{K}_0(j_n r)dr, \\ V_2(r) &= -\int rI_0(j_n r)^2 dr, \quad V_3(r) = \int r\tilde{K}_0(j_n r)^2 dr, \\ V_4(r) &= \int rF_H\tilde{K}_0(j_n r)dr, \quad V_5(r) = -\int rF_H I_0(j_n r)dr, \\ V_6(r) &= \int r[V_4(r)I_0(j_n r) + V_5(r)\tilde{K}_0(j_n r)]\tilde{K}_0(j_n r)dr, \\ V_7(r) &= -\int r[V_4(r)I_0(j_n r) + V_5(r)\tilde{K}_0(j_n r)]I_0(j_n r)dr. \end{aligned}$$

Используя зависимость, полученную в процессе приведения уравнений (29) к уравнению (30), получаем выражение для $H_1(r, n, t)$:

$$H_1(r, n, t) = \bar{H}_1(r, n, t) + H_{1N}(r, n, t), \quad (34)$$

где

$$\begin{aligned} \bar{H}_1 &= (a_1 a_2 j_n^3)^{-1} \left[-a_1 \frac{d}{dr} \nabla \frac{d\bar{H}_2}{dr} + (j_n^2 - a_2^2 j_n^2) \frac{d\bar{H}_2}{dr} \right], \\ H_{1N} &= (a_1 a_2 j_n^3)^{-1} \left[-a_1 \frac{d}{dr} \nabla \frac{dH_{2N}}{dr} + (j_n^2 - a_2^2 j_n^2) \frac{dH_{2N}}{dr} + \frac{dF_{3H}}{dr} - a_2 j_n F_{1H} \right]. \end{aligned}$$

Подстановка выражений (31) и (34) в граничные условия (13) позволяет определить $D_1(t) \dots D_4(t)$.

Следует отметить, что при вычислении $V_1(r) \dots V_7(r)$ модифицированные функции Бесселя аппроксимировались многочленами [18].

Определение функций $W_1(t)$ и $q_3(r, t)$, с помощью которых удастся удовлетворить условию (2) отсутствия вертикальных перемещений в жестком закреплении, выполняется следующим образом:

1) принимая во внимание линейность расчетных соотношений (1)–(4), а также теорему о суперпозиции решений, на первом этапе

рассматривают действие только внешней нагрузки $q_1^*(r_*, t_*)$ или $q_2^*(z_*, t_*)$. В этом случае применение функции $W_1(t)$ позволяет выполнить условие закрепления одной точки упругой системы при $z = 0$:

$$W_1(t) = -H_1(1, 0, t) - \sum_{n=0}^{\infty} \Omega_n \left[H_3(1, n, t) + \sum_{i=1}^{\infty} G(\lambda_{in}, n, t) K_2(\lambda_{in}, 1) \|K_{in}\|^{-2} \right];$$

2) нормальные напряжения $q_3(r, t)$, возникающие в жестком закреплении в результате действия нагрузки, аппроксимируются в виде зависимости

$$q_3(r, t) = W_1(t) \sum_{p=1}^N E_p r^{p-1}.$$

Постоянные E_p определяются при исследовании задачи совместного действия внешней нагрузки $q_1^*(r_*, t_*)$ ($q_2^*(z_*, t_*)$) и $q_3(r, t)$ из условия уравновешенности цилиндра в вертикальной плоскости

$$\int_R^1 q_1(r, t) r dr = \int_R^1 q_3(r, t) r dr,$$

и равенства вертикальных перемещений $W(r, 0, t)$ в $(N-1)$ точках в момент достижения нестационарной нагрузки $q_1^*(r_*, t_*)$ ($q_2^*(z_*, t_*)$) амплитудных значений;

3) на последнем этапе повторно определяется функция $W_1(t)$ в случае действия внешней нагрузки и нормальных напряжений в жестком закреплении из условия равенства нулю вертикальных перемещений в заземлении в одной точке, что автоматически приводит к выполнению условия отсутствия перемещений при $z = 0$ в $(N-1)$ точках.

Данный подход по определению функции $q_3(r, t)$ справедлив при действии гармонической и ударной нагрузки, а также стационарного воздействия ($W_1(t) = \text{const}$). В случае сложного нестационарного внешнего воздействия всегда можно определить постоянные E_p в разные моменты времени и в результате аппроксимации полученных результатов представить их в виде функций $E_p(t)$.

Численные результаты расчета. В качестве примера рассмотрим колонну ($h^* = 1,5$ м, $b = 0,1$ м, $a = 0,05$ м), выполненную из бетона, который имеет следующие механические характеристики: $E = 2,7 \cdot 10^{10}$ Па, $\nu = 0,2$, $\rho = 2400$ кг/м³.

На торцевой поверхности конструкции ($z_* = h^*$) действует равномерно распределенная гармоническая нагрузка $q_1(r, t)$ ($q_2(z, t) = 0$), которая в безразмерной форме определяется следующим образом:

$$q_1(r, t) = q_0(r) \sin(\theta t),$$

где $q_0(r)$, θ — амплитудное значение и частота вынужденных колебаний в безразмерной форме.

Графики изменения перемещений $U(r, z, t)$, $W(1, z, t)$ и компоненты тензора напряжений $\sigma_{zz}(r, z, t)$ по аксиальной координате в случае действия постоянной нагрузки $q_1(r, t) = q_0(r) = q_0$ показаны на рис. 2 и 3.

На рис. 2 цифрами 1 и 2 обозначены изменения радиальных перемещений при $r = 1, R$, а цифрой 3 — аксиальных перемещений при $r = 1$. На рис. 3 представлены изменения нормальных напряжений σ_{zz} в безразмерной форме $\left(\sigma_{zz}(r, z, t) = \frac{\sigma_{zz}^*(r, z, t)}{a_4^2 \rho} = \left[a_3 \left(\frac{\partial U}{\partial r} + \frac{U}{r} \right) + \frac{\partial W}{\partial z} \right] \right)$, полученные с помощью разработанного алгоритма (1) и численного расчета (2) методом конечных элементов при использовании программного комплекса ANSYS.

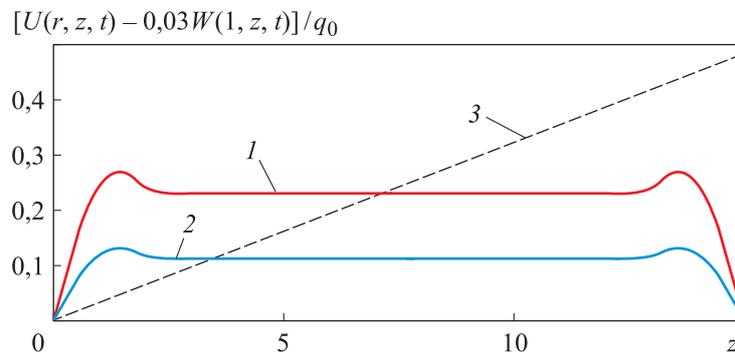


Рис. 2. Изменение перемещений по аксиальной координате:
1 — $U(1, z, t)$; 2 — $U(R, z, t)$; 3 — $W(1, z, t)$

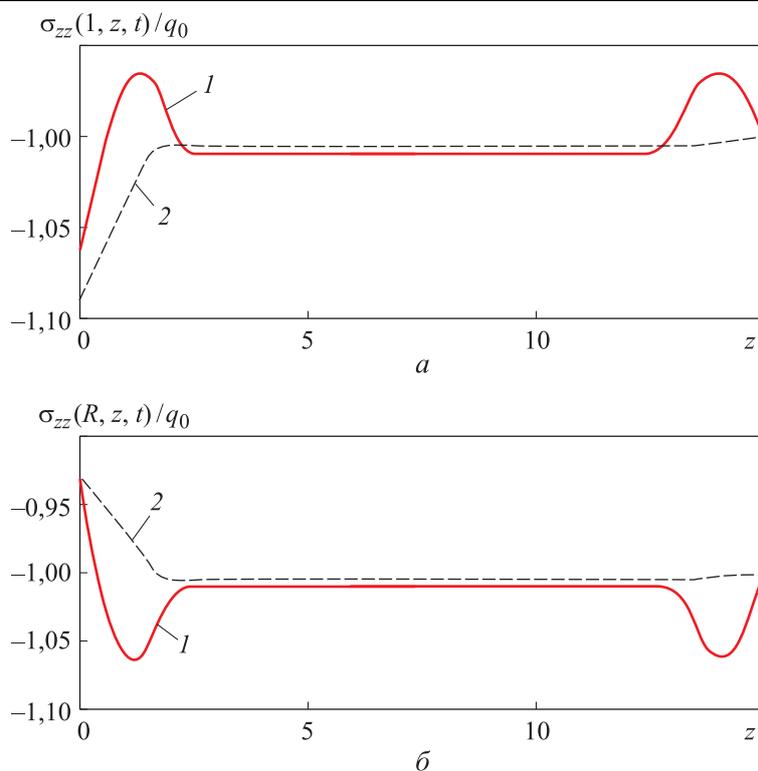


Рис. 3. Изменение нормальных напряжений σ_{zz} по аксиальной координате:
 1 — аналитический расчет; 2 — численный расчет

Численный расчет в программном комплексе ANSYS проводился в модулях Static Structural (для статической задачи) и Transient Structural (для динамической задачи). Для геометрической модели цилиндра сетка конечных элементов была создана с размером 0,02 м, что обеспечило сходимость результатов численного решения.

Результаты расчета показали, что:

- при рассматриваемом внешнем воздействии вертикальные перемещения существенно выше радиальных. При этом $W(1, z, t)$ по высоте цилиндра изменяется по линейной зависимости и практически не изменяется по радиальной переменной, что объясняется небольшими значениями касательных напряжений σ_{rz} ;
- в процессе деформирования в основной части цилиндра толщина его стенки увеличивается практически на одну и ту же величину;
- скачок перемещений $U(r, z, t)$ и напряжений $\sigma_{zz}(r, z, t)$ в численных значениях вблизи торцевых поверхностей определяется их закреплением в радиальной плоскости при $z = 0, h$;
- при статическом нагружении разница в нормальных напряжениях, полученных аналитическим и численным расчетами, достигает 4 %.

На рис. 4 и 5 приведены графики перемещений $W(1, h, t)$ и $U(1, h/2, t)$ по времени и амплитудные значения напряжений $\sigma_{zz}(r, z, t)$ по высоте цилиндра при высокочастотном внешнем воздействии ($q_0(r) = q_0$, $\theta = \lambda_{11}/2$, где λ_{11} — первая частота собственных осесимметричных колебаний).

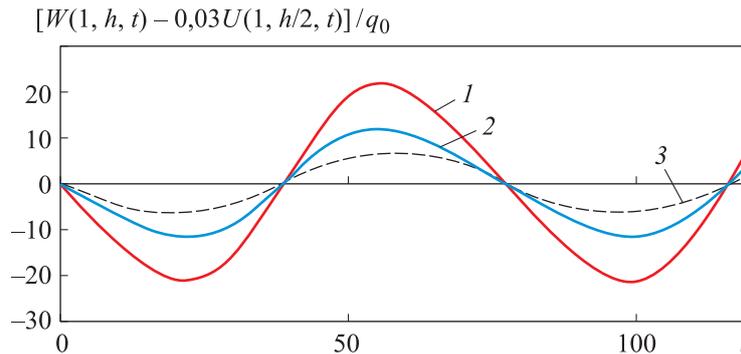


Рис. 4. Изменение перемещений по времени:
 1 — $W(1, h, t)$; 2 — $U(1, h/2, t)$; 3 — $q_1(r, t) = q_0 \sin(\theta t)$

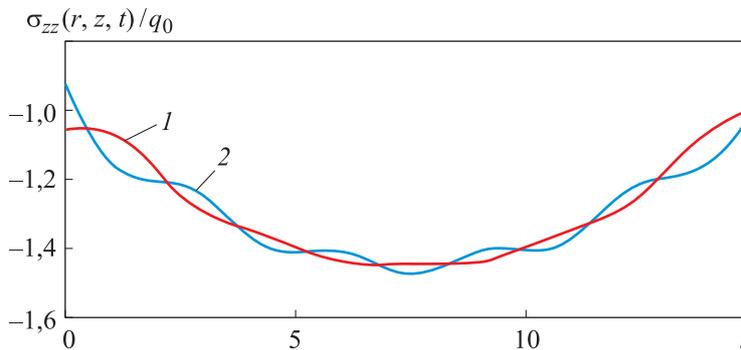


Рис. 5. Изменение напряжений $\sigma_{zz}(r, z, t)$ по аксиальной переменной:
 1 — $\sigma_{zz}(1, z, t)$; 2 — $\sigma_{zz}(R, z, t)$

Здесь можно отметить следующее:

- амплитудные значения перемещений и внешнего воздействия смещены по времени относительно внешней нагрузки вследствие учета инерционных характеристик упругой системы. Кроме того, максимальные значения вертикальных перемещений $W(1, h, t)$ при высокочастотном воздействии существенно выше соответствующих значений, полученных при действии статической нагрузки;

- изменения напряжений по аксиальной координате при высокочастотном (см. рис. 5) и статическом (см. рис. 3) воздействии существенно различаются по характеру. При этом «пульсирующий» ха-

рактен диаграмм « $\sigma_{zz}(r, z, t) — z$ » (см. рис. 5) объясняется наложением волн деформирования и учетом собственных колебаний упругой системы;

– различие в результатах, полученных аналитическим и численным методами, в случае действия динамической нагрузки становится существенной и достигает 30 %. Данное расхождение объясняется сложным характером деформирования конструкции во времени при высокочастотном гармоническом воздействии, которое в полной мере не удастся описать с помощью используемых модулей численного расчета.

Заметим, что при действии внешней нагрузки в виде гладкой функции по радиальной и аксиальной координатам ряды, входящие в разложения (28), сходятся достаточно быстро, как правило, при $n = 1, \dots, 10$, $i = 1, \dots, 6$ (вычисление ряда заканчивается, когда численное значение последнего члена ряда составляет меньше 1 % от суммы предыдущих членов). В случае вычисления механических напряжений сходимость рядов ухудшается и количество удерживаемых членов ряда (в среднем) увеличивается в 2 раза.

Заключение. Разработанный алгоритм, позволяющий построить замкнутое решение для толстостенного консольно закрепленного упругого цилиндра в случае действия нагрузки в виде нормальных напряжений, можно использовать также при расчете рассматриваемой конструкции в случае учета произвольных осесимметричных граничных условиях на ее цилиндрических поверхностях. В частности, в случае действия касательных напряжений, закрепления в аксиальной и радиальной плоскостях. Кроме того, разработанный алгоритм можно использовать при решении несвязанной задачи термоупругости при известном температурном поле, а также в качестве тестовых результатов при разработке численных методик расчета.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Головин О.А., Прокопов В.К. О стационарных неосесимметричных колебаниях упругого цилиндра конечной длины. *Прикладная механика*, 1974, № 7, с. 28–35.
- [2] Гринченко В.Т. *Равновесие и установившиеся колебания упругих тел конечных размеров*. Киев, Наукова думка, 1978, 264 с.
- [3] Шульга Н.А. Собственные частоты осесимметричных колебаний полого цилиндра из композитного материала. *Механика композитных материалов*, 1980, № 3, с. 485–488.
- [4] Чернышев К.В., Шегай В.Е. Собственные колебания твердых цилиндров конечной длины. *Акустический журнал*, 1977, № 4 (23), с. 627–631.
- [5] Atashipour S.R., Mohammadi Z., Folkow P.D. A direct approach for three-dimensional elasto-static and elasto-dynamic solutions in curvilinear cylindrical coordinates with application to classical cylinder problems. *European Journal of Mechanics-A/Solids*, 2022, vol. 95, art. no. 104646.

- [6] Брусиловская Г.А., Ершов Л.В. К расчету полого упругого толстостенного цилиндра при действии динамической нагрузки общего вида. *Прикладная механика*, 1975, № 2, с. 19–23.
- [7] Фридман Л.И. Динамическая задача теории упругости для цилиндра конечных размеров. *Прикладная механика*, 1981, № 3 (27), с. 37–43.
- [8] Фридман Л.И. Два класса колебаний короткого кругового цилиндра. *Прикладная механика и техническая физика*, 2012, № 5, с. 147–154.
- [9] Сеницкий Ю.Э. К решению осесимметричной задачи динамики для анизотропного короткого тонкостенного цилиндра. *Прикладная механика*, 1981, № 8 (27), с. 127–135.
- [10] Лычев С.А., Дигилов А.В., Пивоваров Н.А. Изгиб кругового диска: от цилиндра к ультратонкой мембране. *Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия*, 2023, № 4, с. 77–105.
- [11] Шляхин Д.А., Даулетмуратова (Кусаева) Ж.М. Нестационарная осесимметричная задача термоупругости для жестко закрепленной круглой пластины. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2018, № 5 (77), с. 1–18.
- [12] Лычев С.А., Фекри М. Остаточные напряжения в термоупругом цилиндре, возникающие в результате послышной наплавки. *Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия*, 2020, № 3, с. 63–90.
- [13] Popov G.Ya., Protserov Yu.S. Axisymmetric Problem for an Elastic Cylinder of Finite Length with Fixed Lateral Surface with Regard for its Weight. *Journal of Mathematical Sciences*, 2016, vol. 212, pp. 67–82. DOI: 10.1007/s10958-015-2649-1
- [14] Chekurin V.F., Postolaki L.I. Application of the Variational Method of Homogeneous Solutions in the Axisymmetric Problem of the Theory of Elasticity for a Finite Cylinder with Regard for Its Own Weight. *Journal of Mathematical Sciences*, 2023, vol. 277 (1), pp. 153–172. DOI: 10.1007/s10958-023-06823-1
- [15] Сеницкий Ю.Э. Метод конечных интегральных преобразований — обобщение классической процедуры разложения по собственным вектор-функциям. *Известия Саратовского университета. Новая серия. Математика, механика, информатика*, 2011, № 3, с. 61–89.
- [16] Снеддон И.Н., Берри Д.С. *Классическая теория упругости*. Москва, Физматгиз, 1961, 220 с.
- [17] Снеддон И.Н. *Преобразования Фурье*. Москва, Изд-во иностр. лит-ры, 1955, 668 с.
- [18] Абрамовиц М., Стиган И. *Справочник по специальным функциям*. Москва, Наука, Физматлит, 1979, 831 с.

Статья поступила в редакцию 08.11.2024

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Шляхин Д.А., Раков Д.В. Динамическая осесимметричная задача теории упругости для полого консольно закрепленного цилиндра. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2025, вып. 3. EDN TWTOQN

Шляхин Дмитрий Аверкиевич — д-р техн. наук, профессор, заведующий кафедрой «Строительная механика, инженерная геология, основания и фундаменты» Самарского государственного технического университета. Область научных интересов: механика деформируемого твердого тела. e-mail: d-612-mit2009@yandex.ru

Раков Даниил Васильевич — аспирант, ассистент кафедры «Строительная механика, инженерная геология, основания и фундаменты» Самарского государственного технического университета. Область научных интересов: механика деформируемого твердого тела. e-mail: rakovdaniil@gmail.com

Dynamic Axisymmetric Problem of Elasticity for a Hollow Cantilevered Console-fixed Cylinder

© D.A. Shlyakhin, D.V. Rakov

¹Samara State Technical University, Samara, 443001, Russia

A new closed-form solution of the axisymmetric problem for the thick-walled hollow isotropic cylinder in the case of action on its edge and external cylindrical surface of unsteady axisymmetric load normal to the loading surfaces. The bottom face of the cylinder is rigidly fixed (no displacements in radial and axial directions), and the upper face is diaphragmatically fixed in the radial plane. The closed-form solution is constructed by use of the one-component integral Fourier transform on the axial variable and generalised integral transform along the radial coordinate. In order to realise this approach, the procedure of converting the boundary conditions at the ends of the cylinder to mixed computational relations. The constructed calculation algorithm makes it possible to determine the stress-strain state of the cylinder, as well as to analyse the influence of the type of loads and their relations on the displacement and stress fields.

Keywords: unsteady axisymmetric problem of elasticity, round thick-walled cylinder, finite integral transformations.

REFERENCES

- [1] Golovin O.A., Prokopov V.K. On stationary non-axisymmetric oscillations of an elastic cylinder of finite length [On stationary axisymmetric vibrations of an elastic cylinder of finite length]. *Prikladnaya mekhanika*, 1974, no. 7, pp. 28–35.
- [2] Grinchenko V.T. *Ravnovesie i ustanovivshiesya kolebaniya uprugih tel konechnyh razmerov* [Equilibrium and steady-state oscillations of elastic bodies of finite dimensions]. Kiev (Naukova dumka), 1978, 264 p.
- [3] Shul'ga N.A. Sobstvennye chastoty osesimmetrichnyh kolebanij pologo cilindra iz kompozitnogo materiala [Self-frequencies of axisymmetric vibrations of a hollow cylinder made of composite material]. *Mekhanika kompozitnyh materialov*, 1980, no. 3, pp. 485–488.
- [4] Chernyshev K.V., Shegaj V.E. Sobstvennye kolebaniya tverdyh cilindrov konechnoj dliny [Self-vibrations of solid cylinders of finite length]. *Akusticheskij zhurnal*, 1977, no. 4(23), pp. 627–631.
- [5] Atashipour S.R., Mohammadi Z., Folkow P.D. A direct approach for three-dimensional elasto-static and elasto-dynamic solutions in curvilinear cylindrical coordinates with application to classical cylinder problems. *European Journal of Mechanics-A / Solids* 95, 2022, vol. 95.
- [6] Brusilovskaya G.A., Ershov L.V. K raschetu pologo uprugogo tolstostennogo cilindra pri dejstvii dinamicheskoy nagruzki obshchego vida [Calculation of hollow elastic thick-walled cylinder under dynamic load of general type]. *Prikladnaya mekhanika*, 1975, no. 2, pp. 19–23.
- [7] Fridman L.I. Dinamicheskaya zadacha teorii uprugosti dlya cilindra konechnyh razmerov [Dynamic problem of the theory of elasticity for a finite-size cylinder]. *Prikladnaya mekhanika*, 1981, no. 3(27), pp. 37–43.
- [8] Fridman L.I. Dva klassa kolebanij korotkogo krugovogo cilindra [Two classes of vibrations of a short circular cylinder]. *Prikladnaya mekhanika i tekhnicheskaya fizika*, 2012, no. 5, pp. 147–154.

- [9] Senickij YU.E. K resheniyu osesimmetrichnoj zadachi dinamiki dlya anizotropnogo korotkogo tonkostennogo cilindra [On the solution of axisymmetric problem of dynamics for anisotropic short thin-walled cylinder]. *Prikladnaya mekhanika*, 1981, no. 8(27), pp. 127–135.
- [10] Lychev S.A., Digilov A.V., Pivovarov N.A. Izgib krugovogo diska: ot cilindra k ul'tratonkoj membrane [Circular disc bending: from cylinder to ultrathin membrane]. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaya seriya*, 2023, no. 4, pp. 77–105.
- [11] Shlyahin D.A., Dauletmuratova (Kusaeva) Zh.M. Nestacionarnaya osesimmetrichnaya zadacha termouprugosti dlya zhestko zakreplenoj krugloj plastiny [Nonstationary axisymmetric thermoelastic problem for a rigidly fixed circular plate.]. *Inzhenernyj zhurnal: nauka i innovacii. MGTU im. N.E. Baumana*, 2018, no. 5 (77), pp. 1–18.
- [12] Lychev S.A., Fekri M. Ostatochnye napryazheniya v termouprugom cilindre, voznikayushchie v rezul'tate poslojnoj naplavki [Residual stresses in a thermoelastic cylinder resulting from layer-by-layer surfacing]. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaya seriya*, 2020, no. 3, pp. 63–90.
- [13] Popov, G. Ya., Protserov, Yu. S. Axisymmetric Problem for an Elastic Cylinder of Finite Length with Fixed Lateral Surface with Regard for its Weight. *Journal of Mathematical Sciences*, 2016, vol. 212, pp. 67-82. doi:10.1007/s10958-015-2649-1
- [14] Chekurin, V. F., Postolaki, L. I. Application of the Variational Method of Homogeneous Solutions in the Axisymmetric Problem of the Theory of Elasticity for a Finite Cylinder with Regard for Its Own Weight. *Journal of Mathematical Sciences*, 2023, vol. 277 (1), pp. 153-172. doi:10.1007/s10958-023-06823-1
- [15] Senickij Yu. E. Metod konechnyh integral'nyh preobrazovanij – obobshchenie klassicheskoy procedury razlozheniya po sobstvennym vektor-funkcijam [The method of finite integral transformations is a generalisation of the classical procedure of decomposition by eigenvector-functions]. *Izv. Saratovskogo un-ta. Novaya seriya. Matem., mekhan., informatika*, 2011, no. 3, pp. 61–89.
- [16] Sneddon I.N., Berri D.S. *Klassicheskaya teoriya uprugosti* [Classical theory of elasticity]. M.: GI Fiz.-mat. lit., 1961, 220 p.
- [17] Sneddon I. N. *Preobrazovaniya Fur'e* [Fourier transforms]. M.: Izd-vo inostr. lit., 1955, 668 p.
- [18] Abramovic M., Stigan I. *Spravochnik po special'nyh funkcijam* [Handbook on special functions]. M. Nauka. Gl. red. fiz.-mat. lit, 1979, 831 p.

Shlyakhin D.A. — Dr. Sc. (Eng.), Professor, Head of the Department of Construction Mechanics, Engineering Geology, Bases and Foundations, Samara State Technical University. Scientific interests: solid mechanics. e-mail: d-612-mit2009@yandex.ru

Rakov D.V. — Postgraduate student, assistant of Department of Construction Mechanics, Engineering Geology, Bases and Foundations, Samara State Technical University. Scientific interests: solid mechanics. e-mail: rakovdaniil@gmail.com