

Устойчивость и колебания перевернутого маятника при полигармоническом возбуждении с некротными частотами гармоник

© О.Н. Тушев, Е.К. Кондратьев

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Российская Федерация

В решаемой задаче внешним воздействием на маятник является вертикальная высокочастотная полигармоническая вибрация точки подвеса. При этом частоты составляющих гармоник некротны, что принципиально отличает задачу колебания маятника от классической постановки задачи в форме уравнения Хилла. В общем случае такое воздействие является нестационарным и аperiodическим. Решение задачи вертикального полигармонического воздействия на устойчивость перевернутого маятника осуществляется с помощью известного метода Н.Н. Боголюбова в два приближения с небольшим изменением. Движения маятника раскладываются на две составляющие — «медленную», с частотой порядка собственной, и «быструю», с частотами внешнего воздействия. Аperiodичность процесса исключает возможность применения эффективного приема осреднения решения на периоде быстрых колебаний, поэтому вместо него используется повторная операция сегрегации движения. В результате решения получено уравнение для такого же медленного движения маятника, как и в случае периодического внешнего воздействия. Определены области устойчивости маятника при быстрых вибрациях. Показано, что при этом одновременно может произойти потеря устойчивости в окрестности устойчивого вертикального положения маятника вследствие параметрического резонанса или даже нескольких резонансов (по крайней мере теоретически) на комбинационных частотах внешнего воздействия. Полученные результаты проиллюстрированы примером, содержащим их оценку с помощью численного моделирования.

Ключевые слова: маятник, полигармоника, медленное и быстрое движения, устойчивость, параметрический резонанс

Введение. Динамические эффекты, свойственные механическим системам под действием аддитивных и мультипликативных возмущений, известны давно. Первые результаты получены на основании исследования динамики физического маятника с изменяемыми параметрами, или для такого случая, когда точка его закрепления совершает вертикальные колебания. Маятник представляет собой простую систему с одной степенью свободы, что, как правило, дает возможность получать аналитическое решение. Динамическое поведение параметрически возбужденного маятника во многом аналогично поведению и других более сложных систем, например многостепенного маятника. При этом динамику системы описывают уравнениями Е. Матье или Д. Хилла. В зависимости от свойств внешнего возбуждения сложились два варианта рассмотрения данной задачи [1].

1. Потеря устойчивости и динамическое поведение системы при воздействии в области низких частот. При этом возникают параметрические и аддитивные резонансы. Известным результатом является, например, диаграмма Айнса — Стретта, где обозначены границы областей неустойчивости для маятника при вертикальном воздействии, имеющем форму синуса [2]. Такая задача в несколько иных, более общих постановках приведена в [3–6]. В работах [7, 8] изложена динамика линейной системы при двух периодических воздействиях, при которых возникают параметрические резонансы на частоте, равной разнице частот внешних воздействий.

2. Принципиально другой результат проявляется тогда, когда частоты внешних воздействий существенно превышают собственную частоту системы. При этом положение маятника, расположенного вертикально (в перевернутом положении, что соответствует максимальной потенциальной энергии), становится устойчивым. Первые результаты решения данной задачи были получены академиком П.Л. Капицей [9]. Основополагающие результаты, касающиеся проблемы повышения устойчивости механических систем посредством вибраций, были опубликованы В.Н. Челомеем [10, 11]. Для их получения был использован метод, разработанный Н.Н. Боголюбовым и развитый Ю.Л. Митропольским [12, 13]. Эти результаты были обобщены и применены для маятника со многими степенями свободы [14, 15]; эксперимент с маятником с тремя степенями свободы и теория его движения рассмотрены в [16].

Значительный интерес представляет задача, ставшая по сути обобщением задачи о вертикальной вибрации маятника, а именно о «косой» вибрации, при которой угол направления вибрации отличен от 0 и $\pi/2$. При этом возникает стационарное перемещение («уход») маятника, что обнаруживается в появлении паразитных перемещений стрелок приборов и вращении гаек в незатянутых резьбовых соединениях [12, 17].

Очень важной особенностью результатов, полученных практически во всех опубликованных работах, например в [18–20], было то, что они справедливы при условии периодичности внешних воздействий и в частности, синусоидальных. Если снять это ограничение, то количество вариантов динамического поведения параметрически возбуждаемых систем существенно возрастает и границы между двумя подходами стираются [21].

Цель настоящей работы — анализ влияния высокочастотных воздействий с некратными частотами на линейную механическую систему, а также определение возникающих в результате этого эффектов.

Решение задачи. Рассмотрим физический маятник (рис. 1), точка подвеса которого совершает вертикальные полигармонические колебания:

$$z(t) = \sum_{i=1}^m \delta_i \cos p_i t, \quad (1)$$

где δ_i — амплитуды; p_i — некрatные частоты; i — номер воздействия; m — количество воздействий; t — время.

Следует заметить, что в принятой постановке фазовые сдвиги, которые формально можно ввести в соотношение (1), фактически какой-либо роли не играют.

Уравнение движения одностепенного маятника в относительной системе координат имеет вид

$$\ddot{\varphi} + 2n\dot{\varphi} + \omega^2 \left(-1 + \sum_{i=1}^m \alpha_i \cos p_i t \right) \sin \varphi = 0, \quad (2)$$

где n — декремент затухания; ω — собственная частота, $\omega^2 = \frac{Mgl}{J}$

(J — момент инерции); $\alpha_i = \delta_i p_i^2 / g$.

Уравнение (2) отличается от классического уравнения Хилла только некрatностью частот, наличием диссипативного члена и нулевой точкой. Используем допущения и схему решения рассматриваемой задачи, предложенные в ранее указанных работах, но с некоторым отличием, связанным со спецификой ее постановки. Считаем, что $\delta_i \ll l$, $p_i \gg \omega \forall i$. Допустим, что движение маятника складывается из медленного φ_0 с частотами порядка ω и быстрого $\Delta\varphi_i$ с частотами p_i :

$$\varphi = \varphi_0 + \sum_{i=1}^m \Delta\varphi_i. \quad (3)$$

Подставим решение (3) в уравнение (2):

$$\begin{aligned} & \ddot{\varphi}_0 + \sum_{i=1}^m \Delta\ddot{\varphi}_i + 2n\dot{\varphi}_0 + 2n\sum_{i=1}^m \Delta\dot{\varphi}_i + \\ & + \omega^2 \left(-1 + \sum_{i=1}^m \alpha_i \cos p_i t \right) \sin \left(\varphi_0 + \sum_{i=1}^m \Delta\varphi_i \right) = 0. \end{aligned} \quad (4)$$

В первом приближении считаем, что

$$\sin \sum_{i=1}^m \Delta\varphi_i = 0,$$

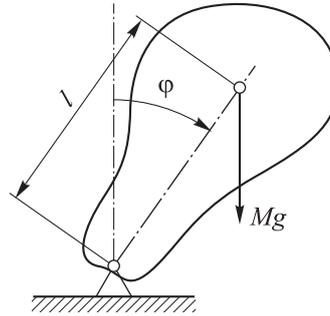


Рис. 1. Физический маятник: M — масса; g — ускорение свободного падения; l — расстояние от точки подвеса до центра тяжести; φ — угол отклонения от вертикали

и тогда получаем

$$\ddot{\varphi}_0 + 2n\dot{\varphi}_0 - \omega^2 \sin \varphi_0 + \sum_{i=1}^m \left(\Delta \ddot{\varphi}_i + 2n\Delta \dot{\varphi}_i + \omega^2 \alpha_i \cos p_i t \sin \varphi_0 \right) = 0. \quad (5)$$

Потребуем, чтобы равенство (5) выполнялось отдельно для каждой группы членов, имеющих одинаковые частоты:

для медленного движения

$$\ddot{\varphi}_0 + 2n\dot{\varphi}_0 - \omega^2 \sin \varphi_0 = 0;$$

для каждого элемента суммы быстрых движений

$$\Delta \ddot{\varphi}_i + 2n\Delta \dot{\varphi}_i = -\omega^2 \alpha_i \cos p_i t \sin \varphi_0. \quad (6)$$

При нахождении решения уравнения (6) полагаем, что φ_0 изменяется незначительно, т. е. $\sin \varphi_0 \approx \text{const}$. Тогда

$$\Delta \varphi_i = \frac{\omega^2 \alpha_i}{p_i \sqrt{p_i^2 + 4n^2}} \sin \varphi_0 \cos(p_i t + \varepsilon_i), \quad (7)$$

где ε_i — сдвиг фаз, которым также можно пренебречь, $\varepsilon_i = -2n/p_i$.

Во втором приближении считаем, что

$$\sin \sum_{i=1}^m \Delta \varphi_i = \sum_{i=1}^m \Delta \varphi_i.$$

Следовательно,

$$\sin \left(\varphi_0 + \sum_{i=1}^m \Delta \varphi_i \right) = \sin \varphi_0 + \cos \varphi_0 \sum_{i=1}^m \Delta \varphi_i. \quad (8)$$

Последовательно подставим сначала соотношение (8) в уравнение (4), а затем — $\Delta \varphi_i$, $\Delta \dot{\varphi}_i$, $\Delta \ddot{\varphi}_i$. Тогда после громоздких, но простых преобразований получим уравнение

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi}_0 + 2n\dot{\varphi}_0 - \omega^2 \sin \varphi_0 + \frac{\omega^4}{4} \sum_{i=1}^m \frac{\alpha_i^2}{p_i r_i} \sin 2\varphi_0 + 2n\omega^2 \sum_{i=1}^m \frac{\alpha_i}{r_i} \sin \varphi_0 \sin p_i t + \\ + \frac{\omega^4}{4} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^m \frac{\alpha_i \alpha_j}{p_j r_j} \sin 2\varphi_0 \left[\cos(p_i - p_j)t + \cos(p_i + p_j)t \right] = 0, \end{aligned} \quad (9)$$

где $r_i = \sqrt{p_i^2 + 4n^2}$.

При условии, что внешнее воздействие представляет собой полигармонику в форме ряда Фурье, члены уравнения (9), содержащие множители $\cos(p_i - p_j)t$, также являются высокочастотными. Для некратных частот это в общем случае несправедливо. Так же, как в первом приближении, оставим в уравнении (9) только члены с низкой частотой, и тогда можем записать

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi}_0 + 2n\dot{\varphi}_0 - \omega^2 \sin \varphi_0 + \frac{\omega^4}{4} \sum_{i=1}^m \frac{\alpha_i^2}{p_i r_i} \sin 2\varphi_0 + \\ + \frac{\omega^4}{4} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^m \frac{\alpha_i \alpha_j}{p_j r_j} \sin 2\varphi_0 \cos(p_i - p_j)t = 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Линеаризация уравнения (10) при условии малости φ_0 приводит к следующему результату:

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi}_0 + 2n\dot{\varphi}_0 + \omega^2 \left(\frac{\omega^2}{2} \sum_{i=1}^m \frac{\alpha_i^2}{p_i r_i} - 1 \right) \varphi_0 + \\ + \frac{\omega^4}{2} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^m \frac{\alpha_i \alpha_j}{p_j r_j} \cos(p_i - p_j)t \varphi_0 = 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Понятно, что вне зависимости решения от параметрических явлений необходимым условием устойчивости маятника в вертикальном положении является положительность коэффициента в скобках при φ_0 . Таким образом, условием устойчивости будет неравенство в виде

$$\frac{\omega^2}{2} \sum_{i=1}^m \frac{\alpha_i^2}{p_i r_i} > 1 \quad (12)$$

или, если вернуться к первичным обозначениям, в другом виде:

$$\frac{Ml}{2g(J_1 + Ml^2)} \sum_{i=1}^m \frac{\delta_i^2 p_i^4}{p_i \sqrt{4n^2 + p_i^2}} > 1, \quad (13)$$

где J_1 — собственный момент инерции.

Для выявления физического смысла этого неравенства будем считать маятник математическим без диссипации энергии, т. е. $J = Ml^2$, $n = 0$. Тогда условие (13) можно преобразовать к виду

$$\frac{\sum_{i=1}^m \delta_i^2 p_i^2}{2gl} > 1. \quad (14)$$

Соотношение (14), как и следовало ожидать, полностью аналогично условию устойчивости, полученному на основе уравнения Хилла. Оно означает, что для устойчивости маятника в вертикальном положении необходимо, чтобы суммарная кинетическая энергия вибрации была больше потенциальной энергии массы математического маятника, поднятой на высоту l .

Введем следующие обозначения:

$$a_m = \frac{\omega^2}{2} \sum_{i=1}^m \frac{\alpha_i^2}{p_i r_i} - 1, \quad \tilde{\omega}^2 = \omega^2 a_m, \quad b_{ij} = \frac{\alpha_i \alpha_j}{p_j r_j}.$$

Тогда уравнение (11) приобретает следующий вид:

$$\ddot{\varphi}_0 + 2n\dot{\varphi}_0 + \tilde{\omega}^2 \left[1 + \frac{\omega^2}{2a_m} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^m b_{ij} \cos(p_i - p_j)t \right] \varphi_0 = 0. \quad (15)$$

При $m = 2$ его можно записать так:

$$\ddot{\varphi}_0 + 2n\dot{\varphi}_0 + \tilde{\omega}^2 \left[1 + \frac{\omega^2}{2a_2} b \cos(p_1 - p_2)t \right] \varphi_0 = 0, \quad (16)$$

где $b = b_{12} + b_{21}$.

Видно, что уравнения (15) и (16) отличаются от уравнений Хилла и Матье только наличием диссипативных членов и некратностью частот внешнего воздействия. В общем случае, по крайней мере теоретически, маятник может потерять вибрационную устойчивость одновременно на нескольких резонансных частотах в окрестности устойчивого вертикального положения. Парадоксальность такого результата заключается в том, что повышение устойчивости и ее потеря могут происходить совместно.

Получение и сопоставление результатов. Для иллюстрации полученных результатов рассмотрим физический маятник со следующими параметрами: $\omega = 0,5$ Гц, $n = 0,065$.

Аналитическое решение $\varphi_0(t)$, полученное в работе, сопоставлялось с результатами численного моделирования $\varphi(t)$ исходного уравнения движения. Расчеты осуществлялись с помощью программного пакета Wolfram Mathematica. На последующих графиках $\varphi_0(t)$ изображен сплошной линией, $\varphi(t)$ — пунктирной.

Для определения частот внешнего воздействия, при котором маятник примет устойчивое вертикальное положение, воспользуемся условием (12), которое было определено выше. Например, при возбуждении

системы двумя гармониками, которым соответствуют значения частот $p_1 = 10$ Гц, $p_2 = p_1 + \tilde{\omega}$ ($\tilde{\omega}$ — трансформированная собственная частота), а амплитуды $\delta_1 = 28$ мм, $\delta_2 = 6$ мм, получаем

$$\frac{\omega^2}{2} \left(\frac{\alpha_1^2}{p_1 r_1} + \frac{\alpha_2^2}{p_2 r_2} \right) = 0,324 < 1.$$

Приведенное соотношение указывает на недостаточность величины энергии вибрации для удержания маятника в устойчивом вертикальном положении. Следовательно, тело должно «упасть» и принять устойчивое положение, соответствующее уровню минимальной потенциальной энергии. Следует принять во внимание также, что в данном случае нагрузка представляет комбинационную частоту $p_2 - p_1 = \tilde{\omega}$, при которой в соответствии с (16) должны наблюдаться гармонические колебания с трансформированной собственной частотой $\tilde{\omega}$. Описанное выше поведение маятника представлено на рис. 2.

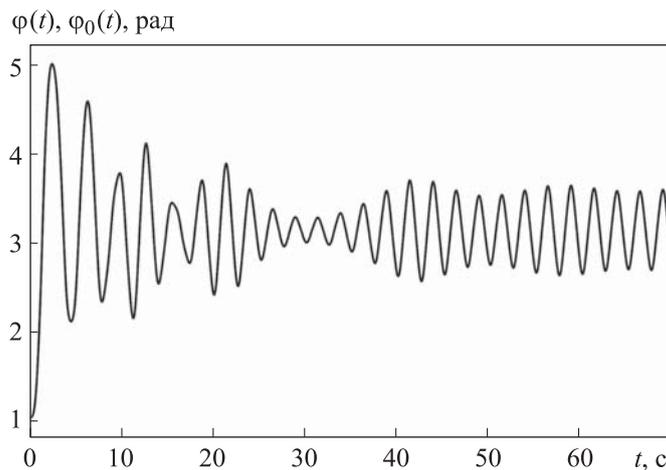


Рис. 2. График движения неустойчивого в вертикальном положении маятника

Теперь рассмотрим ситуацию, когда частотам внешнего воздействия также соответствуют две гармоники, которым задаются следующие значения: $p_1 = 35$ Гц, $p_2 = p_1 + \tilde{\omega}$, где $\tilde{\omega}$ — трансформированная собственная частота, определяемая соотношением

$$\sqrt{\omega^2 \left(\frac{\omega^2}{2} \left[\frac{\alpha_1^2}{p_1 r_1} + \frac{\alpha_2^2}{p_2 r_2} \right] - 1 \right)} = 0,511 \text{ Гц.}$$

В этом случае параметрическое возбуждение также образует комбинационную частоту $p_2 - p_1 = \tilde{\omega}$, которой соответствует резонансный

режим. Полученное действительное значение $\tilde{\omega}$ символизирует устойчивость системы в вертикальном положении (энергия вибрации больше потенциальной энергии массы вертикального маятника). Описанное выше доказывает характер поведения маятника, представленный на рис. 3.

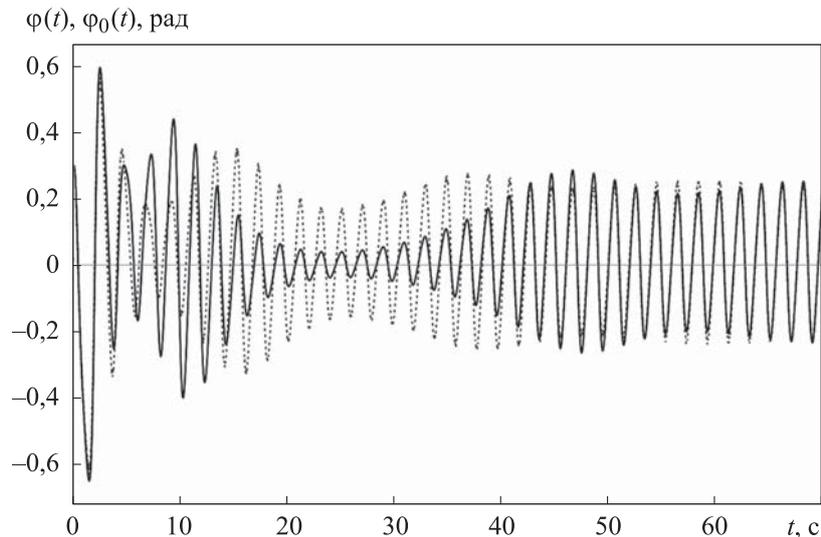


Рис. 3. График движения устойчивого маятника

После затухания переходных процессов можно наблюдать гармонические колебания с частотой $\tilde{\omega}$, причем средние ошибки по амплитудным значениям между численным и приближенным решением составляют $\Delta = 3,25\%$.

Заключение. Вертикальное нестационарное полигармоническое воздействие, так же как периодическое при аналогичных условиях, обеспечивает устойчивость перевернутого маятника. Осреднение высокочастотных составляющих на периоде, что требуется в классическом методе Н.Н. Боголюбова, во втором приближении может быть заменено повторным разделением на медленное и быстрое. В окрестности устойчивого вертикального положения возможно возникновение множественных параметрических резонансов на комбинационных частотах внешнего воздействия.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Смирнов А.С., Смольников Б.А. История механического резонанса — от первоначальных исследований до авторезонанса. *Чебышевский сборник*, 2022, т. 23, № 1, с. 269–292.
- [2] Грибков В.А., Хохлов А.О. Прием, упрощающий решение задачи устойчивости параметрически стабилизируемых статически неустойчивых маятниковых систем. *Известия высших учебных заведений, Машиностроение*, 2015, № 11, с. 29–38.

- [3] Сейранян А.П., Ябуно Х., Цумото К. Неустойчивость и периодические движения физического маятника с колеблющейся точкой подвеса. *Доклады Академии наук*, 2005, т. 404, № 2, с. 192–197.
- [4] Seyranian A.P., Mailybaev A.A., *Multiparameter Stability with Mechanical Applications*. Singapore, etc., World Scientific, 2004, 420 p.
- [5] Yaluno H., Miura M., Aoshima N.J. Bifurcation in an inverted pendulum with tilted high-frequency excitation: analytical and experimental investigations on the symmetry-breaking of the bifurcation. *Sound and Vibration*, 2004, vol. 273, pp. 293–513.
- [6] Акчурина Л.В., Каверина В.К. Рекуррентные формулы коэффициентов ряда Фурье при решении уравнения Матье в задачах систем с трением. *Вопросы теории и приложений математических моделей механики и процессов переноса*, 2018, № 4, с. 32–34.
- [7] Челомей С.В. Нелинейные колебания с параметрическим возбуждением. *Изв. АН СССР. Механика твердого тела*, 1977, № 3, с. 44–53.
- [8] Челомей С.В. О динамической устойчивости прямого трубопровода нагруженного переменной осевой силой при протекании через него пульсирующей жидкости. *Изв. АН РФ. Механика твердого тела*, 1998, № 6, с. 175–184.
- [9] Капица П.Л. Динамическая устойчивость маятника при колеблющейся точке подвеса. *Журнал эксперим. и теор. физики*, 1951, т. 21, вып. 5, с. 588–597.
- [10] Челомей В.Н. О возможности повышения устойчивости упругих систем при помощи вибраций. *Докл. АН СССР*, 1956, т. 110, № 3, с. 345–347.
- [11] Челомей В.Н. *Избранные труды*. Москва, Машиностроение, 1989, 335 с.
- [12] Боголюбов Н.Н., Садовников Б.И. Об одном варианте метода усреднения. *Вестник МГУ. Сер. 3: Физика, астрономия*, 1961, № 3, с. 24–34.
- [13] Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. *Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний*. Москва, Наука, 1975, 412 с.
- [14] Стрижак Т.Г. *Методы исследования динамических систем типа «маятник»*. Алма-Ата, Наука, 1981, 253 с.
- [15] Челомей С.В. О двух задачах динамической устойчивости колебательных систем, поставленных академиками П.Л. Капицей и В.Н. Челомеем. *Изв. РАН. Механика твердого тела*, 1999, № 6, с. 159–166.
- [16] Челомей В.Н. Парадоксы в механике, вызываемые вибрацией. *Докл. АН СССР (ДАН СССР)*, 1983, т. 270, № 1, с. 62–67.
- [17] Иориш Ю.И. *Виброметрия*. Москва, Наука, 1963, 753 с.
- [18] Беломытцева Е.Г., Курин А.Ф., Туленко Е.Б. Задача Коши для уравнения Матье с затуханием при параметрическом резонансе. *Вестник ВГУ. Сер. Физика, математика*, 2018, № 3, с. 105–125.
- [19] Абрамов А.А., Курочкин С.В. Вычисление решений уравнения Матье и связанных с ними величин. *Журнал вычислительной математики и математической физики*, 2007, т. 47, № 3, с. 414–423.
- [20] Arkhipova L.M., Luongo A., Seyranian A.P. Vibrational stabilization of upper statically unstable position of double pendulum. *Journal of Sound and Vibration*, 2012, vol. 331 (2), pp. 457–469.
- [21] Тушев О.Н., Чернов Д.С., Квазистатический «уход» маятника при возмущении точки подвеса высокочастотной полигармонической вибрацией с некрратными частотами. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*, 2021, № 5, с. 4–16.

Статья поступила в редакцию 31.10.2024

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Тушев О.Н., Кондратьев Е.К. Устойчивость и колебания перевернутого маятника при полигармоническом возбуждении с некратными частотами гармоник. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2025, вып. 3. EDN UEZECH

Тушев Олег Николаевич — д-р техн. наук, профессор кафедры «Аэрокосмические системы» МГТУ им. Н.Э. Баумана. e-mail: sm2aerospace@yandex.ru

Кондратьев Евгений Константинович — студент 6-го курса кафедры «Аэрокосмические системы» МГТУ им. Н.Э. Баумана. e-mail: kondratyev@eugenek.ru

Stability and oscillations of an inverted pendulum under polyharmonic excitation with the aliquant harmonic frequencies

© O.N. Tushev, E.K. Kondratyev

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, 105005, Russian Federation

Vertical high-frequency polyharmonic vibration of the suspension point is the external action on a pendulum. The harmonic component frequencies are aliquant, which differs fundamentally from the classical problem statement in the form of the Hill equation. Thus, the action is generally aliquant and aperiodic. The problem is solved by the well-known N.N. Bogolyubov method in two approximations with a small alteration. The pendulum motion is decomposed into two components: "slow" with a frequency of the order of the eigenfrequency and "fast" with the external action frequencies. The process aperiodicity excludes a possibility of using an efficient method of averaging the solution over the rapid oscillations period. Therefore, the repeated motion segregation is used instead. As a result, an equation is obtained for a slow motion of the same type as in the case of the periodic external action. The pendulum stability regions are determined under the rapid vibrations. The paper shows that stability could be lost simultaneously in vicinity of the pendulum stable vertical position as a result of the parametric resonance or even several resonances (at least theoretically) on the external action combination frequencies. The results are illustrated with an example and their assessment is provided using the numerical simulation.

Keywords: *pendulum, polyharmonic, slow and fast motion, stability, parametric resonance*

REFERENCES

- [1] Smirnov A.S., Smolnikov B.A. Istoriya mekhanicheskogo rezonansa — ot pervonachalnykh issledovaniy do avtorezonansa [The history of mechanical resonance — from initial studies to autoresonance]. *Chebyshevskii Sbornik*, 2022, vol. 23, no. 1, pp. 269–292.
- [2] Gribkov V.A., Khokhlov A.O. Priem, uproshchayushchiy reshenie zadachi ustoychivosti parametricheski stabiliziruemykh staticheski neustoychivykh mayatnikovyykh sistem [A method to simplify solution of stability problem for parametrically stabilized statically unstable pendulum systems]. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Mashinostroenie — BMSTU Journal of Mechanical Engineering*, 2015, no. 11, pp. 29–38.
- [3] Seyranian A.P., Yabuno H., Tsumoto K. Neustoychivost i periodicheskie dvizheniya fizicheskogo mayatnika s koleblyushcheysoy tochkoj podvesa [Instability and periodic motion of a physical pendulum with the oscillating suspension point]. *Doklady Akademii nauk — Proceedings of the Russian Academy of Sciences (RAS)*, 2005, vol. 404, no. 2, pp. 192–197.
- [4] Seyranian A.P., Mailybaev A.A. *Multiparameter Stability with Mechanical Applications*. Singapore, etc. World Scientific, 2004, 420 p.
- [5] Yaluno H., Miura M., Aoshima N.J. Bifurcation in an inverted pendulum with tilted high-frequency excitation: analytical and experimental investigations on the symmetry-breaking of the bifurcation. *Sound and Vibration*, 2004, vol. 273, pp. 293–513.

- [6] Akchurina L.V., Kaverina V.K. Rekurrentnye formuly koeffitsientov ryada Furiye pri reshenii uravneniya Matye v zadachyakh treniya [Recurrent formulas of Fourier series coefficients in solving the Mathieu equation in problems of systems with friction]. *Voprosy teorii i prilozheniy matematicheskikh modeley mekhaniki i protsessov perenosy* — *Questions of theory and applications of mathematical models of mechanics and transfer processes*, 2018, no. 4, pp. 32–34.
- [7] Chelomey S.V. Nelineynye kolebaniya s parametricheskim vzbuzhdeniem [Nonlinear oscillations with parametric excitation]. *Izv. AN SSSR. Mekhanika tverdogo tela* — *Mechanics of Solids. A Journal of the USSR Academy of Sciences*, 1977, no. 3, pp. 44–53.
- [8] Chelomey S.V. O dinamicheskoy ustoychivosti pryamogo truboprovoda, nagruzhennogo peremennoy osevoy siloy pri protekanii cherez nego pulsiruyushchey zhidkosti [On dynamic stability of straight pipeline with pulsing liquid inside under effect of variable axial force]. *Izv. AN RF. Mekhanika tverdogo tela* — *Mechanics of Solids. A Journal of the Russian Academy of Sciences*, 1998, no. 6, pp. 175–184.
- [9] Kapitsa P.L. Dinamicheskaya ustoychivost mayatnika pri koleblyushcheysya tochke podvesa [Dynamic stability of a pendulum with oscillating suspension point]. *Zhurnal eksper. i teor. fiziki* — *Journal of Experimental and Theoretical Physics*, 1951, vol. 21, iss. 5, pp. 588–597.
- [10] Chelomey V.N. O vozmozhnosti povysheniya ustoychivosti uprugikh sistem pri pomoshchi vibratsiy [On possibility of raising elastic system stability by means of vibrations]. *Doklady AN SSSR* — *Proceedings of the USSR Academy of Sciences*, 1956, vol. 110, no. 3, pp. 345–347.
- [11] Chelomey V.N. *Izbrannyye trudy* [Selected works]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1989, 335 p.
- [12] Bogolyubov N.N., Sadovnikov B.I. Ob odnom variante metoda usredneniya [On one version of averaging method]. *Vestnik MGU. Ser. 3, Fizika, astronomiya* — *Moscow University Physics Bulletin*, 1961, no. 3, pp. 24–34.
- [13] Bogolyubov N.N., Mitropolskiy Yu.A. *Asimptoticheskie metody v teorii nelineynykh kolebaniy* [Asymptotic method in nonlinear oscillations theory]. Moscow, Nauka Publ., 1975, 412 p.
- [14] Strizhak T.G. *Metody issledovaniya dinamicheskikh sistem tipa "mayatnika"* [Research technique for dynamic systems of pendulum type]. Alma-Ata, Nauka Publ., 1981, 253 p. 13.
- [15] Chelomey S.V. O dvukh zadachyakh dinamicheskoy ustoychivosti kolebatelnykh sistem, postavlennykh akademikami P.L. Kapitsey i V.N. Chelomeyem [On two problems of dynamic stability of oscillating systems, put on by P.L. Kapitsa and V.N. Chelomey academicians]. *Izv. RAN. Mekhanika tverdogo tela* — *Mechanics of Solids. A Journal of the Russian Academy of Sciences*, 1999, no. 6, pp. 159–166.
- [16] Chelomey V.N. Paradoksy v mekhanike, vzyvaemye vibratsiy [Paradoxes in mechanics caused by vibration]. *Dokl. AN SSSR (DAN SSSR)* — *Proceedings of the USSR Academy of Sciences*, 1983, vol. 270, no. 1, pp. 62–67.
- [17] Iorish Yu.I. *Vibrometriya* [Vibrometry]. Moscow, Nauka Publ., 1963, 753 p.
- [18] Belomytseva E.G., Kurin A.F., Tulenko E.B. Zadacha Koshi dlya uravneniya Matye s zatukhaniem pri parametricheskim rezonansa [The Cauchy problem for the Mathieu equation with damping at parametric resonance]. *Vestnik VGU. Ser. Fizika, matematika* — *Proc. of VSU. Ser. Phys. Math.*, 2018, no. 3, pp. 105–125.
- [19] Abramov A.A., Kurochkin S.V. Vychislenie resheniy uravneniya Matye i svyazannykh s nimi velichin [Calculation of solutions to the Mathieu equation and related quantities]. *Zhurnal vychislitel'noy matematiki i matematicheskoy fiziki* — *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2007, vol. 47, no. 3, pp. 414–423.

- [20] Arkhipova L.M., Luongo A., Seyranian A.P. Vibrational stabilization of upper statically unstable position of double pendulum. *Journal of Sound and Vibration*, 2012, vol. 331 (2), pp. 457–469.
- [21] Tushev O.N., Chernov D.S. Kvazistaticheskiy “ukhod” mayatnika pri vozmushchenii točki podvesa vysokochastnoy poligarmonocheskoy vibratsiy s nekratnymi chastotami [Pendulum quasi-static drift effect at suspension point excitation by high-frequency polyharmonic multiple frequency vibration]. *Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Ser. Estestvennye nauki — Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Series Natural Sciences*, 2021, no. 5, pp. 4–16.

Tushev O.N., Dr. Sc. (Eng.), Professor, Department of Aerospace Systems, Bauman Moscow State Technical University. e-mail: sm2aerospace@yandex.ru

Kondratyev E.K., 6th Year Student, Department of Aerospace Systems, Bauman Moscow State Technical University. e-mail: kondratyev@eugenek.ru