

**Исследование неуправляемого движения
относительно центра масс наноспутников
формата CubeSat 6U под действием
аэродинамического и гравитационного моментов**

© Е.В. Барина, И.В. Белоконов, И.А. Тимбай

Самарский национальный исследовательский университет
имени академика С.П. Королева, Самара, 443086, Российская Федерация

Исследование динамики пассивного движения наноспутников формата CubeSat 6U относительно центра масс проведено с учетом особенностей математической модели аэродинамической силы лобового сопротивления при движении на низкой круговой орбите. Получена система уравнений для определения положений равновесия наноспутника в орбитальной системе координат под действием аэродинамического и гравитационного моментов. Для частного случая смещения центра масс от геометрического центра наноспутника вдоль продольной оси найдено аналитическое решение данной системы уравнений. Показана возможность возникновения резонансных режимов движения при использовании аэродинамической стабилизации по вектору скорости. Получены соотношения для определения критических значений продольной угловой скорости наноспутника, при которых выполняются условия возникновения резонансных режимов движения, и даны рекомендации по их предотвращению.

Ключевые слова: наноспутник формата CubeSat 6U, угловое движение, пространственный угол атаки, резонансные режимы движения, положения равновесия, пассивное движение наноспутника, масс-инерционная асимметрия

Введение. В последние десятилетия миниатюризация и развитие техники привели к возникновению нового класса космических аппаратов — наноспутников (НС) стандарта CubeSat. Спецификации этого стандарта были разработаны в 1999 г. Калифорнийским политехническим и Стэнфордским университетами [1, 2], чтобы упростить создание сверхмалых спутников. Эти маленькие и относительно недорогие аппараты стали популярными среди научных и образовательных организаций благодаря своей компактности и наличию возможности выполнять различные миссии в космосе. Следует отметить, что в класс наноспутников входят НС стандарта CubeSat от 1U до 6U включительно [3].

Изначально такие НС применяли в образовательных целях, а также в качестве платформ для тестирования новых технологий и инновационных решений, которые можно было разработать и запустить в течение одного года или двух лет [1, 2, 4]. Поэтому на первых этапах использования у большинства НС CubeSat было неориентированное движение. В дальнейшем, при выполнении ряда задач, возникла необходимость в поддержании определенной ориентации НС, например,

для фотографирования другого наноспутника [5], размещения аппаратуры оптического дистанционного зондирования Земли [4, 6], аппаратуры слежения за Солнцем [7], изучения космической погоды [8], исследования ионосферы [9], а также при использовании двигательных установок, которые в последнее время активно разрабатываются для аппаратов этого класса [10, 11]. В работе [12] приведен список миссий малоразмерных аппаратов стандарта CubeSat на начало 2017 г., сопровождаемый такими сведениями, как размер аппарата, ведущая организация, основные цели и статус запуска.

С целью снижения энергетических затрат, необходимых для поддержания заданной ориентации, начали применять пассивные или комбинированные (пассивные в сочетании с активными) системы стабилизации [13–17]. При проектировании таких пассивных систем используются информация об устойчивых положениях равновесия под действием внешних моментов и анализ неуправляемого движения НС относительно центра масс. Поэтому важно определять положение равновесия, а также изучать движение НС в их окрестности под действием гравитационного и аэродинамического моментов, преобладающих на низких круговых орбитах. Изучению влияния этих моментов на движение спутника относительно центра масс посвящено много работ, например [18–20], в которых в основном рассматриваются аппараты, имеющие близкую к сферической форму или представляющие собой тело вращения. Поскольку НС формата CubeSat выполнены в виде прямоугольного параллелепипеда, что влечет за собой изменения в математической модели аэродинамической силы лобового сопротивления, возникает новый класс задач, связанный с поиском положений равновесия и исследованием возможности возникновения резонансных режимов движения.

Ранее уже были определены положения равновесия углового движения НС формата CubeSat 1U–3U на круговой орбите под действием аэродинамического и гравитационного моментов для двух частных случаев: для динамически симметричного НС при смещении центра давления от его центра масс по трем координатам [21] и для НС с тремя разными главными моментами инерции при смещении центра давления от центра масс по одной из главных осей инерции [22].

В случае использования одноосной аэродинамической стабилизации НС относительно центра масс важно учитывать возможность возникновения резонансных режимов движения, проявляющихся в резком изменении амплитуды колебаний по пространственному углу атаки, когда линейная целочисленная комбинация частоты колебаний пространственного угла атаки и средней частоты собственного вращения оказывается близкой к нулю. Следовательно, если исключить возникновение резонансных режимов движения, то повысится

эффективность работы системы ориентации НС при решении им целевых задач на низких орбитах.

Изучению резонансных режимов движения осесимметричных космических аппаратов с малой инерционно-массовой и геометрической асимметрией посвящено большое количество работ отечественных и зарубежных авторов [23–25]. Поскольку НС формата CubeSat имеют вид прямоугольного параллелепипеда, в отличие от аппаратов осесимметричной формы, аэродинамический момент зависит не только от пространственного угла атаки, но и от угла собственного вращения. В этом случае может возникать резонанс из-за формы аппарата, даже без малой асимметрии [26]. Резонансные режимы движения аэродинамически стабилизированных НС формата CubeSat 1U–3U, обусловленные формой аппарата и малой инерционно-массовой асимметрией при полете на низких круговых орбитах, были рассмотрены в [27].

В отличие от НС формата CubeSat 1U–3U, у НС CubeSat 6U различаются все три линейных размера и, следовательно, отличается выражение для аэродинамического момента. Резонансные режимы движения с учетом особенностей формы НС CubeSat 6U рассмотрены в работе [28]. В развитие проведенных ранее исследований ниже проведен анализ динамики наноспутников формата CubeSat 6U.

Цель данной работы — проанализировать динамику наноспутников формата CubeSat 6U с учетом особенностей модели аэродинамического момента, а именно определить положения равновесия под действием аэродинамического и гравитационного моментов, а также выработать рекомендации по предотвращению возникновения резонансных режимов движения при одноосной аэродинамической стабилизации.

Математическая модель движения. Для того чтобы задать ориентацию НС, будут введены две правые прямоугольные системы координат (СК) с началом в его центре масс — точке O : $Oxuz$ — связанная с наноспутником СК; Ox, Oy, Oz — главные центральные оси инерции НС; $OX_k Y_k Z_k$ — траекторная СК, совпадающая с орбитальной в случае круговой орбиты. Ось OX_k направлена вдоль вектора скорости центра масс наноспутника, ось OZ_k расположена в местной вертикальной плоскости и идет вверх от поверхности Земли.

Ориентацию связанной с НС системы координат $Oxuz$ относительно траекторной системы координат $OX_k Y_k Z_k$ можно определить с помощью углов Эйлера: угла прецессии ψ (угол между плоскостью полета и плоскостью пространственного угла атаки), угла нутации — пространственного угла атаки α (угол между продольной осью НС и вектором скорости центра масс) и угла собственного вращения φ

(угол между плоскостью угла атаки и поперечной осью НС). Расположение систем координат показано на рис. 1. Коэффициенты матрицы перехода от траекторной системы координат к связанной определяются следующим образом:

$$\begin{aligned}
 b_{11} &= \cos \alpha, & b_{12} &= \sin \alpha \sin \psi, & b_{13} &= -\sin \alpha \cos \psi; \\
 b_{21} &= \sin \alpha \sin \varphi, & b_{22} &= \cos \varphi \cos \psi - \cos \alpha \sin \varphi \sin \psi; \\
 b_{23} &= \cos \varphi \sin \psi + \cos \alpha \sin \varphi \cos \psi, & b_{31} &= \sin \alpha \cos \varphi; \\
 b_{32} &= -\sin \varphi \cos \psi - \cos \alpha \cos \varphi \sin \psi; \\
 b_{33} &= -\sin \varphi \sin \psi + \cos \alpha \cos \varphi \cos \psi.
 \end{aligned}$$

На рассматриваемых высотах движения принято считать, что обтекание наноспутника свободномолекулярное и удар молекул газа абсолютно неупругий. В этом случае аэродинамическая сила представляет собой силу сопротивления, которая определяется площадью проекции НС на плоскость, перпендикулярную вектору скорости набегающего потока [18].

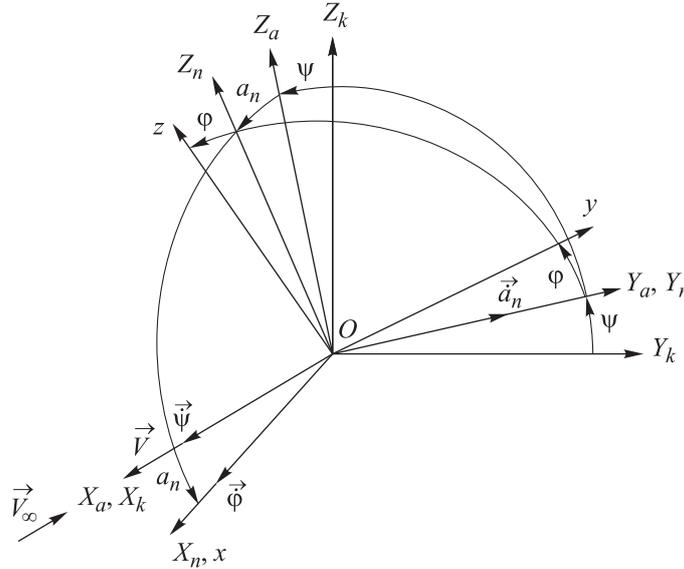


Рис. 1. Взаимное расположение траекторной $OX_k Y_k Z_k$ и связанной с наноспутником $Oxyz$ систем координат

В отличие от НС формата CubeSat 1U–3U, у НС CubeSat 6U различаются все три линейных размера ($l_x > l_z > l_y$) и, следовательно, отличается выражение для площади проекции НС на плоскость, перпендикулярную вектору скорости набегающего потока (рис. 2):

$$S(\alpha, \varphi) = S_x \left(|\cos \alpha| + \sin \alpha \left(\frac{l_x}{l_z} |\sin \varphi| + \frac{l_x}{l_y} |\cos \varphi| \right) \right), \quad (1)$$

где $S_x = l_y l_z$ — характерная площадь НС (в данном случае площадь наименьшей грани).

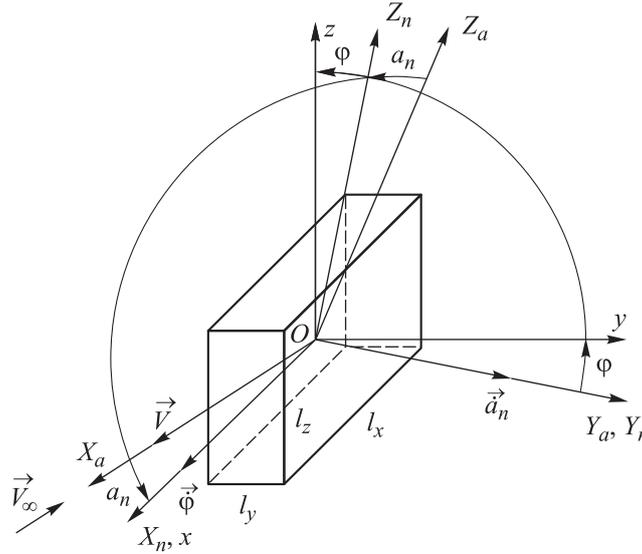


Рис. 2. Взаимное расположение вектора набегающего потока и связанной с наноспутником $Oxyz$ системы координат

При выбранном расположении осей СК, связанной с НС, в случае равномерного или близкого к нему распределения масс будут выполняться неравенства для моментов инерции: $J_x < J_z < J_y$.

Уравнения пространственного движения НС относительно центра масс под действием аэродинамического и гравитационного моментов на круговой орбите можно записать в следующем виде [29]:

$$\begin{aligned} J_x \dot{\omega}_x + (J_z - J_y) \omega_y \omega_z &= M_{gx} + M_{ax}, \\ J_y \dot{\omega}_y + (J_x - J_z) \omega_z \omega_x &= M_{gy} + M_{ay}, \end{aligned} \quad (2)$$

$$J_z \dot{\omega}_z + (J_y - J_x) \omega_x \omega_y = M_{gz} + M_{az};$$

$$\omega_x = \dot{\psi} \cos \alpha + \dot{\phi} + \omega_0 b_{12},$$

$$\omega_y = \dot{\psi} \sin \varphi \sin \alpha + \dot{\alpha} \cos \varphi + \omega_0 b_{22}, \quad (3)$$

$$\omega_z = \dot{\psi} \cos \varphi \sin \alpha - \dot{\alpha} \sin \varphi + \omega_0 b_{32}.$$

Здесь $M_{gx} = 3 \frac{\mu}{(R_E + H)^3} (J_z - J_y) b_{23} b_{33}$, $M_{gy} = 3 \frac{\mu}{(R_E + H)^3} (J_x - J_z) b_{13} b_{33}$,
 $M_{gz} = 3 \frac{\mu}{(R_E + H)^3} (J_y - J_x) b_{13} b_{23}$ — проекции гравитационного момента на оси связанной СК; $M_{ax} = -c_0 q S(\alpha, \varphi) (\Delta y b_{31} - \Delta z b_{21})$,
 $M_{ay} = -c_0 q S(\alpha, \varphi) (\Delta z b_{11} - \Delta x b_{31})$, $M_{az} = -c_0 q S(\alpha, \varphi) (\Delta x b_{21} - \Delta y b_{11})$ — проекции аэродинамического момента на оси связанной СК; J_x, J_y, J_z — главные центральные моменты инерции НС; $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ — проекции абсолютной угловой скорости на оси связанной СК; $\omega_0 = \omega_0(H)$ — орбитальная угловая скорость; μ — гравитационная постоянная Земли; R_E — радиус Земли; H — высота полета; c_0 — коэффициент, который может принимать значения от 2 до 3 в зависимости от физических свойств газа и поверхности наноспутника, для проектных проработок принимается $c_0 = 2,2$; $q = q(H) = \rho(H) V(H)^2 / 2$ — скоростной напор; $\rho(H)$ — плотность атмосферы на данной высоте; $V(H)$ — скорость полета НС; $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ — смещение центра давления (геометрического центра) относительно центра масс вдоль продольной оси; $\omega_0^2 = \frac{\mu}{(R_E + H)^3}$, так как рассмат-

ривается движение на круговой орбите.

Положения равновесия НС формата CubeSat 6U под действием аэродинамического и гравитационного моментов. Положение равновесия наноспутника — это такое положение, в котором он будет оставаться все время, если в начальный момент времени находился в этом положении и скорости всех его точек были равны нулю [30]. Из приведенного определения следует, что скорости изменения углов относительно орбитальной СК равны нулю ($\dot{\alpha} = 0, \dot{\psi} = 0, \dot{\phi} = 0$), и тогда уравнения (2) примут вид

$$\omega_x = \omega_0 b_{12}, \quad \omega_y = \omega_0 b_{22}, \quad \omega_z = \omega_0 b_{32}. \quad (4)$$

С учетом (4) получим из (2) систему для определения положений равновесия при движении НС формата CubeSat 6U по круговой орбите под действием аэродинамического и гравитационного моментов:

$$(J_z - J_y) \omega_0^2 (b_{22} b_{32} - 3 b_{23} b_{33}) + c_0 q S_x (\Delta y b_{31} - \Delta z b_{21}) \left(|b_{11}| + \frac{I_x}{I_y} |b_{21}| + \frac{I_x}{I_z} |b_{31}| \right) = 0,$$

$$(J_x - J_z)\omega_0^2(b_{32}b_{12} - 3b_{33}b_{13}) + c_0qS_x(\Delta zb_{11} - \Delta xb_{31})\left(|b_{11}| + \frac{l_x}{l_y}|b_{21}| + \frac{l_x}{l_z}|b_{31}|\right) = 0, \quad (5)$$

$$(J_y - J_x)\omega_0^2(b_{12}b_{22} - 3b_{13}b_{23}) + c_0qS_x(\Delta xb_{21} - \Delta yb_{11})\left(|b_{11}| + \frac{l_x}{l_y}|b_{21}| + \frac{l_x}{l_z}|b_{31}|\right) = 0.$$

Для частного случая, когда центр давления смещен относительно центра масс по одной из главных осей инерции ($J_x \neq J_y \neq J_z$ и $\Delta x \neq 0$), система уравнений (5) примет вид

$$(J_z - J_y)\omega_0^2(b_{22}b_{32} - 3b_{23}b_{33}) = 0, \\ (J_x - J_z)\omega_0^2(b_{32}b_{12} - 3b_{33}b_{13}) - c_0qS_x\Delta xb_{31}\left(|b_{11}| + \frac{l_x}{l_y}|b_{21}| + \frac{l_x}{l_z}|b_{31}|\right) = 0, \quad (6)$$

$$(J_y - J_x)\omega_0^2(b_{12}b_{22} - 3b_{13}b_{23}) + c_0qS_x\Delta xb_{21}\left(|b_{11}| + \frac{l_x}{l_y}|b_{21}| + \frac{l_x}{l_z}|b_{31}|\right) = 0.$$

В этом случае можно найти аналитическое решение. Введем обозначения

$$v = \frac{\omega_0^2(J_y - J_x)}{c_0qS_x}, \quad r = \frac{\omega_0^2(J_z - J_x)}{c_0qS_x}. \quad (7)$$

Тогда комбинации углов прецессии, собственного вращения и атаки, соответствующие положениям равновесия относительно центра масс, можно определить по следующим формулам:

1) $\alpha_1 = 0$ при $\varphi + \psi = \{0, \pi/2, \pi, 3\pi/2\}$ — четыре положения равновесия при любых соотношениях Δx , r , v ;

2) $\alpha_2 = \pi$ при $\varphi + \psi = \{0, \pi/2, \pi, 3\pi/2\}$ — четыре положения равновесия при любых соотношениях Δx , r , v ;

3) если $\frac{|\Delta x|}{3} < |r|$: $\psi_1 = 0, (\psi_3 = \pi), \varphi_1 = 0, (\varphi_3 = \pi), \alpha_3 =$
 $= \operatorname{arccctg} \left(\frac{\Delta x l_x}{(-3r + \operatorname{sign}(r)|\Delta x|) l_z} \right)$ — четыре положения равновесия;

4) если $|\Delta x| < |r|$: $\psi_2 = \frac{\pi}{2}, (\psi_4 = \frac{3\pi}{2}), \varphi_1 = 0, (\varphi_3 = \pi), \alpha_4 =$
 $= \operatorname{arccctg} \left(\frac{\Delta x l_x}{(r - \operatorname{sign}(r)|\Delta x|) l_z} \right)$ — четыре положения равновесия;

5) если $\frac{|\Delta x|}{3} < |v|$: $\psi_1 = 0, (\psi_3 = \pi), \varphi_2 = \frac{\pi}{2}, (\varphi_4 = \frac{3\pi}{2}), \alpha_5 =$
 $= \operatorname{arccctg} \left(\frac{\Delta x l_x}{(-3v + \operatorname{sign}(v)|\Delta x|) l_y} \right)$ — четыре положения равновесия;

6) если $|\Delta x| < |v|$: $\psi_2 = \frac{\pi}{2}, (\psi_4 = \frac{3\pi}{2}), \varphi_2 = \frac{\pi}{2}, (\varphi_4 = \frac{3\pi}{2}), \alpha_6 =$
 $= \operatorname{arccctg} \left(\frac{\Delta x l_x}{(v - \operatorname{sign}(v)|\Delta x|) l_y} \right)$ — четыре положения равновесия.

Таблица 1

Число положений равновесия (в скобках указаны номера комбинаций углов, соответствующие положениям равновесия)

Соотношения величин	$0 < r < \frac{ \Delta x }{3}$	$\frac{ \Delta x }{3} < r < \Delta x $	$ \Delta x < r $
$0 < v < \frac{ \Delta x }{3}$	8 (1, 2)	12 (1, 2, 3)	16 (1, 2, 3, 4)
$\frac{ \Delta x }{3} < v < \Delta x $	12 (1, 2, 5)	16 (1, 2, 3, 5)	20 (1, 2, 3, 4, 5)
$ \Delta x < v $	16 (1, 2, 5, 6)	20 (1, 2, 3, 5, 6)	24 (1, 2, 3, 4, 5, 6)

Окончательный результат приведен в табл. 1, в которой в зависимости от соотношения параметров показано число положений равновесия, а в скобках указаны номера комбинаций углов прецессии, собственного вращения и атаки, соответствующие положениям равновесия. Из таблицы видно, что число положения равновесия не может быть меньше 8 и больше 24. При преобладании аэродинамического момента, т. е. на сравнительно низких высотах, где атмосфера оказывает заметное

влияние, возможно всего 8 положений равновесия, тогда как при преобладании гравитационного момента, т. е. на высотах с менее плотной атмосферой, возможно 24 положения равновесия.

Резонансные режимы движения. При использовании одноосной аэродинамической стабилизации продольной оси НС относительно вектора скорости необходимо учитывать возможность возникновения резонансных режимов движения. Эти режимы проявляются в резком изменении амплитуды колебаний по пространственному углу атаки, когда линейная целочисленная комбинация частоты колебаний пространственного угла атаки и средней частоты собственного вращения оказывается близкой к нулю.

Изучение резонансных режимов движения проводится в соответствии с алгоритмом, изложенном в [27], с учетом отличий, обусловленных особенностями формата 6U. Далее при рассмотрении резонансных режимов также учитывается влияние малых центробежных моментов инерции и смещение центра масс от продольной оси полагается малым ($\Delta y \ll \Delta x$, $\Delta z \ll \Delta x$). Тензор инерции НС в связанной СК (центральная СК, оси которой параллельны ребрам НС) имеет вид

$$J = \begin{pmatrix} J_x & -J_{xy} & -J_{xz} \\ -J_{xy} & J_y & -J_{yz} \\ -J_{xz} & -J_{yz} & J_z \end{pmatrix}, \quad (8)$$

где J_x , J_y , J_z — осевые моменты инерции (J_x — наименьший момент инерции); J_{xy} , J_{xz} , J_{yz} — центробежные моменты инерции, являющиеся малыми.

Аэродинамическое угловое ускорение НС формата CubeSat 6U в связанной СК определяется выражением

$$M_\alpha(\alpha, \varphi, H) = m_1(H) \left(|\cos \alpha| + \sin \alpha \left(\frac{l_x}{l_y} |\sin \varphi| + \frac{l_x}{l_z} |\cos \varphi| \right) \right) \times \\ \times (\Delta x \sin \alpha - (\Delta y \sin \varphi + \Delta z \cos \varphi) \cos \alpha), \quad (9)$$

где $m_1(H) = -c_0 S_x q(H) / J_n$ ($J_n = (J_y + J_z) / 2$ — поперечный момент инерции НС).

С целью выделения малой составляющей углового ускорения, обусловленной отличием формы НС от осесимметричной, разложим в выражении (9) сумму $\frac{l_x}{l_y} |\sin \varphi| + \frac{l_x}{l_z} |\cos \varphi|$ в ряд Фурье по углу

собственного вращения, ограничившись слагаемыми до $\cos 4\varphi$ включительно:

$$\begin{aligned} & \frac{l_x}{l_y} |\sin \varphi| + \frac{l_x}{l_z} |\cos \varphi| = \\ & = \frac{2}{\pi} \left(\frac{l_x}{l_y} + \frac{l_x}{l_z} \right) - \frac{4}{3\pi} \left(\frac{l_x}{l_y} - \frac{l_x}{l_z} \right) \cos 2\varphi - \frac{4}{15\pi} \left(\frac{l_x}{l_y} + \frac{l_x}{l_z} \right) \cos 4\varphi + \dots \quad (10) \end{aligned}$$

В отличие от соотношения (1), у НС формата CubeSat 1U–3U коэффициенты, стоящие перед $|\sin \varphi|$ и $|\cos \varphi|$, одинаковые (боковые грани равны), и в результате при разложении в ряд Фурье отсутствует слагаемое, содержащее $\cos 2\varphi$. Наличие данного слагаемого в разложении для НС CubeSat 6U увеличивает количество резонансов по сравнению с НС CubeSat 1U–3U [27], что показано ниже.

С учетом разложения (10) аэродинамическое угловое ускорение (9) можно представить в виде двух слагаемых, одному из которых вследствие его малости приписан малый параметр ε :

$$M_\alpha(\alpha, \varphi, H) = M_\alpha(\alpha, H) + \varepsilon \Phi_\alpha(\alpha, \varphi, H), \quad (11)$$

где

$$M_\alpha(\alpha, H) = m_1(H) \Delta x \left(|\cos \alpha| + \frac{2}{\pi} \left(\frac{l_x}{l_y} + \frac{l_x}{l_z} \right) \sin \alpha \right) \sin \alpha, \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \Phi_\alpha(\alpha, \varphi, H) = & m_1(H) \Delta x \left(-\frac{4}{3\pi} \left(\frac{l_x}{l_y} - \frac{l_x}{l_z} \right) \cos 2\varphi - \right. \\ & \left. - \frac{4}{15\pi} \left(\frac{l_x}{l_y} + \frac{l_x}{l_z} \right) \cos 4\varphi \right) \sin^2 \alpha - \\ & - m_1(H) \left(|\cos \alpha| + \sin \alpha \left(\frac{l_x}{l_y} |\sin \varphi| + \frac{l_x}{l_z} |\cos \varphi| \right) \right) \times \\ & \times (\Delta y \sin \varphi + \Delta z \cos \varphi) \cos \alpha. \end{aligned} \quad (13)$$

Для проведения приближенного анализа параметров движения зависимость (12) допустимо аппроксимировать синусоидальной зависимостью по углу атаки:

$$M_\alpha(\alpha, H) = m_1(H) \Delta x m_{nk} \sin \alpha, \quad (14)$$

где $m_{nk} = \frac{4}{3\pi} \left(1 + \frac{4}{\pi} \left(\frac{l_x}{l_y} + \frac{l_x}{l_z} \right) \right) + \frac{24}{\pi^2}$ — первый член разложения в ряд

Фурье по $\sin \alpha$.

Используя подход, изложенный в [23], с учетом представления аэродинамического углового ускорения НС в виде (11) и пренебрегая орбитальной угловой скоростью и гравитационным моментом, угловое движение НС на низких круговых орбитах относительно траекторной СК можно описать следующими уравнениями:

$$\begin{aligned} \ddot{\alpha} + F(\alpha, H) &= \varepsilon \Phi_{\alpha}(\alpha, \varphi, H) + \varepsilon \Phi_{\alpha}^J(\alpha, \varphi, H, R, G), \\ \dot{\varphi} &= R / \bar{J}_x - (G - R \cos \alpha) \cos \alpha / \sin^2 \alpha = \Phi_{\varphi}(\alpha, H, R, G), \\ \dot{\psi} &= (G - R \cos \alpha) / \sin^2 \alpha, \\ \dot{R} &= \varepsilon \Phi_R(\alpha, \varphi, H), \\ \dot{G} &= \varepsilon \Phi_G(\alpha, \varphi, H, R), \\ \dot{H} &= -2\sigma_x(\alpha, \varphi) q(H) V(H) / g = \varepsilon \Phi_H(\alpha, \varphi, H), \\ F(\alpha, H) &= (G - R \cos \alpha)(R - G \cos \alpha) / \sin^3 \alpha - M_{\alpha}(\alpha, H), \\ \Phi_{\alpha}^J(\alpha, \varphi, H, R, G) &= (\bar{J}_{xy} \sin \varphi + \bar{J}_{xz} \cos \varphi) (\dot{\psi}^2 \sin^2 \alpha - R^2) + \\ &+ (\bar{J}_{xy} \cos \varphi - \bar{J}_{xz} \sin \varphi) \dot{\psi} \dot{\alpha} \sin \alpha + \\ &+ \left(1 - \frac{2}{\bar{J}_x} \right) R \bar{J}_{yz} (\dot{\psi} \sin \alpha \sin 2\varphi + \dot{\alpha} \cos 2\varphi) + \\ &+ m_0(H) \left(|\cos \alpha| + \sin \alpha \left(\frac{l_x}{l_y} |\sin \varphi| + \frac{l_x}{l_z} |\cos \varphi| \right) \right) \times \\ &\times \sin \alpha (\Delta_i \cos 2\varphi + J_{yz} \sin 2\varphi) + \frac{1}{2} R \Delta_i (\dot{\psi} \sin \alpha \cos 2\varphi + \dot{\alpha} \sin 2\varphi). \end{aligned} \quad (15)$$

Здесь $\sigma_x(\alpha, \varphi) = c_0 \left(|\cos \alpha| + \sin \alpha \left(\frac{l_x}{l_y} |\sin \varphi| + \frac{l_x}{l_z} |\cos \varphi| \right) \right) S / m$ — баллистический коэффициент; m — масса НС; $R = \bar{J}_x \omega_x$, $G = R \cos \alpha + (\omega_y \sin \varphi + \omega_z \cos \varphi) \sin \alpha$ — отнесенные к поперечному

моменту инерции J_n проекции вектора кинетического момента на продольную ось НС и на направление скорости центра масс; $\bar{J}_x = J_x/J_n$; $\bar{J}_{xy} = J_{xy}/J_n$; $\bar{J}_{xz} = J_{xz}/J_n$; $\bar{J}_{yz} = J_{yz}/J_n$; $\Delta_i = (J_z - J_y)/J_n$; величины \bar{J}_{xy} , \bar{J}_{xz} , \bar{J}_{yz} , Δ_i полагают малыми порядка ε ; $g = g_E (R_E / (R_E + H))^2$ (g_E — ускорение свободного падения на поверхности Земли; $\Phi_G(\alpha, \varphi, H, R)$ — медленно меняющаяся функция, которая равна нулю при нулевых значениях центробежных моментов инерции и динамической симметричности ($\Delta_i = 0$); $\Phi_R(\alpha, \varphi, H)$ — медленно меняющаяся функция, которая равна нулю при отсутствии асимметрии).

В зависимости от соотношения величин R и G реализуются различные типы прецессионного движения. Так, при выполнении условия $R > G$ реализуется «обратная» прецессия, при $G > R$ — «прямая» прецессия [31].

Аналогично исследованию, проведенному в [27], исходная система (15) была приведена к форме, позволяющей выделить медленно изменяющиеся и быстрые переменные типа быстро вращающихся фаз. В результате была получена система с двумя вращающимися фазами, изучение которой позволило определить соотношения частот колебаний по углам атаки и собственного вращения, которые приводят к появлению резонанса.

Резонансные соотношения частоты колебаний по углу атаки ω и средней частоты по углу собственного вращения λ для случаев «прямой» и «обратной» прецессий приведены в табл. 2, где также указаны виды инерционно-массовой асимметрии, вносящие вклад в данное соотношение. Итого, для случая «прямой» прецессии получено 19 соотношений частот, соответствующих резонансу, для случая «обратной» — 7 резонансных соотношений.

По сравнению со случаем CubeSat 1U–3U [27] у НС CubeSat 6U большее количество резонансных соотношений частот порождается исключительно формой наноспутника: для случая «прямой» прецессии 7 соотношений по сравнению с 5, для случая «обратной» — 3 соотношения по сравнению с 1. Кроме того, для соотношений частот $\lambda = \pm \frac{1}{4} \omega$ и $\lambda = \frac{3}{4} \omega$ добавилось влияние таких факторов, как \bar{J}_{yz} , Δ_i , что обусловлено наличием ненулевого коэффициента перед $\cos 2\varphi$ в разложении аэродинамического ускорения в ряд Фурье (10).

Резонансные соотношения частоты колебаний пространственного угла атаки и средней частоты собственного вращения

Соотношение частот $\lambda = k_{res} \omega$	Обуславливающий фактор	Соотношение частот $\lambda = k_{res} \omega$	Обуславливающий фактор
Для «прямой» прецессии		Для «прямой» и «обратной» прецессий	
$\lambda = 0$	Форма, $\bar{J}_{xy}, \bar{J}_{xz}, \bar{J}_{yz},$ $\Delta_i, \Delta y, \Delta z$	$\lambda = \frac{3}{5} \omega$	$\Delta y, \Delta z$
$\lambda = \pm \frac{1}{6} \omega$	\bar{J}_{yz}, Δ_i	$\lambda = \frac{2}{3} \omega$	$\Delta y, \Delta z$
$\lambda = \pm \frac{1}{5} \omega$	$\Delta y, \Delta z$	$\lambda = \frac{3}{4} \omega$	Форма, \bar{J}_{yz}, Δ_i
$\lambda = \pm \frac{1}{4} \omega$	Форма, \bar{J}_{yz}, Δ_i	$\lambda = \omega$	Форма, $\bar{J}_{xy}, \bar{J}_{xz}, \bar{J}_{yz},$ $\Delta_i, \Delta y, \Delta z$
$\lambda = \pm \frac{1}{3} \omega$	$\bar{J}_{yz}, \Delta_i, \Delta y, \Delta z$	$\lambda = \frac{3}{2} \omega$	Форма, \bar{J}_{yz}, Δ_i
$\lambda = \pm \frac{2}{5} \omega$	$\Delta y, \Delta z$	$\lambda = 2\omega$	$\bar{J}_{xy}, \bar{J}_{xz}, \bar{J}_{yz},$ $\Delta_i, \Delta y, \Delta z$
$\lambda = \frac{1}{2} \omega$	Форма, \bar{J}_{yz}, Δ_i	$\lambda = 3\omega$	$\bar{J}_{xy}, \bar{J}_{xz}, \bar{J}_{yz},$ $\Delta_i, \Delta y, \Delta z$

Выражения для определения критического значения продольной угловой скорости НС, при котором выполняются условия возникновения резонансного движения, имеют вид [27]

$$\omega_{xkr} = d \sqrt{\frac{\omega_a^2}{1 - \bar{J}_x + \frac{1}{4}(1 - d^2)\bar{J}_x^2}}, \quad (16)$$

где $\omega_a = \sqrt{-m_1(H)\Delta x m_{nk}}$; $d = 2k_{res} + 1 > 0$ — в случае «прямой» прецессии; $d = 2k_{res} - 1 > 0$ — в случае «обратной» прецессии; k_{res} — коэффициент, стоящий в резонансных соотношениях частот перед ω в табл. 2.

С использованием полученных в работе выражений были вычислены критические значения продольной угловой скорости НС CubeSat 6U и проведено численное моделирование с использованием полной модели движения, в которой учитывается влияние гравитационного момента и орбитальной угловой скорости. Для примера на рис. 3 показано резонансное изменение пространственного угла атаки НС CubeSat 6U с параметрами $l_x = 0,3$ м, $l_y = 0,1$ м, $l_z = 0,2$ м, $J_x = 0,025$ кг · м², $J_y = 0,065$ кг · м², $J_z = 0,05$ кг · м², $J_{xy} = J_{xz} = J_{yz} = 0$, $\Delta x = 0,05$ м, $\Delta y = \Delta z = 0$ при следующих начальных условиях движения: высота полета $H_0 = 309$ км, угол атаки $\alpha_0 = 20^\circ$, угол собственного вращения $\varphi_0 = 0$, угол прецессии $\psi_0 = 0$, компоненты угловой скорости $\omega_{x0} = 0,17$ град/с, $\omega_{y0} = 0,066$ град/с, $\omega_{z0} = 0,3$ град/с. В данном примере начальное движение соответствует «прямой» прецессии ($G > R$) и имеет место резонансное соотношение частот: $\lambda = -\omega / 3$. Данное резонансное изменение пространственного угла атаки возникает вследствие динамической несимметричности НС.

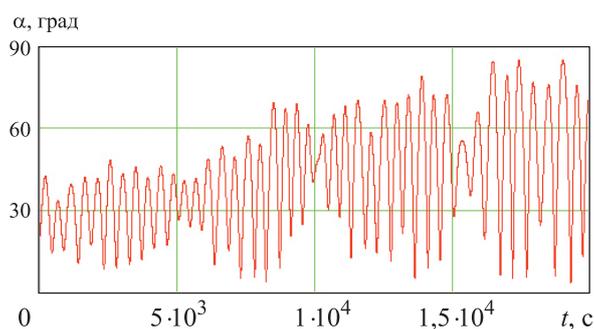


Рис. 3. Резонансное изменение пространственного угла атаки α в случае «прямой» прецессии (соотношение частот $\lambda = -\omega / 3$)

Зависимости критических значений продольной угловой скорости для случаев «прямой» и «обратной» прецессий соответственно, рассчитанные по соотношению (16), приведены на рис. 4 и 5.

Для предотвращения резонансных режимов движения, обусловленных инерционно-массовой асимметрией, рекомендуется максимально уменьшать данную асимметрию на этапе компоновки. Однако полностью убрать инерционно-массовую асимметрию НС не представляется возможным, в том числе ввиду неточности ее определения. Кроме того, НС формата CubeSat 6U практически нельзя изготовить динамически симметричным из-за различного расстояния от боковых граней до продольной оси. Часть резонансных соотношений частот также обусловлена только формой аппарата. Поэтому, для того чтобы

устранить возникновение резонансных режимов движения, предлагается задавать ограничения на величину продольной угловой скорости при отделении от пускового устройства и предусмотреть включение системы стабилизации с целью рассогласования резонансного соотношения частот.

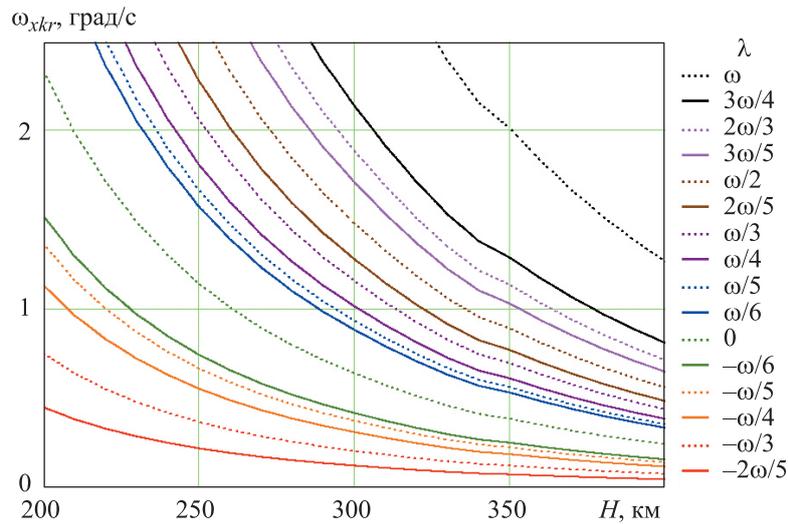


Рис. 4. Зависимости критических значений продольной угловой скорости ω от высоты H в случае «прямой» прецессии ($G > R$) при разном соотношении частот λ и ω

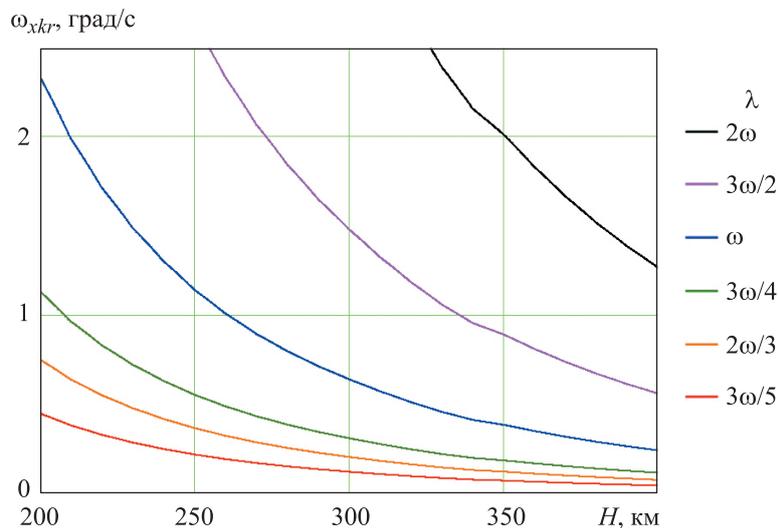


Рис. 5. Зависимости критических значений продольной угловой скорости ω от высоты H в случае «обратной» прецессии ($R > G$) при разном соотношении частот λ и ω

Заключение. В работе проведено исследование динамики наноспутников относительно центра масс при движении на низкой круговой орбите под действием аэродинамического и гравитационного моментов с учетом особенностей, обусловленных форматом CubeSat 6U. Получена система уравнений для определения положений равновесия, а также аналитические выражения для частного случая трех разных главных моментов инерции при смещении центра давления от центра масс по одной из главных осей инерции.

Выполнен анализ возможности возникновения резонансных режимов движения по углу атаки аэродинамически стабилизированных НС формата CubeSat 6U. Выведены соотношения для определения критических значений продольной угловой скорости НС, при которых выполняются условия возникновения резонансных режимов движения. Проверочные расчеты по пространственной модели движения НС относительно центра масс подтвердили правильность полученных результатов. Даны рекомендации по предотвращению возможности возникновения резонансных режимов движения.

Приведенные в работе результаты могут быть полезны разработчикам малоразмерных космических аппаратов формата CubeSat 6U, которые в настоящее время продолжают становиться все популярнее.

*Исследование выполнено за счет гранта Российского
научного фонда № 23-67-10007, <https://rscf.ru/project/23-67-10007/>*

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Puig-Suari J., Turner C., Twigg R.J. CubeSat: The development and launch support infrastructure for eighteen different satellite customers on one launch. In: *15th AIAA/USU Conference on Small Satellites*, 2001.
- [2] Puig-Suari J., Coelho R., Williams S. *CubeSat design specification. Rev. 14.1, CubeSat program*, Cal. Poly SLO, 2022.
- [3] *Nanosats Database*. URL: <https://www.nanosats.eu/> (дата обращения: 11.02.2023).
- [4] Selva D., Krejci D. A survey and assessment of the capabilities of CubeSats for Earth observation. *Acta Astronautica*, 2012, vol. 74, pp. 50–68.
- [5] Симаков С.П., Устюгов Е.В. Определение взаимного положения и ориентации наноспутников по анализу видеоизображений. *Вестник Самарского университета. Аэрокосмическая техника, технологии и машиностроение*, 2016, т. 15, № 1, с. 122–131.
- [6] Zharkikh R.N., Purikov A.V., Kuznetsov V.V., Shubin M.I., Svinareva A.M., Eletskaia L.L. Construction of wide-purpose space complexes based on the SXC6 platform. *AIP Conference Proceedings*, 2021, vol. 2318.
- [7] Kim G.-N., Park S.-Y., Lee T., Kang D.-E., Jeon S., Son J., Kim N., Park Y.-K., Song Y. Development of CubeSat systems in formation flying for the solar science demonstration: The CANYVAL-C mission. *Advances in Space Research*, 2021, vol. 68, pp. 4434–4455.

- [8] Fitzpatrick D.J., Palo S.E. Innovative systems engineering solutions for power-positive operations: navigating the multi-constraint challenges of the SWARM-EX CubeSat mission. *Advances in Space Research*, 2024. Available online 26 June 2024. <https://doi.org/10.1016/j.asr.2024.06.057>
- [9] Chernyshov A.A., Chugunin D.V., Mogilevsky M.M., Petrukovich A.A. Studies of the ionosphere using radiophysical methods on ultra-small spacecrafts. *Acta Astronautica*, 2020, vol. 167, pp. 455–459.
- [10] Бабанина О.В., Гасанбеков К.Н., Прохоренко И.С. Двигательная установка коррекции для наноспутников на фреоне. *Вестник Московского авиационного института*, 2023, т. 30, № 3, с. 136–146.
- [11] Синецын Л.И., Белоконов И.В. Влияние производственных отклонений изготовления электротермической двигательной установки на точность маневрирования наноспутника. *Вестник Самарского университета. Аэрокосмическая техника, технологии и машиностроение*, 2021, т. 20, № 1, с. 29–45.
- [12] Poghosyan A., Golkar A. CubeSat evolution: Analyzing CubeSat capabilities for conducting science missions. *Progress in Aerospace Sciences*, 2017, vol. 88, pp. 59–83.
- [13] He L., Chen X., Kumar K. D., Sheng T., Yue C. et. al. A novel three-axis attitude stabilization method using in-plane internal mass-shifting. *Aerospace Science and Technology*, 2019, vol. 92, pp. 489–500.
- [14] Chesi S., Gong Q., Romano M. Aerodynamic three-axis attitude stabilization of a spacecraft by center-of-mass shifting. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 2017, vol. 40, no. 7, pp. 1613–1626.
- [15] Rawashdeh S.A. Attitude analysis of small satellites using model-based simulation. *International Journal of Aerospace Engineering*, 2019, vol. 2019, article ID 3020581, 11 p.
- [16] Psiaki M.L. Nanosatellite attitude stabilization using passive aerodynamics and active magnetic torqueing. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 2004, vol. 27, no. 3, pp. 347–355.
- [17] Белоконов И.В., Тимбай И.А., Барина Е.В. Выбор проектных параметров наноспутника формата CubeSat с пассивной системой стабилизации. *Гирокоспия и навигация*, 2020, т. 28, № 1, с. 81–100.
- [18] Белецкий В.В. *Движение искусственного спутника относительно центра масс*. Москва, Наука, 1965, 416 с.
- [19] Сарычев В.А., Овчинников М.Ю. Динамика спутника с пассивной аэродинамической системой ориентации. *Космические исследования*, 1994, т. 32, № 6, с. 561–575.
- [20] Сарычев В.А., Гутник С.А. Динамика спутника под действием гравитационного и аэродинамического моментов. Исследование устойчивости положений равновесия. *Космические исследования*, 2016, т. 54, № 5, с. 415–426.
- [21] Барина Е.В., Тимбай И.А. Положения относительного равновесия динамически симметричного наноспутника формата CubeSat под действием гравитационного и аэродинамического моментов. *Вестник Самарского университета. Аэрокосмическая техника, технологии и машиностроение*, 2019, т. 18, № 2, с. 21–32.
- [22] Barinova E.V., Timbai I.A. Determining of equilibrium positions of CubeSat nanosatellite under the influence of aerodynamic and gravitational moments. In: *27th Saint Petersburg International Conference on Integrated Navigation Systems. ICINS 2020*. Proceedings, 2020. DOI: 10.23919/ICINS43215.2020.9133842
- [23] Ярошевский В.А. *Движение неуправляемого тела в атмосфере*. Москва, Машиностроение, 1978.

- [24] Aslanov V.S., Boiko V.V. Nonlinear resonant motion of an asymmetrical spacecraft in the atmosphere. *Космические исследования*, 1985, т. 23, № 3, с. 408–415.
- [25] Заболотнов Ю.М., Любимов В.В. Применение метода интегральных многообразий для построения резонансных кривых в задаче входа КА в атмосферу. *Космические исследования*, 2003, т. 41, № 5, с. 481–487.
- [26] Белоконов И.В., Тимбай И.А., Николаев П.Н. Анализ и синтез движения аэродинамически стабилизированных космических аппаратов нанокласса формата CubeSat. *Гироскопия и навигация*, 2018, т. 26, № 3 (102), с. 69–91.
- [27] Барина Е.В., Белоконов И.В., Тимбай И.А. Предотвращение возникновения резонансных режимов движения для низковысотных спутников класса CUBESAT. *Гироскопия и навигация*, 2021, т. 29, № 4, с. 1–19.
- [28] Barinova E.V., Belokonov I.V., Timbai I.A. Motion features of aerodynamically stabilized Cubesat 6U nanosatellites. In: *29th Saint Petersburg International Conference on Integrated Navigation Systems. ICINS 2022. Proceedings*, 2022. DOI: 10.23919/ICINS51784.2022.9815390
- [29] Асланов В.С. *Пространственное движение тела при спуске в атмосфере*. Москва, Физматлит, 2004.
- [30] Гантмахер Ф.Р. *Лекции по аналитической механике*. Москва, Наука, 1966.
- [31] Platus D.H. Dispersion of spinning missiles due to lift non-averaging. *AIAA J.*, 1977, vol. 15, no. 7, pp. 909–915.

Статья поступила в редакцию 25.10.2024

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Барина Е.В., Белоконов И.В., Тимбай И.А. Исследование неуправляемого движения относительно центра масс наноспутников формата CubeSat 6U под действием аэродинамического и гравитационного моментов. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2025, вып. 1. EDN ХНСТРЕ

Барина Елена Витальевна — канд. техн. наук, доцент межвузовской кафедры космических исследований, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева. e-mail: barinova.ev@ssau.ru

Белоконов Игорь Витальевич — д-р техн. наук, профессор, заведующий межвузовской кафедрой космических исследований, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева. e-mail: ibelokonov@mail.ru

Тимбай Иван Александрович — д-р техн. наук, профессор, профессор межвузовской кафедры космических исследований, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева. e-mail: timbai@mail.ru

Studying the CubeSat 6U nanosatellites uncontrolled motion relative to the center of mass under the influence of aerodynamic and gravitational moments

© E.V. Barinova, I.V. Belokonov, I.A. Timbai

Samara National Research University named after Academician S.P. Korolev,
Samara, 443086, Russian Federation

The paper presents results of studying the CubeSat 6U nanosatellites passive motion dynamics relative to the center of mass taking into account features of the mathematical model of the aerodynamic frontal drag force when moving in a low circular orbit. A system of equations is obtained to determine the nanosatellite equilibrium positions in the orbital coordinate system exposed to aerodynamic and gravitational moments. For a special case of the center of mass displacement from the nanosatellite geometric center along the longitudinal axis, an analytical solution to this system of equations is found. In addition, the paper shows a possibility of the resonant motion modes when using aerodynamic stabilization along the velocity vector. Relationships are obtained to determine critical values of the nanosatellite longitudinal angular velocity, where conditions for the resonant motion modes are met, and recommendations are provided for their prevention.

Keywords: *CubeSat 6U nanosatellite, angular motion, spatial angle of attack, resonant motion modes, equilibrium positions, nanosatellite passive motion, mass-inertial asymmetry*

*The study was supported by the Russian Science Foundation Grant no. 23-67-10007,
<https://rscf.ru/project/23-67-10007/>*

REFERENCES

- [1] Puig-Suari J., Turner C., Twigg R. J. CubeSat: The development and launch support infrastructure for eighteen different satellite customers on one launch. In: *15th AIAA/USU Conference on Small Satellites*, 2001.
- [2] Puig-Suari J., Coelho R., Williams S. *CubeSat design specification Rev. 14.1, CubeSat program*. Cal. Poly SLO, 2022.
- [3] *Nanosats Database*. Available at: <https://www.nanosats.eu/> (accessed February 11, 2023).
- [4] Selva D., Krejci D. A survey and assessment of the capabilities of CubeSats for Earth observation. *Acta Astronautica*, 2012, vol. 74, pp. 50–68.
- [5] Simakov S.P., Ustyugov E.V. Opredelenie vzaimnogo polozheniya i orientatsii nanospjutnikov po analizu videoizobrazheniy [Determination of relative position and orientation of nanosatellites by video image analysis]. *Vestnik Samarskogo universiteta. Aerokosmicheskaya tekhnika, tekhnologii i mashinostroenie — Vestnik of Samara University. Aerospace and Mechanical Engineering*, 2016, vol. 15, no. 1, pp. 122–131.
- [6] Zharkikh R.N., Purikov A.V., Kuznetsov V.V., Shubin M.I., Svinareva A.M., Eletskaia L.L. Construction of wide-purpose space complexes based on the SXC6 platform. *AIP Conference Proceedings*, 2021, vol. 2318.
- [7] Kim G.-N., Park S.-Y., Lee T., Kang D.-E., Jeon S., Son J., Kim N., Park Y.-K., Song Y. Development of CubeSat systems in formation flying for the solar science demonstration: The CANYVAL-C mission. *Advances in Space Research*, 2021, vol. 68, pp. 4434–4455.

- [8] Fitzpatrick D.J., Palo S.E. Innovative systems engineering solutions for power-positive operations: navigating the multi-constraint challenges of the SWARM-EX CubeSat mission. *Advances in Space Research*, 2024. Available online 26 June 2024.
- [9] Chernyshov A.A., Chugunin D.V., Mogilevsky M.M., Petrukovich A.A. Studies of the ionosphere using radiophysical methods on ultra-small spacecrafts. *Acta Astronautica*, 2020, vol. 167, pp. 455–459.
- [10] Babanina O.V., Gasanbekov K.N., Prokhorenko I.S. Dvigatel'naya ustanovka korrektsii dlya nanosputnikov na freone [Correcting propulsion system for freon running nano-satellites]. *Vestnik Moskovskogo aviatsionnogo instituta — Aerospace MAI Journal*, 2023, vol. 30, no. 3, pp. 136–146.
- [11] Sinitsyn L.I., Belokonov I.V. Vliyanie proizvodstvennykh otkloneniy elektrotermicheskoy dvigatel'noy ustanovki na tochnost manevrirovaniya nanosputnika [Influence of deviations in manufacturing of electrothermal propulsion system on nanosatellite maneuvering accuracy]. *Vestnik Samarskogo universiteta. Aero-kosmicheskaya tekhnika, tekhnologii i mashinostroenie — Vestnik of Samara University. Aerospace and Mechanical Engineering*, 2021, vol. 20, no. 1, pp. 29–45.
- [12] Poghosyan A., Golkar A. CubeSat evolution: analyzing CubeSat capabilities for conducting science missions. *Progress in Aerospace Sciences*, 2017, vol. 88, pp. 59–83.
- [13] He L., Chen X., Kumar K. D., Sheng T., Yue C. et. al. A novel three-axis attitude stabilization method using in-plane internal mass-shifting. *Aerospace Science and Technology*, 2019, vol. 92, pp. 489–500.
- [14] Chesi S., Gong Q., Romano M. Aerodynamic three-axis attitude stabilization of a spacecraft by center-of-mass shifting. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 2017, vol. 40, no. 7, pp. 1613–1626.
- [15] Rawashdeh S.A. Attitude analysis of small satellites using model-based simulation. *International Journal of Aerospace Engineering*, 2019, vol. 2019, article ID 3020581, 11 p.
- [16] Psiaki M.L. Nanosatellite attitude stabilization using passive aerodynamics and active magnetic torqueing. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 2004, vol. 27, no. 3, pp. 347–355.
- [17] Belokonov I.V., Timbai I.A., Barinova E.V. Vybora proektnykh parametrov nanosputnika formata CubeSat s passivnoy sistemoy stabilizatsii [Design parameters selection for CubeSat nanosatellite with a passive stabilization system]. *Giroskopiya i navigatsiya — Gyroscopy and Navigation*, 2020, vol. 11, no. 2, pp. 149–161.
- [18] Beletskiy V.V. *Dvizhenie iskusstvennogo sputnika otnositelno tsentra mass* [Artificial satellite motion relative to the center of mass]. Moscow, Nauka Publ., 1965, 416 p.
- [19] Sarychev V.A., Ovchinnikov M.Yu. Dinamika sputnika s passivnoy aerodinamicheskoy sistemoy orientatsii [Dynamics of a satellite with the passive aerodynamic orientation system]. *Kosmicheskie issledovaniya — Cosmic Research*, 1994, vol. 32, no. 6, pp. 561–575.
- [20] Sarychev V.A., Gutnik S.A. Dinamika sputnika pod deystviem gravitatsionnogo i aerodinamicheskikh momentov. Issledovanie ustoychivosti polozheniy ravnovesiya [Dynamics of satellite subject to gravitational and aerodynamic torques. Investigation of equilibria]. *Kosmicheskie issledovaniya — Cosmic Research*, 2016, vol. 54, no. 5, pp. 415–426.
- [21] Barinova E.V., Timbai I.A. Polozhenie otnositelnogo ravnovesiya dinamicheskoi simmetrichnogo nanosputnika formata CubeSat pod deystviem gravitatsionnogo i

- aerodinamicheskogo momentov [Relative equilibria of dynamically symmetric CubeSat nanosatellite under the action of aerodynamic and gravitational torques]. *Vestnik Samarskogo universiteta. Aerokosmicheskaya tekhnika, tekhnologii i mashinostroenie — Vestnik of Samara University. Aerospace and Mechanical Engineering*, 2019, vol. 18, no. 2, pp. 21–32.
- [22] Barinova E.V., Timbai I.A. Determining of equilibrium positions of CubeSat nanosatellite under the influence of aerodynamic and gravitational moments. In: *27th Saint Petersburg International Conference on Integrated Navigation Systems, ICINS 2020*. Proceedings, 2020. <https://doi.org/10.23919/ICINS43215.2020.9133842>
- [23] Yaroshevsky V.A. *Dvizhenie neupravlyaemogo tela v atmosfere* [Motion of an uncontrolled body in the atmosphere]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1978.
- [24] Aslanov V.S., Boiko V.V. Nonlinear resonant motion of an asymmetrical spacecraft in the atmosphere. *Kosmicheskie issledovaniya — Cosmic Research*, 1985, vol. 23, no. 3, pp. 408–415.
- [25] Zabolotnov Yu.M., Lyubimov V.V. Primenenie metoda integraknykh mnogoobrazii dlya postroyeniya rezonansnykh krivykh v zadache vkhoda KA v atmosferu [Application of the integral manifold methods in construction of the resonant curves for the problem of spacecraft entry into the atmosphere]. *Kosmicheskie issledovaniya — Cosmic Research*, 2003, vol. 41, no. 5, pp. 481–487.
- [26] Belokonov I.V., Timbai I.A., Nikolaev P.N. Analiz i sintez dvizheniya aerodinamicheski stabilizirovannykh kosmicheskikh apparatov nanoklassa formata CubeSat [Analysis and Synthesis of Motion of Aerodynamically Stabilized Nanosatellites of the CubeSat Design]. *Girokopiya i navigatsiya — Gyroscopy and Navigation*, 2018, vol. 26, no. 3 (102), pp. 69–91.
- [27] Barinova E.V., Belokonov I.V., Timbai I.A. Predotvrashchenie vozmozhnosti vozniknoveniya rezonansnykh rezhimov dvizheniya dlya nizkovysotnykh sputnikov klassa CubeSat [Preventing resonant motion modes for low-altitude CubeSat nanosatellites]. *Girokopiya i navigatsiya — Gyroscopy and Navigation*, 2021, vol. 12, no. 4, pp. 1–19.
- [28] Barinova E.V., Belokonov I.V., Timbai I.A. Motion features of aerodynamically stabilized Cubesat 6U nanosatellites. In: *29th Saint Petersburg International Conference on Integrated Navigation Systems, ICINS 2022*. Proceedings, 2022. <https://doi.org/10.23919/ICINS51784.2022.9815390>
- [29] Aslanov V.S. *Prostranstvennoe dvizhenie tela pri spuske v atmosfere* [Spatial motion of a body during descent in the atmosphere]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2004.
- [30] Gantmakher F.R. *Leksii po analiticheskoy mekhanike* [Lectures on analytical mechanics]. Moscow, Nauka Publ., 1966.
- [31] Platus D.H. Dispersion of spinning missiles due to lift non-averaging. *AIAA J.*, 1977, vol. 15, no. 7, pp. 909–915.

Barinova E.V., Cand. Sc. (Eng.), Associate Professor, Inter-University Department of Space Research, Samara National Research University named after Academician S.P. Korolev. e-mail: barinova.ev@ssau.ru

Belokonov I.V., Dr. Sc. (Eng.), Professor, Head of the Inter-University Department of Space Research, Samara National Research University named after Academician S.P. Korolev. e-mail: ibelokonov@mail.ru

Timbai I.A., Dr. Sc. (Eng.), Professor, Professor of the Inter-University Department of Space Research, Samara National Research University named after Academician S.P. Korolev. e-mail: timbai@mail.ru