

Численное моделирование нелинейного деформирования промышленных мембран

© С.А. Подкопаев, С.С. Гаврюшин

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Российская Федерация

Изложены теоретические основы нелинейного деформирования тонких осесимметричных оболочек. Рассмотрены эксплуатационные характеристики мембран в различных коммутационных устройствах, клапанах и датчиках давления. Проанализированы и обобщены существующие подходы с целью выбора рациональных расчетных моделей промышленных мембран. Представлен разработанный алгоритм нелинейного анализа и синтеза конструкций исполнительных элементов на основе выбранной расчетной модели. Рассмотрены типы нелинейного поведения закритического поведения мембран, а также математическая модель для описания процесса нелинейного деформирования осесимметричных оболочек, метод дискретного продолжения по параметру и прием «смены подпространства управляющих параметров». На примере шарнирно-опертой сферической оболочки исследовано закритическое поведение. Выбрана рациональная математическая модель для описания нелинейного деформирования хлопающих симметричных оболочек. Реализована разработанная методика для решения практических задач создания новых и улучшения существующих конструкций промышленных мембран. Разработан и реализован в виде авторской программы численный алгоритм исследования процессов нелинейного деформирования многопараметрических систем.

Ключевые слова: нелинейное деформирование, тонкостенная осесимметричная оболочка, мембрана, закритическое поведение, дискретное переключение, продолжение по параметру, смена подпространства параметров

Введение. Разнообразные элементы конструкций и технических устройств, выполненные в форме осесимметричных оболочек (мембран), широко используются в различных отраслях в качестве предохранителей, переключателей и термореле для защиты от перегрузок электроизделий промышленного назначения и бытовой техники, а также в микро-оптоэлектромеханических системах.

Известные аналитические методики для анализа тонкостенных оболочечных конструкций не позволяют в полной мере и с требуемой точностью учесть все особенности процесса нелинейного деформирования современных элементов устройств [1–4]. Недостаточно исследовать процесс деформирования только в докритической области или рассматривать задачу в линейной постановке [5]. Процесс деформирования указанных выше элементов является существенно нелинейным, зависящим от многих параметров, в связи с чем решение, как правило, оказывается многозначным и чувствительным к малым возмущениям [6–8]. Для расчета и проектирования подобных элементов требуется создать уточненные методики с использованием подходов многокритериальной

оптимизации, поэтому необходимо перейти от решения задач анализа к решению задач синтеза рациональных конструкций [9–12].

В настоящее время вследствие цифровой промышленной революции (Индустрия 4.0) широкое распространение получили различные коммутационные устройства, предохранители и клапаны, элементы которых представляют собой тонкостенную осесимметричную оболочку, иначе мембрану (рис. 1, *a*), под действием внешней нагрузки скачкообразно изменяющую свой прогиб. Данный способ потери устойчивости, не сопровождающийся разрушением оболочки, можно называть прощелкиванием [12, 14–18].

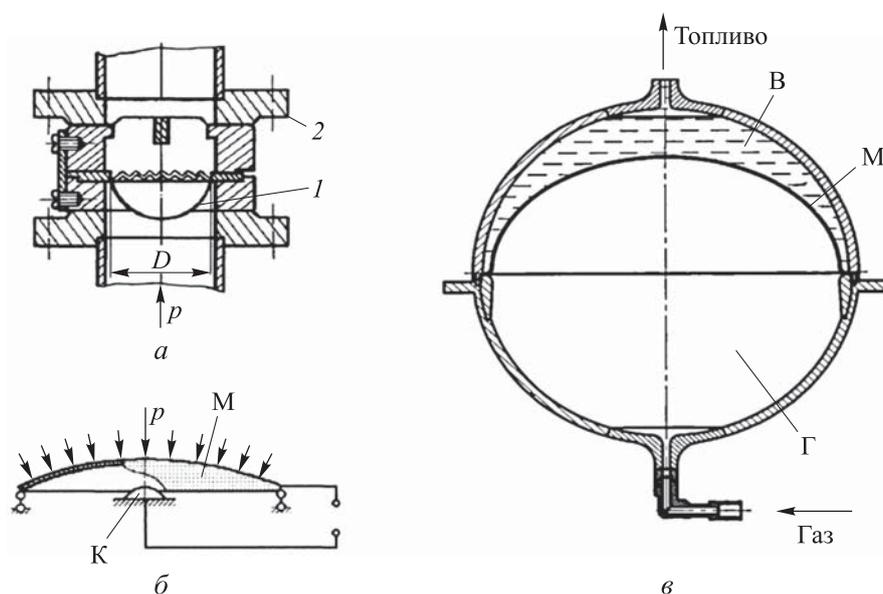


Рис. 1. Примеры промышленных мембран:

a — клапан (1 — мембрана; 2 — корпус); *б* — коммутационное устройство — кнопка (М — мембрана; К — контакт); *в* — топливный бак (В — топливо; Г — газ; М — вытесняющая мембрана)

Цель работы — решение прикладной научно-технической задачи расчета и проектирования промышленных мембран, применяемых в конструкциях различных устройств, а также улучшение их качеств и потребительских свойств.

Эксплуатационные характеристики мембран в виде оболочек. Мембраны этой формы применяют в клапанах, сигнализаторах и датчиках давления (рис. 1, *a*), различных коммутационных устройствах (рис. 1, *б*), а также в виде осесимметричной оболочки как вытеснительной мембраны (рис. 1, *в*) в конструкции топливных баков.

Главное эксплуатационное свойство мембраны (рис. 2, *a*) — упругая характеристика, отражающая зависимость между перемещением контрольной точки мембраны и изменением внешней нагрузки (рис. 2, *б*) [2, 12, 14, 15, 19].

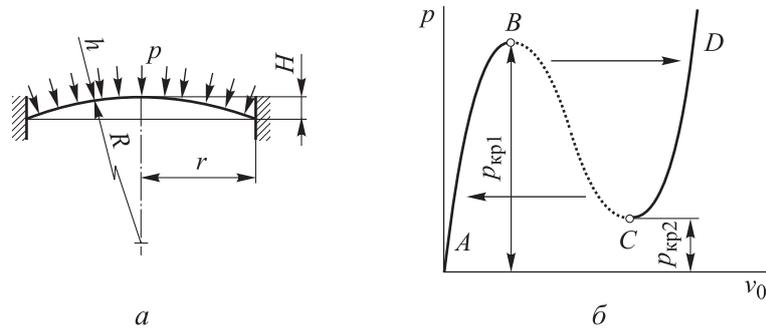


Рис. 2. Расчетная схема мембраны (а) и график ее упругой характеристики (б): R — радиус кривизны оболочки; p — текущее давление; H — высота мембраны; r — радиус мембраны; h — толщина мембраны

Показанные на рис. 2, б кривые графика AB , CD — устойчивые участки упругой характеристики мембраны. Под действием внешней нагрузки при достижении первой экстремальной точки (экстремума) B , соответствующей величине критического давления $p_{кр1}$, мембрана, минуя неустойчивый участок графика BC , скачкообразно меняет прогиб, и процесс деформирования продолжится на участке CD упругой характеристики. При снижении (снятии) внешней нагрузки с оболочки будет происходить обратное скачкообразное изменение прогиба, соответствующее второму критическому давлению $p_{кр2}$. Следует отметить, что после первоначальной нагрузки (первого скачка) напряжения в мембране будут оставаться упругими.

В процессе эксплуатации из-за геометрических несовершенств и неточного осесимметричного нагружения оболочка при значениях внешнего давления, отличных от $p_{кр1}$ и $p_{кр2}$, будет прощелкивать, т. е. как бы издавать хлопок. Такое давление будет обозначено $p_{хл}$, его значение находится в диапазоне от $p_{кр1}$ до $p_{кр2}$.

Исследование закритического поведения мембран. Можно выделить два основных подхода к исследованию закритического поведения нелинейных механических систем.

Первый подход — классический, заключающийся в нахождении критических значений величины внешней нагрузки, при которых существуют смежные формы равновесия конструкции [1–3, 5, 20, 21].

Второй подход — непосредственное построение самой поверхности равновесных состояний в пространстве параметров системы, при котором появляется возможность детально исследовать закритическое поведение оболочки, зачастую характеризующее эксплуатационные свойства упругого элемента [6, 7, 9–12, 14, 22, 23]. Поэтому для рассмотрения и был выбран многопараметрический подход к исследова-

нию закритического нелинейного процесса деформирования прохлывающих оболочек (мембран), основанный на том, что конкретная задача «погружается» в многопараметрическое семейство подобных задач. Такой подход служит удобным инструментом для проектирования и технических конструкций, поскольку позволяет получить решение не одной частной задачи, а сразу целого семейства задач прохлывающих мембран с учетом внешних параметров системы.

Для построения поверхности равновесных состояний мембраны был использован дискретный метод продолжения по параметру одновременно с приемом «смены подпространства управляющих параметров». Иными словами, сложную многопараметрическую задачу можно рассматривать как множество однопараметрических задач, каждая из которых имеет свой дискретно изменяющийся параметр. Для перехода между однопараметрическими задачами был использован прием «смены подпространства управляющих параметров» [6, 7, 9, 10, 12, 14].

Задача исследования закритического поведения оболочки фактически сводится к анализу поверхности равновесных состояний. При некоторых значениях параметров системы может наблюдаться многозначность решений, наличие изолированных решений и особых точек. Особенность данного подхода заключается в том, что вместо решения бифуркационной задачи предлагается численно исследовать графики перестроек решения при переходе через особую точку [6, 7, 12, 14]. Для построения такого графика и обхода окрестностей бифуркационных точек применяется прием «смены подпространства внешних параметров».

Использование метода конечных элементов (МКЭ) при исследовании закритического поведения оболочек связано с рядом трудностей, так как отсутствует возможность движения по параметрам геометрии, по толщине или по радиусу кривизны. Иными словами, варьирование любых геометрических параметров конструкции повлечет многократное перестроение конечно-элементной сетки, для чего, в свою очередь, потребуются значительные вычислительные мощности. В частности, с помощью МКЭ невозможно отыскать изолированные решения на кривой равновесных состояний, а также смоделировать процесс зарождения на упругой характеристике так называемых петель [6, 7].

Математическая модель для описания процесса нелинейного деформирования осесимметричных оболочек. Для создания этой модели были приняты соотношения теории тонких осесимметричных оболочек, модернизированные для последующего применения в численном алгоритме. При описании геометрии мембраны (оболочки вращения) в качестве отсчетной поверхности была использована ее

срединная поверхность (рис. 3, *a*). Точка B_0 на этой поверхности характеризуется двумя координатами: углом φ_0 , определяющим положение меридионального сечения, и дуговой координатой S_0 , направленной вдоль меридиана. При осесимметричной деформации все меридиональные сечения оболочки равноправны и, следовательно, существенной является только координата S_0 .

Была принята декартова система координат X, Y , в которой ось X направлена по радиусу оболочки, а ось Y совпадает с осью вращения оболочки. Геометрия меридионального сечения мембраны, т. е. осесимметричной оболочки (рис. 3, *б*), в исходном недеформированном состоянии была задана в параметрическом виде

$$X_0 = X_0(S_0), Y_0 = Y_0(S_0), \quad (1)$$

где X_0, Y_0 — декартовы координаты текущей точки меридиана до деформирования; S_0 — независимая координата, которая отсчитывается от предварительно зафиксированной точки меридиана A_0 до текущей точки B_0 меридиана (см. рис. 3, *a*).

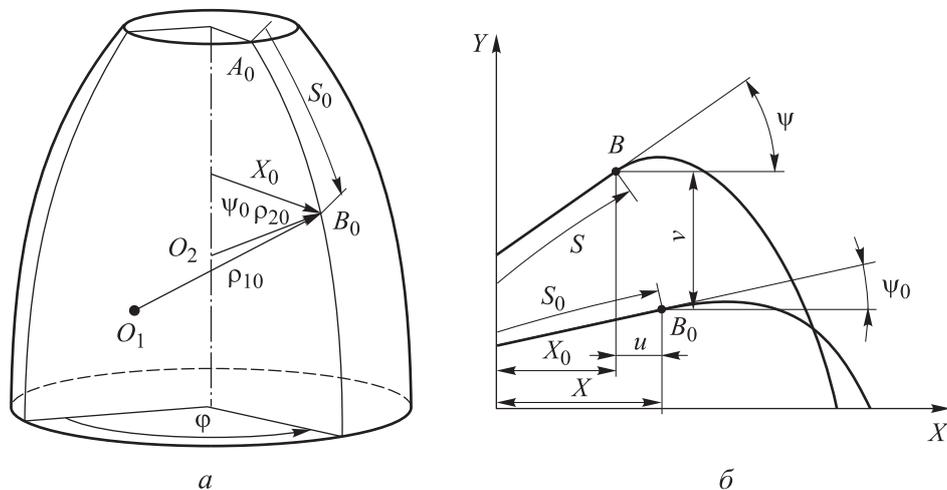


Рис. 3. Схема к выводу основных соотношений осесимметричной оболочки:

O_1 — начало текущей точки; O_2 — текущая точка после приложения давления; ρ_{10} — радиус кривизны для O_1 ; ρ_{20} — радиус кривизны для O_2 ; u — перемещение точки B по оси X ; v — перемещение точки B по оси Y ; φ — угол поворота нормами

Текущий угол наклона касательной к меридиану в недеформированном состоянии обозначим Ψ_0 и запишем геометрические соотношения

$$\frac{dX_0}{dS_0} = \cos \psi_0, \quad \frac{dY_0}{dS_0} = \sin \psi_0. \quad (2)$$

Параметры, относящиеся к недеформированному состоянию, будут обозначаться с использованием нижнего индекса «0».

После деформации точка B_0 , принадлежащая срединной поверхности оболочки, переместится в новое пространственное положение B , характеризующееся координатами X , Y и S (см. рис. 3, б). Тогда геометрические соотношения для деформированного состояния запишутся в виде

$$\frac{dX}{dS} = \cos \psi, \quad \frac{dY}{dS} = \sin \psi. \quad (3)$$

Перемещения u по оси X и перемещения v по оси Y точки B и угол поворота нормали φ определяются следующими соотношениями:

$$u = X - X_0, \quad v = Y - Y_0, \quad \varphi = \psi - \psi_0. \quad (4)$$

Для обозначения величин, соответствующих меридиональному и окружному направлениям, используется нижний индекс «1» и «2» соответственно.

Выражения для главных радиусов кривизны в исходном и деформированном состояниях оболочки имеют вид

$$\frac{1}{\rho_{10}} = \frac{d\psi_0}{dS_0}, \quad \frac{1}{\rho_1} = \frac{d\psi}{dS}, \quad \frac{1}{\rho_{20}} = \frac{\sin \psi_0}{X_0}, \quad \frac{1}{\rho_2} = \frac{\sin \psi}{X}. \quad (5)$$

Обозначим полные изменения главных кривизн следующим образом:

$$\kappa_1 = \frac{d\psi}{dS} - \frac{d\psi_0}{dS_0}; \quad \kappa_2 = \frac{\sin \psi}{X} - \frac{\sin \psi_0}{X_0}. \quad (6)$$

Полное изменение кривизны в меридиональном направлении складывается из изменения кривизн вследствие поворота нормали (изгиба) и удлинения меридиана:

$$\zeta_{compl} = \zeta_{bend} + \zeta_{geom}.$$

Тогда

$$\zeta_{bend} = \zeta_{compl} - \zeta_{geom} = \left(\frac{d\psi}{dS} - \frac{d\psi_0}{dS_0} \right) - \left(\frac{d\psi_0}{dS} - \frac{d\psi_0}{dS_0} \right) = \frac{d\psi}{dS} - \frac{d\psi_0}{dS}. \quad (7)$$

Введем следующее обозначение изменения кривизны в меридиональном направлении:

$$\kappa_{10} = \frac{d\psi}{dS} - \frac{d\psi_0}{dS}. \quad (8)$$

Аналогично представим выражение изменения кривизны в окружном направлении:

$$\kappa_{20} = \frac{\sin \psi}{X} - \frac{\sin \psi_0}{X}. \quad (9)$$

Линейная деформация элемента срединной поверхности имеет вид:

для текущего состояния в меридиональном направлении —

$$\varepsilon_{10} = \frac{dS - dS_0}{dS_0}, \quad (10)$$

в окружном направлении —

$$\varepsilon_{20} = \frac{(X_0 + u)\varphi - X_0\varphi}{X_0\varphi} = \frac{u}{X_0}. \quad (11)$$

Преобразуем выражение (8) следующим образом:

$$\kappa_{10} = \frac{1}{(1 + \varepsilon_{10})} \left(\frac{d\psi}{dS_0} - \frac{d\psi_0}{dS_0} \right). \quad (12)$$

Используя соотношения (1)–(4), (10), (12), получим геометрические соотношения уравнений осесимметричной тонкостенной оболочки:

$$\begin{cases} \frac{du}{dS_0} = (1 + \varepsilon_{10}) \cos \psi - \cos \psi_0; \\ \frac{dv}{dS_0} = (1 + \varepsilon_{10}) \sin \psi - \sin \psi_0; \\ \frac{d\psi}{dS_0} = (1 + \varepsilon_{10}) \kappa_{10} + \frac{d\psi_0}{dS_0}. \end{cases} \quad (13)$$

Напряжено-деформированное состояние осесимметричной оболочки. Эквидистантная поверхность — поверхность, равноудаленная от срединной поверхности на расстояние ξ_0 , которое отсчитывается по направлению внешней нормали к недеформированной срединной поверхности. Причем нормальная координата ξ_0 текущей материальной точки изменяется в пределах

$$-\frac{h(S_0)}{2} \leq \xi \leq \frac{h(S_0)}{2}, \quad (14)$$

где $h(S_0)$ — толщина оболочки, в общем случае зависящая от дуговой координаты S_0 .

Если учитывать предположение о тонкостенности оболочки, то получим

$$\max [h(S_0)] \ll \min (|\rho_{10}|, |\rho_{20}|). \quad (15)$$

Примем кинематическую гипотезу Кирхгофа — Лява, в соответствии с которой материальный отрезок, нормальный к срединной поверхности оболочки до деформации и после нее, остается нормальным к срединной поверхности деформированной оболочки, причем длина этого отрезка не изменяется: $\xi_0 = \xi$. Тогда для линейных деформаций произвольного элемента в малой окрестности точки с координатами S_0 и ξ_0 справедливы соотношения:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{1\xi}(S_0, \xi_0) &= \varepsilon_{10}(S_0) + \xi_0 \kappa_{10}(S_0), \\ \varepsilon_{2\xi}(S_0, \xi_0) &= \varepsilon_{20}(S_0) + \xi_0 \kappa_{20}(S_0). \end{aligned} \quad (16)$$

Из анализа выражений (16) следует, что имеет место линейное распределение деформаций по толщине оболочки и что деформация эквидистантной поверхности будет полностью определена, если будут известны мембранные и изгибные деформации срединной поверхности.

Примем статическую гипотезу Кирхгофа — Лява, согласно которой можно пренебречь нормальными напряжениями σ_3 , действующими на площадках, параллельных срединной поверхности оболочки.

В соответствии с принятой гипотезой, оболочка испытывает плоское напряженное состояние, для которого закон Гука можно представить следующим образом:

$$\sigma_1 = \frac{E}{1-\mu^2} (\varepsilon_{1\xi} + \mu \varepsilon_{2\xi}); \quad \sigma_2 = \frac{E}{1-\mu^2} (\varepsilon_{2\xi} + \mu \varepsilon_{1\xi}). \quad (17)$$

Внутренние силы и моменты, возникающие в сечениях оболочки, приведем к ее срединной поверхности (рис. 4):

$$\begin{aligned} N_1 &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_1 d\xi; & M_1 &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_1 \xi d\xi; \\ N_2 &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_2 d\xi; & M_2 &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_2 \xi d\xi. \end{aligned} \quad (18)$$

При интегрировании в формулах (18) вследствие тонкостенности оболочки будет происходить пренебрежение величинами порядка ξ/ρ_i по сравнению с единицей.

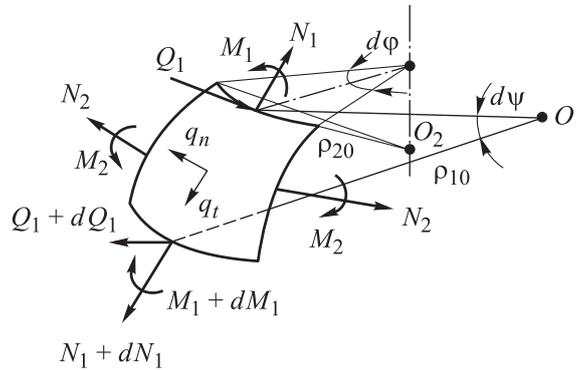


Рис. 4. Силовые факторы, действующие в срединной поверхности элемента оболочки:

N_1, N_2 — силы; M_1, M_2 — моменты

Последовательно подставляя соотношения (16)–(17) в формулы (18), получим выражения для силовых факторов:

$$\begin{aligned} N_1 &= C_1 \varepsilon_{10} + C_2 \varepsilon_{20}; & M_1 &= C_3 \kappa_{10} + C_4 \kappa_{20}; \\ N_2 &= C_1 \varepsilon_{20} + C_2 \varepsilon_{10}; & M_2 &= C_3 \kappa_{20} + C_4 \kappa_{10}. \end{aligned} \quad (19)$$

Постоянные коэффициенты C_1, C_2, C_3, C_4 определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{Eh}{1-\mu^2}; & C_2 &= \frac{\mu Eh}{1-\mu^2}; \\ C_3 &= \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}; & C_4 &= \frac{\mu Eh^3}{12(1-\mu^2)}. \end{aligned} \quad (20)$$

Введем обозначения B — мембранная жесткость оболочки, D — цилиндрическая жесткость оболочки:

$$B = \frac{Eh}{1-\mu^2}; \quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}. \quad (21)$$

Вывод уравнений равновесия сил и моментов. Меридиональная N_1 и поперечная Q_1 силы связаны с горизонтальной U и вертикальной V составляющими внутреннего усилия с помощью матрицы поворота, зависящей от угла ψ (рис. 5):

$$\begin{Bmatrix} N_1 \\ Q_1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \psi & \sin \psi \\ -\sin \psi & \cos \psi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U \\ V \end{Bmatrix}. \quad (22)$$

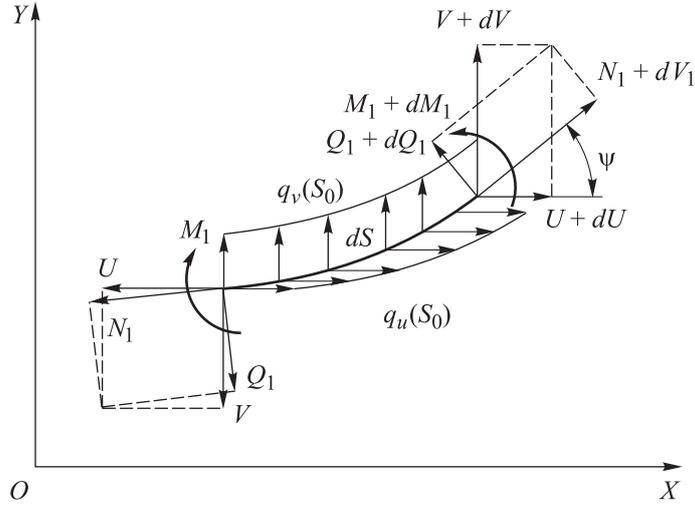


Рис. 5. Схема к выводу уравнений равновесия осесимметричной оболочки

Уравнения равновесия сил элемента оболочки запишем в глобальной системе координат X, Y , спроектировав все силы, действующие на элемент срединной поверхности оболочки, на направления X и Y (см. рис. 5):

$$\begin{cases} d(XVd\varphi) + q_v X d\varphi dS = 0; \\ d(XUd\varphi) - 2N_2 dS \frac{d\varphi}{2} + q_u X d\varphi dS = 0. \end{cases} \quad (23)$$

После преобразования (23) получим уравнения

$$\begin{cases} \frac{d(XV)}{dS_0} = -(1 + \varepsilon_{10}) q_v X; \\ \frac{d(XU)}{dS_0} = -(1 + \varepsilon_{10}) X \left(\frac{N_2}{X} - q_u \right). \end{cases} \quad (24)$$

Запишем уравнение равновесия моментов всех внешних и внутренних сил, приложенных к элементу оболочки, относительно оси l (рис. 6). Для этого векторы моментов необходимо спроектировать на направление l (рис. 6, б):

$$d(M_1 X) d\varphi - 2M_2 dS \frac{d\theta}{2} + Q_1 X d\varphi dS = 0. \quad (25)$$

Выразим приращение угла $d\theta$ следующим образом (рис. 6, а):

$$d\theta = \cos \psi d\varphi. \quad (26)$$

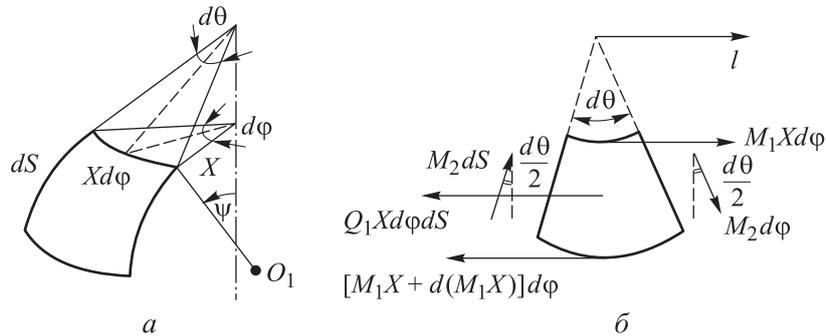


Рис. 6. Схема к выводу уравнений равновесия момента

С учетом соотношений (10) и (22) преобразуем уравнение (25) к следующему виду:

$$\frac{d(M_1 X)}{dS_0} = (1 + \varepsilon_{10}) X \left[M_2 \frac{\cos \psi}{X} + U \sin \psi - V \cos \psi \right] = 0. \quad (27)$$

Принимая во внимание соотношения (3) и (4), преобразуем уравнения (24) и (27) к виду

$$\begin{cases} \frac{dV}{dS_0} = -(1 + \varepsilon_{10}) \left[\frac{\cos \psi}{X_0 + u} V + q_v \right]; \\ \frac{dU}{dS_0} = -(1 + \varepsilon_{10}) \left[\frac{\cos \psi}{X_0 + u} U - \frac{N_2}{X_0 + u} + q_u \right]; \\ \frac{dM_1}{dS_0} = -(1 + \varepsilon_{10}) \left[(M_1 - M_2) \frac{\cos \psi}{X_0 + u} - U \sin \psi + V \cos \psi \right]. \end{cases} \quad (28)$$

Здесь q_v и q_u — интенсивности распределенной нагрузки, определяемые по формулам

$$\begin{aligned} q_v &= q_n \cos \psi + q_t \sin \psi; \\ q_u &= -q_n \sin \psi + q_t \cos \psi. \end{aligned} \quad (29)$$

Двухточечная краевая задача для системы нелинейных дифференциальных уравнений шестого порядка. Основную систему нелинейных дифференциальных уравнений образуют соотношения (13), (28). Неизвестные, производные которых входят в эти уравнения, будем считать основными неизвестными, и тогда их вектор в текущем сечении оболочки можно записать в следующем виде:

$$\{X\}^T = \{u, v, \psi, U, V, M_1\}^T. \quad (30)$$

Все остальные неизвестные будем полагать вспомогательными. Для решения основной системы их необходимо выразить через основные неизвестные.

Используя соотношения (19), (20), получим следующие формулы для вычисления вспомогательных величин:

$$\begin{cases} \varepsilon_{10} = \frac{1}{B}(U \cos \psi + V \sin \psi) - \mu \frac{u}{X_0}; \\ \kappa_{10} = \frac{M_1}{D} - \mu \left(\frac{X_0 + u}{X_0} \right) \left(\frac{\sin \psi}{X_0 + u} - \frac{\sin \psi_0}{X_0} \right); \\ N_2 = \mu(U \cos \psi + V \sin \psi) + Eh \frac{u}{X_0}; \\ M_2 = \mu M_1 + \frac{Eh^3}{12} \left[\frac{X_0 + u}{X_0} \left(\frac{\sin \psi}{X_0 + u} - \frac{\sin \psi_0}{X_0} \right) \right]. \end{cases} \quad (31)$$

Дополняя систему (13) и (28) соответствующими краевыми условиями, сводим проблему исследования потери устойчивости мембраны к двухточечной краевой задаче для системы нелинейных дифференциальных уравнений шестого порядка в обыкновенных производных, которую представим в виде

$$\begin{cases} \frac{d\bar{X}}{dS_0} = F(S_0, \bar{Z}, \bar{X}, \bar{Q}); \\ G_0(\bar{X}, \bar{Q}) = 0; \\ G_1(\bar{X}, \bar{Q}) = 0, \end{cases} \quad (32)$$

где \bar{Q} — векторный параметр внешней нагрузки; \bar{Z} — вектор вспомогательных неизвестных, не входящих под знак производной.

Переход от многопараметрической задачи к множеству однопараметрических задач. Метод дискретного продолжения по параметру. Для того чтобы исследовать сложные многопараметрические процессы деформирования, семейство нелинейных краевых задач в обыкновенных производных было сведено к многопараметрическому семейству систем нелинейных уравнений вида

$$F(\{X_1\}, \{X_2\}) = 0. \quad (33)$$

Система (33) порядка m зависит от вектора «внутренних» параметров $\{X_1\}$ размерностью $m \times 1$ и вектора «внешних» параметров $\{X_2\}$ размерностью $n \times 1$. В состав вектора $\{X_1\}$ входят параметры, характе-

ризующие состояние рассматриваемой системы, прежде всего, обобщенные перемещения и обобщенные внутренние силовые факторы. Внешние параметры, иначе параметры «управления», входящие в состав вектора $\{X_2\}$, являются переменными, и они, как правило, связаны с геометрическими размерами конструкции, свойствами материала, условиями закрепления, внешней нагрузкой и т. п.

Совокупность всех решений (33) можно рассматривать как некоторую поверхность (гиперповерхность) равновесных состояний, построенную в евклидовом пространстве размерности R^{m+n} . Построение такой гиперповерхности — очень трудоемкий процесс, поэтому зачастую решение сложной многопараметрической задачи сводят к решению семейства однопараметрических задач, каждая из которых имеет свой дискретно изменяющийся параметр. Такой подход позволяет построить сечения поверхности равновесных состояний, что значительно упрощает исследуемую задачу и дает возможность проанализировать влияние «внешних» параметров на характер деформирования рассматриваемого элемента. В этом случае вектор «внешних» параметров $\{X_2\}$ определяется через один независимый скалярный параметр q :

$$\{X_2\} = q. \quad (34)$$

Для исследования задачи потери устойчивости хлопающей мембраны, нагруженной внешним давлением, применялся метод продолжения по параметру, основная идея которого заключается в том, что любую сложную многопараметрическую задачу можно рассматривать как множество однопараметрических задач, каждая из которых имеет свой дискретно изменяющийся параметр при фиксированных значениях всех остальных внешних параметров.

В качестве варьируемого параметра q можно взять внешнюю нагрузку, геометрическую характеристику системы, свойство материала, условия закрепления и т. п. Для дальнейшей алгоритмизации удобно считать параметр q равноправным со всеми внутренними параметрами системы, т. е. с компонентами вектора состояния $\{X\}$ системы (32).

Введем расширенный вектор основных неизвестных

$$\{X_{extr}\} = \{\{X\}, q\}, \quad (35)$$

и тогда систему (1) для однопараметрического процесса можно записать следующим образом:

$$r(\{X_{extr}\}) = 0. \quad (36)$$

Двухточечная процедура по схеме «предиктор — корректор».

При реализации процедуры дискретного продолжения по параметру использовалась двухэтапная процедура по схеме «предиктор — корректор». На этапе «предиктор» на основании предыстории путем экстраполяции решения предсказывается начальный вектор $\{X_{extr}^k\} = \{\{X^k\}, q^k\}$ для нового значения параметра q^k , где верхний индекс k соответствует номеру итерации по параметру. Для проведения экстраполяции необходимо сохранять информацию о ранее полученных решениях. Однако исключением является начало итерационного процесса, для которого необходим так называемый этап «разгонки».

На первом шаге итерации по параметру экстраполяция начального приближения не проводится, а в качестве начального приближения используется некоторое «опорное» решение. Применительно к рассматриваемой задаче деформирования осесимметричной оболочки вращения в качестве «опорного» решения используется тривиальное решение, соответствующее нулевой внешней нагрузке. В качестве «опорного» решения также можно использовать либо решение задачи в линейной постановке, либо решение с помощью МКЭ.

На втором шаге применяется линейная экстраполяция по двум точкам. И только потом, получив решение в трех точках равновесной кривой, процедура выводится на стандартный режим квадратичной экстраполяции.

На этапе «корректор» происходит уточнение начального приближения $\{X_0\}$ итерационным методом, в качестве которого используется метод Ньютона и его модификации.

Модифицированный метод Ньютона — Рафсона. На этапе «корректор» итерационным методом Ньютона решается нелинейная двухточечная краевая задача посредством многократного решения задачи Коши и итерационного уточнения начального вектора для системы (36). Получив на этапе «предиктор» начальное приближение вектора основных неизвестных $\{X_0^k\}_{s=0}$, соответствующего текущей величине параметра q^k , его следует подставить в систему нелинейных дифференциальных уравнений (32). Решив задачу Коши с приближенным вектором основных неизвестных, получаем некоторую невязку решения (36). Поскольку все дальнейшие выкладки в данном разделе соответствуют одному шагу по параметру k , нужно обозначить вектор основных неизвестных $\{X_0^k\}_{s=0}$ как $\{X^n\}$, где верхний индекс будет отвечать номеру итерации в методе Ньютона.

При $n = 0$ вектор $\{X^n\}$ имеет вид

$$\{X^0\} = \left\{ \begin{matrix} \{x\} \\ \{x_0\} \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4^0 \\ x_5^0 \\ x_6^0 \end{matrix} \right\}, \quad (37)$$

где x_1, x_2, x_3 — известные компоненты вектора $\{X^0\}$; x_4^0, x_5^0, x_6^0 — найденные на этапе «предиктор» компоненты, требующие уточнения.

После подстановки (37) в систему (32) получим

$$\frac{d\{X^0\}}{ds} - F(s, \{X^0\}, Q) = \{r^0\}, \quad (38)$$

где $\{r^0\}$ — вектор невязки нулевого приближения, или номинальная невязка.

Геометрическая интерпретация модифицированного метода Ньютона — Рафсона (метода одной касательной) приведена на рис. 7.

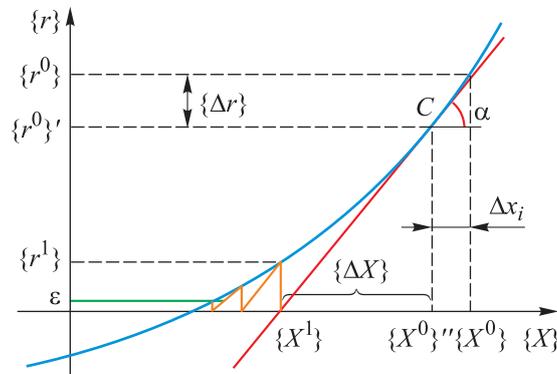


Рис. 7. Геометрическая интерпретация метода Ньютона — Рафсона

В точке начала интегрирования задается начальное приближение вектора основных неизвестных $\{X^0\}$, которому соответствует вектор невязки $\{r^0\}$. Затем поочередно каждой неизвестной компоненте x_i ($i = 4, 5, 6$) вектора $\{X^0\}$ задается малое приращение (возмущение) Δx_i , в результате чего получают три новых «возмущенных» вектора

решения $\{X^0\}'$. Проведем через точку C касательную к графику исследуемой функции. Точка пересечения касательной с осью абсцисс берется в качестве следующего приближения $\{X^1\}$, для которого все действия аналогичны: определяется новая невязка решения $\{r^1\}$, ей соответствует новая точка на кривой. В этой точке проводится касательная, точка пересечения которой с осью абсцисс определяет следующее приближение. Итерационный процесс считается сошедшимся, если конечная невязка будет меньше некоторого заранее выбранного значения ε (см. рис. 7).

Определим тангенс угла наклона касательной

$$\operatorname{tg}(\alpha) = \frac{\Delta r_i}{\Delta x_j}, \quad (39)$$

где Δr_i — приращение невязки i -го неизвестного компонента вектора $\{X^0\}$; Δx_j — приращение j -го неизвестного компонента вектора $\{X^0\}$.

Получим выражение для нового приближения $\{X^1\}$ (см. рис. 7):

$$\{X^1\} = \{X^0\}' - \{\Delta X\}, \quad (40)$$

$$\operatorname{tg}(\alpha) = \frac{\{r^0\}'}{\{\Delta X\}} \Rightarrow \{\Delta X\} = \frac{\{r^0\}'}{\operatorname{tg}(\alpha)}. \quad (41)$$

Подставив (41) в выражение (40) и обобщив полученное для многомерного случая, запишем основное рекуррентное соотношение метода Ньютона — Рафсона:

$$\{X^{n+1}\} = \{X^n\} - [J^0]^{-1} \{r^n\}, \quad (42)$$

где $\{X^{n+1}\}$ — вектор решения $(n+1)$ -й итерации; $\{X^n\}$ — вектор решения n -й итерации; $\{r^n\}$ — вектор невязки n -й итерации; $[J^0]$ — матрица Якоби, вычисленная в нулевом приближении.

При численном счете аналогом матрицы Якоби будет матрица Гато, имеющая вид

$$[J^0] = \begin{bmatrix} \frac{\Delta r_1}{\Delta x_1} & \frac{\Delta r_1}{\Delta x_2} & \frac{\Delta r_1}{\Delta x_3} \\ \frac{\Delta r_2}{\Delta x_1} & \frac{\Delta r_2}{\Delta x_2} & \frac{\Delta r_2}{\Delta x_3} \\ \frac{\Delta r_3}{\Delta x_1} & \frac{\Delta r_3}{\Delta x_2} & \frac{\Delta r_3}{\Delta x_3} \end{bmatrix}. \quad (43)$$

Компоненты матрицы Гато вычисляются следующим образом:

$$\Delta r_i = r_i(\{X^0\} + \Delta x_j) - r_i(\{X^0\}). \quad (44)$$

Отличие модифицированного метода Ньютона — Рафсона от классического состоит в том, что следует вычислять матрицу Якоби лишь один раз, в точке начального приближения, а затем использовать полученное значение на каждой последующей итерации.

Прием «смены подпространства управляющих параметров». Для обхода *точек бифуркации*, или *точек ветвления*, возникающих на кривой равновесных состояний, используется прием численного счета, получивший название «прием смены пространства управляющих параметров» [4, 6, 7, 11, 18]. Его основная идея заключается в том, что при подходе к окрестности предполагаемой точки бифуркации следует перейти к новой системе, для которой на кривой равновесных состояний уже не будет никаких бифуркационных точек, или точек ветвления (наличие предельных точек допускается). Фактически, переход к новой системе можно интерпретировать как решение задачи с немного измененной конфигурацией, которая принадлежит целому семейству подобных задач. После прохождения критического участка (окрестности бифуркационной точки) можно совершить обратный переход и продолжить решение задачи с исходной конфигурацией.

Для реализации описанной процедуры необходимо иметь возможность варьировать как минимум два параметра управления, например, параметры внешней нагрузки и какой-нибудь геометрический параметр оболочки. Тогда однопараметрическую систему можно записать следующим образом:

$$r(\{X_1\}, q_1, q_2) = r(\{X_{extr}\}) = 0, \quad (45)$$

где $\{X_{extr}\} = \{\{X_1\}, q_1, q_2\}$ — расширенный вектор; $\{X_1\}$ — вектор основных неизвестных, имеющий размерность $m \times 1$; q_1, q_2 — два параметра управления, значит система (45) имеет размерность $m + 2$.

Исследование закритического поведения шарнирно опертой сферической оболочки. Рассмотрим многопараметрический подход и прием «смены подпространства управляющих параметров» на примере исследования закритического поведения сферической оболочки, шарнирно опертой и закрепленной по внешнему контуру, а также нагруженной внешним давлением (рис. 8). Оболочка изготовлена из материала, имеющего модуль упругости $E = 13 \cdot 10^4$ МПа и коэффициент Пуассона $\mu = 0,3$.

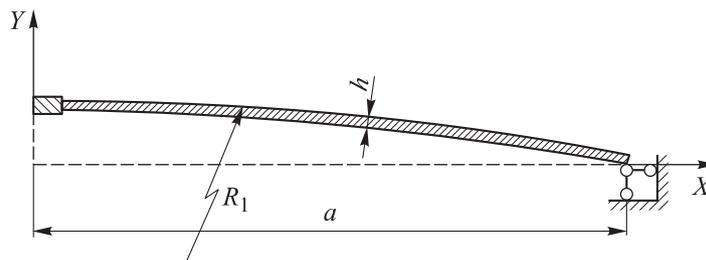


Рис. 8. Схема сферической оболочки, шарнирно опертой по внешнему контуру:
 a — радиус опорной поверхности, $a = 2,8$ мм; h — толщина оболочки, $h = 0,05$ мм;
 R_1 — исходный радиус кривизны меридиана, $R_1 = 3,2$ мм

При многопараметрическом подходе используется стратегия последовательного исследования однопараметрических семейств размерности R^{m+1} , каждая из которых принадлежит многопараметрическому семейству задач размерности R^{m+n} . Каждой однопараметрической задаче соответствует свой дискретно изменяющийся внешний параметр, а остальные $(n-1)$ управляющие (внешние) параметры имеют фиксированные значения.

В данном примере исследование закритического поведения сферической оболочки проводилось в следующем пространстве: прогиб оболочки в центре v , радиус кривизны R , внешнее давление p . Радиус кривизны и внешнее давление являются управляющими параметрами, а прогиб оболочки в центре — одна из компонент вектора внутренних параметров, характеризующих текущее состояние конструкции.

Проекция поверхности равновесных состояний в пространстве $p-R-v$ представлена на рис. 9. Данная поверхность построена с использованием метода продолжения по параметру в связке с приемом «смены подпространства управляющих параметров». На рисунке видно, что с увеличением радиуса кривизны проекция поверхности равновесных состояний усложняется, и при некотором значении параметра кривизны появляется отдельная поверхность изолированных решений, которая впоследствии сливается с основной поверхностью.

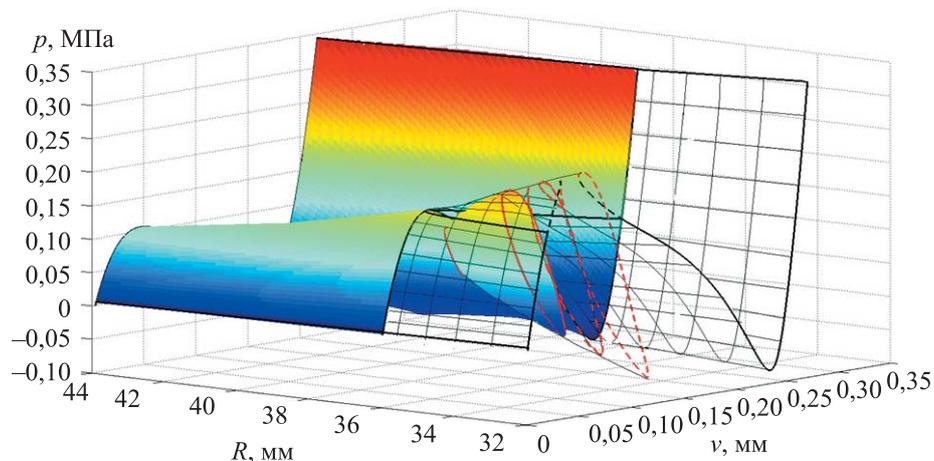


Рис. 9. Проекция поверхности равновесных состояний в пространстве внешнее давление p — радиус кривизны R — прогиб в центре v

Для того чтобы продемонстрировать прием «смены подпространства управляющих параметров», рассмотрим сечения проекции поверхности равновесных состояний для значений радиуса кривизны R , лежащего в пределах от 32 до 36 мм (рис. 10). Траектория 1 соответствует радиусу кривизны, равному 35,5 мм, а траектория 3 — радиусу кривизны 32 мм. Наблюдая за качественным изменением траекторий при монотонном изменении параметра кривизны, можно предположить, что существует особая точка — точка бифуркации, соответствующая некоторому критическому значению параметра кривизны $R_{кр}$ ($33,5185 \text{ мм} < R_{кр} < 33,5188 \text{ мм}$). Сечение, соответствующее критическому значению параметра кривизны, показано на рис. 10 заштрихованной плоскостью.

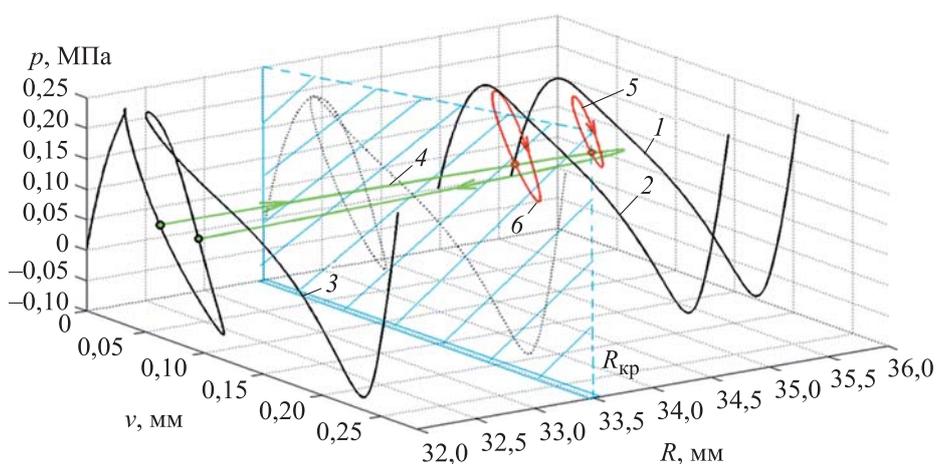


Рис. 10. Сечения проекции поверхности равновесных состояний в пространстве внешнее давление p — прогиб в центре v — радиус кривизны R

Траектории, лежащие в плоскости прогиб — давление, приближаясь к критическому значению параметра кривизны $R_{кр}$ снизу, будут иметь вид, аналогичный траектории 3, а если будут приближаться сверху — подобный траектории 1. Оказывается, что получить точное значение критического параметра практически невозможно. По мере приближения к окрестности бифуркационной точки наблюдается ухудшение сходимости численного решения: может возникать либо самопроизвольный переход на другую ветвь решения, либо разворот назад. Поэтому в рамках многопараметрического подхода предлагается альтернативная стратегия, позволяющая избежать непосредственного решения задачи ветвления, но при этом получить всю необходимую информации о поведении системы в окрестности бифуркационной точки. Следовательно, можно обойти особую точку с разных сторон и построить так называемую картину перестройки.

С помощью приема смены подпространства управляющих параметров можно в нужный момент отделиться от траектории 3, которая соответствует однопараметрической задаче с переменным давлением ($p = \text{var}$) и фиксированной кривизной ($R = 32$ мм), и начать движение вдоль траектории 4 (см. рис. 10), соответствующей другой однопараметрической задаче уже с переменной кривизной ($R = \text{var}$), но с фиксированным внешним давлением ($p = 0,084$ МПа).

Фактически, прием смены подпространства управляющих параметров является переключателем между разными однопараметрическими задачами. Достигнув заданного значения параметра радиуса кривизны, например $R = 35,5$ мм, можно повторно отделиться от траектории 4 и таким образом попасть на траекторию 5 (см. рис. 10), соответствующую изолированному решению и не имеющую никаких общих точек с основной траекторией 1.

Продолжив движение вдоль траектории 4, можно определить «глубину» проникновения изолированного решения. Как видно из полученных результатов, траектория 4 также имеет предельную точку (в данном случае $R_{пр} = 35,8$ мм). Следовательно, при значениях параметра радиуса кривизны, больших $R_{пр}$, изолированное решение, аналогичное траекториям 5 и 6, отсутствует. Для преодоления предельной точки на траектории 4 используется прием смены параметра продолжения. Продолжив движение по траектории 4 и миновав предельную точку, можно вернуться на исходную траекторию 3. Таким образом, происходит обход окрестности бифуркационной точки.

Данный алгоритм был реализован в представленной авторами статьи программе. Для подтверждения достоверности результатов численного решения рассматриваемая задача была решена в программном

комплексе ANSYS с помощью МКЭ. Полученные результаты численного решения с высокой точностью совпали с результатами программного комплекса ANSYS, что свидетельствует об их достоверности.

Заключение. Приведен обзор существующих подходов и методик исследования закритического поведения осесимметричных сферических оболочек. Проанализированы и обобщены существующие подходы с целью выбора рациональных расчетных моделей промышленных мембран. Рассмотрен разработанный алгоритм нелинейного анализа и синтеза конструкций исполнительных элементов на основе выбранной расчетной модели. Выбрана рациональная математическая модель для описания нелинейного деформирования хлопающих симметричных оболочек. В рамках разработанного в виде авторской программы численного алгоритма исследования процессов нелинейного деформирования многопараметрических систем была создана методика расчета однопараметрических задач с использованием дискретного метода продолжения по параметру, а также был реализован прием «смены параметра продолжения» для преодоления особых предельных точек кривой равновесных состояний.

Представленную методику целесообразно использовать для решения практических задач при создании новых и улучшения существующих конструкций промышленных мембран.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Алфутов Н.А. *Основы расчета на устойчивость упругих систем*. Москва, Машиностроение, 1978, 312 с. (Б-ка расчетчика).
- [2] Андреева Л.Е. *Упругие элементы приборов*. Москва, Машиностроение, 1982, 456 с.
- [3] Бидерман В.Л. *Механика тонкостенных конструкций. Статика*. Москва, Машиностроение, 1977, 488 с. (Б-ка расчетчика)
- [4] Валишвили Н.В. *Методы расчета оболочек вращения на ЭЦВМ*. Москва, Машиностроение, 1976, 278 с.
- [5] Вольмир А.С. *Устойчивость деформируемых систем*. Москва, Физматгиз, 1967, 984 с.
- [6] Гаврюшин С.С. *Разработка методов расчета и проектирования упругих оболочечных конструкций приборных устройств: дис. ... д-ра техн. наук*. Москва, 1994, 316 с.
- [7] Гаврюшин С.С., Барышникова О.О., Борискин О.Ф. *Численные методы в динамике и прочности машин*. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2012, 492 с.
- [8] Григолюк Э.И., Лопаницын Е.А. *Конечные прогибы, устойчивость и закритическое поведение тонких пологих оболочек*. Москва, МГТУ «МАМИ», 2004, 162 с.
- [9] Подкопаев С.А. Численное моделирование закритического нелинейного деформирования осесимметричных мембран. *Математическое моделирование и численные методы*, 2020, № 1, с. 64–87.

- [10] Подкопаев С.А., Гаврюшин С.С. Методика исследования закритического поведения осесимметричных мембран, используемых в промышленном интернете вещей. *Межвузовский сборник научных трудов: Математическое моделирование и экспериментальная механика деформируемого твердого тела. Вып. 3.* Тверь, Тверской государственный технический университет, 2020, 108 с. URL: <http://elibrary.ru/item.asp?id=29068499>
- [11] Подкопаев С.А., Гаврюшин С.С., Николаева А.С. Анализ процесса нелинейного деформирования гофрированных мембран. *Межвузовский сборник научных трудов: Математическое моделирование и экспериментальная механика деформируемого твердого тела. Вып. 1.* Тверь, Тверской государственный технический университет, 2017, 152 с.
- [12] Подкопаев С.А., Гаврюшин С.С., Николаева А.С., Подкопаева Т.Б. Расчет рабочей характеристики перспективных конструкций микроактюаторов. *Межвузовский сборник научных трудов: Математическое моделирование и экспериментальная механика деформируемого твердого тела. Вып. 1.* Тверь, Тверской государственный технический университет, 2017, 162 с.
- [13] Reissner E. On axisymmetrical deformations of thin shells of revolution. In: *Proc. of Symp. in Appl. Math., Amer. Math. Soc.*, 1950, vol. 3, pp. 27–52.
- [14] Podkopaev S.A., Gavrushin S.S., Podkopaeva T.B. Methods for studying the post-buckling behavior of axisymmetric membrane. In: *The First International Symposium on Computer Science, Digital Economy and Intelligent Systems (CSDE-IS2019), 4–6 October 2019.* Moscow, Russia.
- [15] Феодосьев В.И. К расчету хлопающей мембраны. *Прикл. математика и механика*, 1946, т. 10, № 2, с. 295–306.
- [16] Ali Belhocine. Exact analytical solution of boundary value problem in a form of an infinite hypergeometric series. *International Journal of Mathematical Sciences and Computing (IJMSC)*, 2017, vol. 3, no. 1, pp. 28–37. DOI: 10.5815/ijmsc.2017.01.03
- [17] Crisfield M.A. A fast Incremental/Iterative solution procedure that handles "snapthrough". *Comput. and Structures*, 1981, vol. 13, no. 1, pp. 55–62.
- [18] Подкопаев С.А. Численное моделирование закритического нелинейного деформирования осесимметричных мембран. *Математическое моделирование и численные методы*, 2020, № 1, с. 64–87.
- [19] Феодосьев В.И. *Упругие элементы точного приборостроения.* Москва, Оборонгиз, 1949.
- [20] Пономарев С.Д., Бидерман В.Л., Лихарев К.К. и др. *Расчеты на прочность в машиностроении.* В 3 т. Т. 2. Москва, Машгиз, 1958.
- [21] Mescall J. Numerical solution of nonlinear equations for shell of revolution. *AIAA J.*, 1966, vol. 4, no. 11, pp. 2041–2043.
- [22] Gupta N.K. Experimental and numerical studies of dynamic axial compression of thin walled spherical shells. *Int. J. of Impact Engineering*, 2004, vol. 30, pp. 1225–1240.
- [23] Riks E. The application of Newton's method to the problem of elastic stability. *J. Appl. Mech.*, 1972, vol. 39, pp. 1060–1065.

Статья поступила в редакцию 18.11.2024

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Подкопаев С.А., Гаврюшин С.С. Численное моделирование нелинейного деформирования промышленных мембран. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2025, вып. 1. EDN СВЕННТ

Подкопаев Сергей Анатольевич — канд. техн. наук, доцент кафедры «Прикладная механика» МГТУ им. Н.Э. Баумана. Области деятельности и научных интересов: численные методы и алгоритмы анализа процессов нелинейного деформирования тонкостенных элементов конструкций машин и приборов, аддитивные технологии и прототипирование, автоматизация технологических процессов и производств. e-mail: podkopaevsa@bmstu.ru

SPIN 5967-8132, ORCID 0000-0002-1757-7995

Гаврюшин Сергей Сергеевич — д-р техн. наук, профессор кафедры «Компьютерные системы автоматизации производства» МГТУ им. Н.Э. Баумана. Область деятельности и научных интересов: численные методы и алгоритмы анализа процессов нелинейного деформирования тонкостенных элементов конструкций машин и приборов, разработка критических биомедицинских технологий, конечно-элементные методики расчета и проектирования изделий, автоматизация этапов жизненного цикла продукции. e-mail: gss@bmstu.ru

SPIN 3142-3809, ORCID 0000-0002-6547-1351, SCOPUS Author ID 6507067486

Numerical simulation of the industrial membrane nonlinear deformation

© S.A. Podkopaev, S.S. Gavryushin

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, 105005, Russian Federation

The paper indicates theoretical foundations of nonlinear deformation in the thin axisymmetric shells. It considers the membranes operational characteristics in various switching devices, valves and pressure sensors. The paper analyzes and summarizes the existing approaches to selecting the rational computation models of the industrial membranes. It presents the developed algorithm for nonlinear analysis and synthesis of the actuator designs based on the selected computation model. Types of the membrane supercritical nonlinear behavior, as well as a mathematical model to describe the processes of the axisymmetric shells nonlinear deformation, parameter discrete continuation and the technique of “changing the control parameters subspace” are considered. The supercritical behavior is studied using the example of a hinged spherical shell. A rational mathematical model is selected to describe nonlinear deformation of the flapping symmetric shells. The developed technique is implemented to solve practical problems in creating new and improving the existing design of the industrial membranes. A numerical algorithm is developed and implemented to study the processes of nonlinear deformation of a multiparameter system in the form of the author's program.

Keywords: nonlinear deformation, thin-walled axisymmetric shell, membrane, supercritical behavior, discrete switching, parameter continuation, parameter subspace alteration

REFERENCES

- [1] Alfutov N.A. *Osnovy rascheta na ustoychivost uprugikh sistem* [Fundamentals of calculating the elastic systems stability]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1978, 312 p.
- [2] Andreeva L.E. *Uprugie elementy priborov* [Elastic elements of devices]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1982, 456 p.
- [3] Biderman V.L. *Mekhanika tonkostennykh konstruksiy. Statika* [Mechanics of the thin-walled structures. Statics]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1977, 488 p.
- [4] Valishvili N.V. *Metody rascheta obolochek vrashcheniya na ETsVM* [Methods of calculating rotation shells on a ECM]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1976, 278 p.
- [5] Volmir A.S. *Ustoychivost deformiruemykh sistem* [Stability of the deformable systems]. Moscow, Fizmatgiz Publ., 1967, 984 p.
- [6] Gavryushin S.S. *Razrabotka metodov rascheta i proektirovaniya uprugikh obolochechennykh konstruksiy pribornykh ustroystv: Dis. ... d-ra tekhn. nauk* [Development of methods for calculating and designing elastic shell structures of the instrument devices. Diss. ... Dr. Sc. (Eng.)]. Moscow, 1994, 316 p.
- [7] Gavryushin S.S., Baryshnikova O.O., Boriskin O.F. *Chislennye metody v dinamike i prochnosti mashin* [Numerical methods in dynamics and strength of the machines]. Moscow, BMSTU Publ., 2012, 492 p.
- [8] Grigolyuk E.I., Lopanitsyn E.A. *Konechnye progiby, ustoychivost i zakriticheskoe povedenie tonkikh pologikh obolochek* [Finite deflections, stability and supercritical behavior of the thin flat shells]. Moscow, MSTU MAMI Publ., 2004, 162 p.

- [9] Podkopaev S.A. Chislennoe modelirovanie zakriticheskogo nelineynogo deformirovaniya osesimmetricheskikh membran [Numerical simulation the post-buckling nonlinear deformation of axisymmetric membranes]. *Matematicheskoe modelirovanie i chislennyye metody — Mathematical Modeling and Computational Methods*, 2020, no. 1, pp. 64–87.
- [10] Podkopaev S.A., Gavryushin S.S. Metodika issledovaniya zakriticheskogo povedeniya osesimmetrichnykh membran, ispol'zuyemykh v promyshlennom internete veshchey [Methodology for studying the supercritical behavior of axisymmetric membranes used in the industrial Internet of things]. *Mezhvuzovskiy sbornik nauchnykh trudov: Matematicheskoe modelirovanie i eksperimentalnaya mekhanika deformiruemogo tverdogo tela* [Interuniversity collection of scientific papers: Mathematical simulation and experimental mechanics of a deformable solid]. *Issue 3*. Tver, Tverskoy Gosudarstvennyi Tekhnicheskoy Universitet Publ., 2020, 108 p. <https://doi.org/10.elibrary.ru/item.asp?id=29068499>
- [11] Podkopaev S.A. Gavryushin S.S., Nikolaeva A.S. Analiz protsessa nelineynogo deformirovaniya gofrirovannykh membran [Analysis of the process of nonlinear deformation of the corrugated membranes]. *Mezhvuzovskiy sbornik nauchnykh trudov: Matematicheskoe modelirovanie i eksperimentalnaya mekhanika deformiruemogo tverdogo tela* [Interuniversity collection of scientific papers: Mathematical simulation and experimental mechanics of a deformable solid]. *Issue 1*. Tver, Tverskoy Gosudarstvennyi Tekhnicheskoy Universitet Publ., 2017, 152 p.
- [12] Podkopaev S.A. Gavryushin S.S., Nikolaeva A.S., Podkopaeva T.B. Raschet rabochey kharakteristiki perspektivnykh konstruksiy mikroaktyuatorov [Computation of performance characteristics of the promising microactuator designs]. *Mezhvuzovskiy sbornik nauchnykh trudov: Matematicheskoe modelirovanie i eksperimentalnaya mekhanika deformiruemogo tverdogo tela* [Interuniversity collection of scientific papers: Mathematical simulation and experimental mechanics of a deformable solid]. *Issue 1*. Tver, Tverskoy Gosudarstvennyi Tekhnicheskoy Universitet Publ., 2017, 162 p.
- [13] Reissner E. On axisymmetric deformations of thin shells of revolution. In: *Proc. of Symp. In Appl. Math., Amer. Math. Soc.*, 1950, vol. 3, pp. 27–52.
- [14] Podkopaev S.A., Gavryushin S.S., Podkopaeva T.B. Methods for studying the post-buckling behavior of axisymmetric membrane. In: *The First International Symposium on Computer Science, Digital Economy and Intelligent Systems (CSDE-IS2019), October 4–6, 2019*, Moscow, Russia.
- [15] Feodosiev V.I. K raschetu khlopayushchey membrany [On calculation of a flapping membrane]. *Prikladnaya matematika i mekhanika — Applied Mathematics and Mechanics*, 1946, vol. 10, no. 2, pp. 295–306.
- [16] Belhocine A. Exact analytical solution of boundary value problem in a form of an infinite hypergeometric series. *International Journal of Mathematical Sciences and Computer Engineering (IJMSC)*, 2017, vol. 3, no. 1, pp. 28–37, <https://doi.org/10.5815/ijmsc.2017.01.03>
- [17] Crisfield M.A. A fast incremental/iterative solution procedure that handles “snapthrough”. *Calculations and Structures*, 1981, vol. 13, no. 1, pp. 55–62.
- [18] Podkopaev S.A. Chislennoe modelirovanie zakriticheskogo nelineynogo deformirovaniya osesimmetricheskikh membran [Numerical simulation the post-buckling nonlinear deformation of axisymmetric membranes]. *Matematicheskoe modelirovanie i chislennyye metody — Mathematical Modeling and Computational Methods*, 2020, no. 1, pp. 64–87.
- [19] Feodosiev V.I. *Uprugie elementy tochnogo priborostroeniya* [Elastic elements of precision instrumentation]. Moscow, Oborongiz Publ., 1949.

- [20] Ponomarev S.D., Biderman V.L., Likharev K.K. et al. *Raschety na prochnost v mashinostroenii* [Strength calculations in the mechanical engineering]. In 3 vols. Vol. 2. Moscow, Mashgiz Publ., 1958.
- [21] Mescall J. Numerical solution of nonlinear equations for the rotation shell. *AIAA J.*, 1966, vol. 4, no. 11, pp. 2041–2043.
- [22] Gupta N.K. Experimental and numerical studies of dynamic axial compression of thin-walled spherical shells. *International Journal of Impact Engineering*, 2004, vol. 30, pp. 1225–1240.
- [23] Riks E. The application of Newton's method to the problem of elastic stability. *J. Appl. Mech.*, 1972, vol. 39, pp. 1060–1065.

Podkopaev S.A., Cand. Sc. (Eng.), Associate Professor, Department of Applied Mechanics, Bauman Moscow State Technical University. Activity and research interests: numerical methods and algorithms in analyzing the processes of nonlinear deformation of the thin-walled structural elements of machines and devices, additive technologies and prototyping, automation of the technological processes and productions.

e-mail: podkopaevsa@bmstu.ru

SPIN 5967-8132, ORCID 0000-0002-1757-7995

Gavryushin S.S., Dr. Sc. (Eng.), Professor, Department of Computer Systems in Production Automation, Bauman Moscow State Technical University. Activity and research interests: numerical methods and algorithms in analyzing the processes of nonlinear deformation of the thin-walled structural elements of machines and devices, development of the critical biomedical technologies, finite element methods in computing and designing products, automation of the product life cycle stages. e-mail: gss@bmstu.ru

SPIN 3142-3809, ORCID 0000-0002-6547-1351, SCOPUS Author ID 6507067486