

Стабилизация четырехзвенного перевернутого маятника на основе преобразования к нормальной форме после продолжения

© А.В. Арцибасов, Д.А. Фетисов

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Российская Федерация

Управление механическими системами в условиях дефицита управляющих параметров является сложной задачей, для ее решения нет единых подходов. Один из возможных способов справиться с этой проблемой — преобразование динамической системы, описывающей движение механизма, к нормальной форме Исидори. Показано, как такое преобразование позволяет решить задачу стабилизации четырехзвенного перевернутого маятника. Предполагается, что в качестве управляющих воздействий рассматриваются крутящие моменты в шарнирах, соединяющих соседние звенья. На основе идеи, предложенной в работе К. Шевальро, Дж. Гриззла и К. Муга, показано, что задача стабилизации неустойчивого положения равновесия маятника может быть решена на основе преобразования к нормальной форме после предварительного продолжения двух из трех управлений в системе. В качестве подтверждения работоспособности предлагаемого подхода приведены результаты численного моделирования.

Ключевые слова: нормальная форма, стабилизация, минимально фазовая система, продолжение системы с управлением

Введение. Управление механическими системами, в которых число степеней свободы совпадает с числом управляющих параметров, как правило, не является сложной задачей и в большинстве случаев может быть сведено к преобразованию системы в линейную управляемую систему [1] либо к декомпозиции системы на более простые подсистемы [2]. Если число управляющих параметров в механической системе меньше числа степеней свободы, то задача управления в большинстве случаев становится нетривиальной и требуется применять более изощренные приемы. Общих подходов к управлению механическими системами в таких случаях нет. В литературе известны приемы, применение которых помогает решить ту или иную задачу. К их числу относятся управление на основе использования свойства пассивности [3, 4], метод обхода интегратора [5, 6], управление на основе преобразования к нормальной форме Исидори [7], управление с применением методов декомпозиции [8].

К системам с дефицитом управляющих параметров относятся и многозвенные маятники, у которых в качестве управлений рассматриваются крутящие моменты в шарнирах, соединяющих соседние звенья. Задача управления такими многозвенными механизмами остается актуальной, так как широко применяется в робототехнике,

в первую очередь, в задачах управления змееподобными [9, 10] и шагающими [11, 12] роботами.

При рассмотрении задачи управления четырехзвенным перевернутым маятником предполагалось, что управляющих параметров три и ими являются крутящие моменты в шарнирах. Проблема управления подобным четырехзвенным механизмом возникает, например, при моделировании фазы одноопорного движения в задаче управления перемещением семизвенного двуногого шагающего робота [13]. В этом случае четыре звена можно трактовать как стопу, голень, бедро опорной ноги и туловище. Для решения задачи стабилизации четырехзвенного перевернутого маятника используется подход, предложенный в работе [14], который основан на преобразовании динамической системы, описывающей движение маятника, к нормальной форме Исидори после предварительного продолжения двух из трех управлений в системе.

Предварительные сведения. При решении задачи стабилизации маятника будут использованы такие термины, как нормальная форма динамической системы, относительный порядок выхода и минимально фазовая система. Для того чтобы вспомнить эти понятия, стоит рассмотреть аффинную стационарную систему

$$\dot{x} = A(x) + \sum_{i=1}^m B_i(x)u_i, \quad y = h(x), \quad (1)$$

где $x = (x_1, \dots, x_n)^T \in R^n$ — состояние; $A(x) = (a_1(x), \dots, a_n(x))^T$; $B_i(x) = (b_{i1}(x), \dots, b_{in}(x))^T$; $a_j, b_{ij} \in C^\infty(R^n)$; $i = \overline{1, m}$; $j = \overline{1, n}$; $u = (u_1, \dots, u_m)^T \in R^m$ — управление; $y = (y_1, \dots, y_m)^T \in R^m$ — выход; $h(x) = (h_1(x), \dots, h_m(x))^T$; $h_i \in C^\infty(R^n)$, $i = \overline{1, m}$.

Пусть $x_0 \in R^n$ — положение равновесия системы (1), т. е. выполнено равенство $A(x_0) = 0$. Будем полагать, что в положении равновесия x_0 выход y обращается в нуль, т. е. имеет место равенство $h(x_0) = 0$. Требуется решить задачу стабилизации положения равновесия x_0 системы (1).

Системе (1) соответствует распределение $S = \text{span}\{B_1, \dots, B_m\}$, порожденное управляющими векторными полями B_1, \dots, B_m . Распределение S называют инволютивным на открытом множестве $M \subset R^n$, если для любых двух векторных полей $\xi_1, \xi_2 \in S$ на множестве M выполнено условие $[\xi_1, \xi_2] \in S$, где $[\xi_1, \xi_2]$ — коммутатор векторных полей ξ_1 и ξ_2 .

Известно [7], что относительный порядок выхода $y = h(x)$ в точке x_0 равен (r_1, \dots, r_m) , если в окрестности точки x_0 выполнены равенства $B_j A^k h_i(x) = 0$, $i, j = \overline{1, m}$, $k = \overline{0, r_i - 2}$, а матрица $G(x) = (B_j A^{r_i - 1} h_i(x))_{i, j = \overline{1, m}}$ невырождена в точке x_0 . Данное определение имеет следующую трактовку. Относительный порядок выхода $y = h(x)$ в точке x_0 равен (r_1, \dots, r_m) , если: а) при последовательном дифференцировании выхода y_i в силу системы (1) управления впервые появляются в производной порядка r_i , $i = \overline{1, m}$; б) матрица $G(x)$, составленная из коэффициентов при u_1, \dots, u_m в выражениях для $y_1^{(r_1)}, \dots, y_m^{(r_m)}$, невырождена в точке x_0 .

Согласно [7], если относительный порядок выхода $y = h(x)$ в точке x_0 равен (r_1, \dots, r_m) , то имеет место неравенство $r_1 + \dots + r_m \leq n$, а функции

$$z_1^i = h_i(x), z_2^i = Ah_i(x), \dots, z_{r_i}^i = A^{r_i - 1} h_i(x), \quad i = \overline{1, m}$$

независимы в окрестности точки x_0 .

Введем обозначение $r = r_1 + \dots + r_m \leq n$. Из определения относительного порядка следует, что функции из набора

$$F = \{z_1^i = h_i(x), z_2^i = Ah_i(x), \dots, z_{r_i - 1}^i = A^{r_i - 2} h_i(x), i = \overline{1, m}\}$$

являются первыми интегралами распределения S . В наборе F содержится $r - m$ функций. Дальнейшие рассуждения предполагают выполнение следующих двух условий: а) $\dim S(x) = m$ для всех точек x из некоторой окрестности точки x_0 ; б) распределение S инволютивно в окрестности точки x_0 . Если эти условия выполняются, то в окрестности точки x_0 у распределения S существует $n - m$ независимых первых интегралов. Обозначим через $\eta_1(x), \dots, \eta_{n-r}(x)$ первые интегралы распределения S , независимые от функций из F . Рассмотрим замену переменных Φ , задаваемую соотношениями

$$z_1^i = h_i(x), z_2^i = Ah_i(x), \dots, z_{r_i}^i = A^{r_i - 1} h_i(x), \quad i = \overline{1, m},$$

$$\eta_1 = \eta_1(x), \dots, \eta_{n-r} = \eta_{n-r}(x).$$

Замену Φ всегда можно выбрать так, чтобы выполнялось равенство $\Phi(x_0) = 0$.

Система (1) в новых переменных примет вид

$$\begin{aligned} \dot{z}_1^i &= z_2^i, \dots, \dot{z}_{r_i-1}^i = z_{r_i}^i, \dot{z}_{r_i}^i = f_i(z, \eta) + \sum_{j=1}^m g_{ij}(z, \eta) u_j, \quad i = \overline{1, m}, \\ \dot{\eta}_1 &= q_1(z, \eta), \dots, \dot{\eta}_{n-r} = q_{n-r}(z, \eta), \\ y_1 &= z_1^1, \dots, y_m = z_1^m. \end{aligned} \quad (2)$$

Из невырожденности матрицы $G(x)$ в точке x_0 следует, что в точке $(z, \eta) = 0$ матрица $g(z, \eta) = (g_{ij}(z, \eta))_{i,j=\overline{1,m}}$ является невырожденной.

Систему (2) называют нормальной формой системы (1) в окрестности точки x_0 . Систему уравнений

$$\dot{\eta}_1 = q_1(0, \eta), \dots, \dot{\eta}_{n-r} = q_{n-r}(0, \eta)$$

называют нулевой динамикой системы (2). Отметим, что нулевая динамика описывает поведение системы (2) при условии $y(t) \equiv 0$. Систему (2) называют минимально фазовой, если положение равновесия $\eta = 0$ ее нулевой динамики асимптотически устойчиво. В основе решения задачи стабилизации нулевого положения равновесия для минимально фазовых систем лежит следующее утверждение.

Теорема [7]. Пусть система (2) минимально фазовая. Тогда управление

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ \dots \\ u_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{11}(z, \eta) & \dots & g_{1m}(z, \eta) \\ \dots & \dots & \dots \\ g_{m1}(z, \eta) & \dots & g_{mm}(z, \eta) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -f_1(z, \eta) - c_1^1 z_1^1 - \dots - c_{r_1}^1 z_{r_1}^1 \\ \dots \\ -f_m(z, \eta) - c_1^m z_1^m - \dots - c_{r_m}^m z_{r_m}^m \end{pmatrix},$$

где c_j^i , $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, r_i}$ выбраны так, что многочлены $\lambda^{r_i} + c_{r_i}^i \lambda^{r_i-1} + \dots + c_2^i \lambda + c_1^i$, $i = \overline{1, m}$ являются гурвицевыми, стабилизирует положение равновесия $z = 0$, $\eta = 0$ системы (2).

Постановка задачи. Рассматривается перевернутый маятник, состоящий из четырех невесомых жестких звеньев, на конце каждого из которых закреплен груз. Полагаем, что L_i — длина i -го звена; m_i — масса груза, находящегося на конце i -го звена; $i = \overline{1, 4}$. Соседние звенья маятника соединены шарнирами. В качестве управлений рассматриваются крутящие моменты u_1 , u_2 и u_3 в этих шарнирах. Схема маятника изображена на рис. 1.

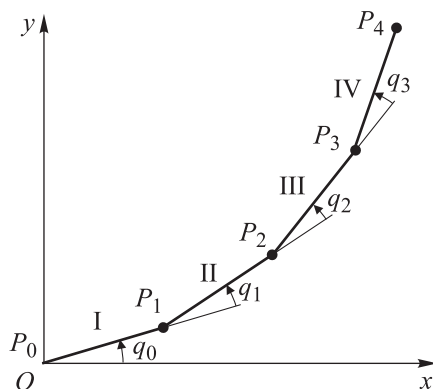


Рис. 1. Схема маятника

Отметим, что указанный маятник имеет бесконечное число положений равновесия [14]. Задача заключается в том, чтобы разработать алгоритм, позволяющий стабилизировать какое-либо из неустойчивых положений равновесия маятника.

Уравнения движения. Обозначим звенья маятника римскими цифрами I, II, III и IV. Через P_0 обозначим закрепленный конец звена I, а через P_1, P_2, P_3, P_4 — конечные точки звеньев I, II, III, IV соответственно. Для описания положений маятника введем декартову систему координат с горизонтально направленной осью Ox , вертикально направленной осью Oy и с началом в точке P_0 (см. рис. 1).

Для описания движения маятника воспользуемся уравнениями Лагранжа второго рода. Введем в качестве обобщенных координат четыре угла: q_0 — угол между осью Ox и звеном I; q_1 — угол между продолжением звена I и звеном II; q_2 — угол между продолжением звена II и звеном III; q_3 — угол между продолжением звена III и звеном IV. Все углы отсчитываются в направлении против хода часовой стрелки.

Для рассматриваемого маятника уравнения Лагранжа второго рода принимают вид

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = Q_k, \quad k = \overline{0,3}.$$

Здесь $L = T - \Pi$ — функция Лагранжа, где T — полная кинетическая энергия маятника, представляющая собой положительно определенную квадратичную форму относительно обобщенных скоростей \dot{q}_i , $i = \overline{0,3}$:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i,j=0}^3 d_{i,j}(q) \dot{q}_i \dot{q}_j,$$

$$d_{i,j}(q) = d_{j,i}(q), \quad i, j = \overline{0,3}, \quad q = (q_0, q_1, q_2, q_3)^T,$$

$$\begin{aligned} d_{0,0}(q) = & m_4(L_3^2 + L_4^2) + (m_2 + m_3 + m_4)L_2^2 + (m_1 + m_2 + m_3 + m_4)L_1^2 + \\ & + 2L_1(L_4m_4 \cos(q_1 + q_2 + q_3) + L_3(m_3 + m_4) \cos(q_1 + q_2)) + m_3L_3^2 + \\ & + 2L_2(L_4m_4 \cos(q_2 + q_3) + (m_3 + m_4)L_3 \cos q_2) + 2m_4L_3L_4 \cos q_3 + \\ & + 2L_1L_2(m_2 + m_3 + m_4) \cos q_1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_{0,1}(q) = & m_3L_3^2 + m_4(L_3^2 + L_4^2) + (m_2 + m_3 + m_4)L_2^2 + 2m_4L_3L_4 \cos q_3 + \\ & + L_1((m_3 + m_4)L_3 \cos(q_1 + q_2) + (m_2 + m_3 + m_4)L_2 \cos q_1) + \\ & + 2L_2(L_4m_4 \cos(q_2 + q_3) + (m_3 + m_4)L_3 \cos q_2) + \\ & + L_1L_4m_4 \cos(q_1 + q_2 + q_3), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_{0,2}(q) = & m_4(L_3^2 + L_4^2) + L_2(m_4L_4 \cos(q_2 + q_3) + (m_3 + m_4)L_3 \cos q_2) + \\ & + L_1(m_4L_4 \cos(q_1 + q_2 + q_3) + (m_3 + m_4)L_3 \cos(q_1 + q_2)) + \\ & + m_3L_3^2 + 2m_4L_3L_4 \cos q_3, \end{aligned}$$

$$d_{0,3}(q) = L_4(L_1 \cos(q_1 + q_2 + q_3) + L_2 \cos(q_2 + q_3) + L_3 \cos q_3 + L_4)m_4,$$

$$\begin{aligned} d_{1,1}(q) = & 2m_4L_3L_4 \cos q_3 + m_4L_4^2 + (m_3 + m_4)L_3^2 + (m_2 + m_3 + m_4)L_2^2 + \\ & + 2L_2(m_4L_4 \cos(q_2 + q_3) + (m_3 + m_4)L_3 \cos q_2), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_{1,2}(q) = & 2m_4L_3L_4 \cos q_3 + m_4L_4^2 + (m_3 + m_4)L_3^2 + \\ & + L_2(m_4L_4 \cos(q_2 + q_3) + (m_3 + m_4)L_3 \cos q_2), \end{aligned}$$

$$d_{1,3}(q) = L_4(L_2 \cos(q_2 + q_3) + L_3 \cos q_3 + L_4)m_4,$$

$$d_{2,2}(q) = 2m_4L_3L_4 \cos q_3 + m_4L_4^2 + (m_3 + m_4)L_3^2,$$

$d_{2,3}(q) = L_4(L_3 \cos q_3 + L_4)m_4$, $d_{3,3}(q) = m_4L_4^2$; Π — потенциальная энергия маятника, описываемая выражением

$$\begin{aligned} \Pi(q) = & (m_1 + m_2 + m_3 + m_4)gL_1 \sin q_0 + (m_2 + m_3 + m_4)gL_2 \sin(q_0 + q_1) + \\ & + (m_3 + m_4)gL_3 \sin(q_0 + q_1 + q_2) + m_4gL_4 \sin(q_0 + q_1 + q_2 + q_3); \end{aligned}$$

g — ускорение свободного падения; Q_k — непотенциальная составляющая обобщенной силы, соответствующей координате q_k , $k = \overline{0,3}$; ясно, что $Q_0 = 0$, $Q_1 = u_1$, $Q_2 = u_2$, $Q_3 = u_3$.

Непосредственные вычисления показывают, что уравнения Лагранжа второго рода приводят к системе

$$\begin{aligned} d_{0,0}(q)\ddot{q}_0 + d_{0,1}(q)\ddot{q}_1 + d_{0,2}(q)\ddot{q}_2 + d_{0,3}(q)\ddot{q}_3 + F_0(q, \dot{q}) &= 0, \\ d_{0,1}(q)\ddot{q}_0 + d_{1,1}(q)\ddot{q}_1 + d_{1,2}(q)\ddot{q}_2 + d_{1,3}(q)\ddot{q}_3 + F_1(q, \dot{q}) &= u_1, \\ d_{0,2}(q)\ddot{q}_0 + d_{1,2}(q)\ddot{q}_1 + d_{2,2}(q)\ddot{q}_2 + d_{2,3}(q)\ddot{q}_3 + F_2(q, \dot{q}) &= u_2, \\ d_{0,3}(q)\ddot{q}_0 + d_{1,3}(q)\ddot{q}_1 + d_{2,3}(q)\ddot{q}_2 + d_{3,3}(q)\ddot{q}_3 + F_3(q, \dot{q}) &= u_3, \end{aligned} \quad (3)$$

где

$$F_k(q, \dot{q}) = \sum_{i,j=0}^3 \dot{q}_j \frac{\partial d_{k,j}(q)}{\partial q_i} \dot{q}_i - \frac{\partial T}{\partial q_k} + \frac{\partial \Pi}{\partial q_k}, \quad k = \overline{0,3}.$$

Заметим, что все функции $d_{i,j}(q)$, $i, j = \overline{0,3}$ не зависят от угла q_0 , что свидетельствует о том, что кинетическая энергия механической системы не зависит от этой координаты (хотя и зависит от обобщенной скорости \dot{q}_0).

Введем новые управления v_1 , v_2 и v_3 , которые связаны с u_1 , u_2 и u_3 с помощью равенства

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} &= \left[\begin{pmatrix} d_{1,1} & d_{1,2} & d_{1,3} \\ d_{2,1} & d_{2,2} & d_{2,3} \\ d_{3,1} & d_{3,2} & d_{3,3} \end{pmatrix} - \frac{1}{d_{0,0}} \begin{pmatrix} d_{0,1} \\ d_{0,2} \\ d_{0,3} \end{pmatrix} (d_{0,1}, d_{0,2}, d_{0,3}) \right] \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} + \\ &+ \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{pmatrix} - \frac{F_0}{d_{0,0}} \begin{pmatrix} d_{0,1} \\ d_{0,2} \\ d_{0,3} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Несложно проверить, что функция $d_{0,0}(q)$ положительна, а матрица

$$\tilde{D} = \begin{pmatrix} d_{1,1} & d_{1,2} & d_{1,3} \\ d_{2,1} & d_{2,2} & d_{2,3} \\ d_{3,1} & d_{3,2} & d_{3,3} \end{pmatrix} - \frac{1}{d_{0,0}} \begin{pmatrix} d_{0,1} \\ d_{0,2} \\ d_{0,3} \end{pmatrix} (d_{0,1}, d_{0,2}, d_{0,3})$$

невырождена ни при каких значениях q , поэтому приведенная замена управлений является гладкой и обратимой.

Выполним указанную замену управлений в последних трех уравнениях системы (3):

$$\begin{pmatrix} d_{0,1} \\ d_{0,2} \\ d_{0,3} \end{pmatrix} \ddot{q}_0 + \begin{pmatrix} d_{1,1} & d_{1,2} & d_{1,3} \\ d_{1,2} & d_{2,2} & d_{2,3} \\ d_{1,3} & d_{2,3} & d_{3,3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \\ \ddot{q}_3 \end{pmatrix} = \\ = \left[\begin{pmatrix} d_{1,1} & d_{1,2} & d_{1,3} \\ d_{1,2} & d_{2,2} & d_{2,3} \\ d_{1,3} & d_{2,3} & d_{3,3} \end{pmatrix} - \frac{1}{d_{0,0}} \begin{pmatrix} d_{0,1} \\ d_{0,2} \\ d_{0,3} \end{pmatrix} (d_{0,1}, d_{0,2}, d_{0,3}) \right] \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} - \frac{F_0}{d_{0,0}} \begin{pmatrix} d_{0,1} \\ d_{0,2} \\ d_{0,3} \end{pmatrix}.$$

После группировки слагаемых получим равенство

$$\begin{pmatrix} d_{0,1} \\ d_{0,2} \\ d_{0,3} \end{pmatrix} \ddot{q}_0 + \begin{pmatrix} d_{1,1} & d_{1,2} & d_{1,3} \\ d_{1,2} & d_{2,2} & d_{2,3} \\ d_{1,3} & d_{2,3} & d_{3,3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{q}_1 - v_1 \\ \ddot{q}_2 - v_2 \\ \ddot{q}_3 - v_3 \end{pmatrix} = \\ = -\frac{1}{d_{0,0}} \begin{pmatrix} d_{0,1} \\ d_{0,2} \\ d_{0,3} \end{pmatrix} (d_{0,1}, d_{0,2}, d_{0,3}) \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} - \frac{F_0}{d_{0,0}} \begin{pmatrix} d_{0,1} \\ d_{0,2} \\ d_{0,3} \end{pmatrix}.$$

Сгруппировав слагаемые, содержащие столбец $(d_{0,1}, d_{0,2}, d_{0,3})^T$ и умножив равенство на положительную функцию $d_{0,0}$, получим соотношение

$$\begin{pmatrix} d_{0,1} \\ d_{0,2} \\ d_{0,3} \end{pmatrix} \left[d_{0,0} \ddot{q}_0 + (d_{0,1}, d_{0,2}, d_{0,3}) \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} + F_0 \right] = \\ = -d_{0,0} \begin{pmatrix} d_{1,1} & d_{1,2} & d_{1,3} \\ d_{1,2} & d_{2,2} & d_{2,3} \\ d_{1,3} & d_{2,3} & d_{3,3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{q}_1 - v_1 \\ \ddot{q}_2 - v_2 \\ \ddot{q}_3 - v_3 \end{pmatrix},$$

которое может быть переписано в виде

$$\begin{pmatrix} d_{0,1} \\ d_{0,2} \\ d_{0,3} \end{pmatrix} \left[d_{0,0} \ddot{q}_0 + d_{0,1} \ddot{q}_1 + d_{0,2} \ddot{q}_2 + d_{0,3} \ddot{q}_3 + F_0 + (d_{0,1}, d_{0,2}, d_{0,3}) \begin{pmatrix} v_1 - \ddot{q}_1 \\ v_2 - \ddot{q}_2 \\ v_3 - \ddot{q}_3 \end{pmatrix} \right] =$$

$$= -d_{0,0} \begin{pmatrix} d_{1,1} & d_{1,2} & d_{1,3} \\ d_{1,2} & d_{2,2} & d_{2,3} \\ d_{1,3} & d_{2,3} & d_{3,3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{q}_1 - v_1 \\ \ddot{q}_2 - v_2 \\ \ddot{q}_3 - v_3 \end{pmatrix}.$$

Выражение $d_{0,0}\ddot{q}_0 + d_{0,1}\ddot{q}_1 + d_{0,2}\ddot{q}_2 + d_{0,3}\ddot{q}_3 + F_0$ есть левая часть первого уравнения системы (3), поэтому приходим к соотношению

$$\begin{pmatrix} d_{0,1} \\ d_{0,2} \\ d_{0,3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_{0,1} & d_{0,2} & d_{0,3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 - \ddot{q}_1 \\ v_2 - \ddot{q}_2 \\ v_3 - \ddot{q}_3 \end{pmatrix} + d_{0,0} \begin{pmatrix} d_{1,1} & d_{1,2} & d_{1,3} \\ d_{1,2} & d_{2,2} & d_{2,3} \\ d_{1,3} & d_{2,3} & d_{3,3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{q}_1 - v_1 \\ \ddot{q}_2 - v_2 \\ \ddot{q}_3 - v_3 \end{pmatrix} = 0,$$

которое равносильно равенству

$$\left[d_{0,0} \begin{pmatrix} d_{1,1} & d_{1,2} & d_{1,3} \\ d_{1,2} & d_{2,2} & d_{2,3} \\ d_{1,3} & d_{2,3} & d_{3,3} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} d_{0,1} \\ d_{0,2} \\ d_{0,3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_{0,1} & d_{0,2} & d_{0,3} \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} \ddot{q}_1 - v_1 \\ \ddot{q}_2 - v_2 \\ \ddot{q}_3 - v_3 \end{pmatrix} = 0.$$

Матрица

$$\bar{D} = d_{0,0} \begin{pmatrix} d_{1,1} & d_{1,2} & d_{1,3} \\ d_{1,2} & d_{2,2} & d_{2,3} \\ d_{1,3} & d_{2,3} & d_{3,3} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} d_{0,1} \\ d_{0,2} \\ d_{0,3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_{0,1} & d_{0,2} & d_{0,3} \end{pmatrix}$$

невыврождена, поскольку $\bar{D} = d_{0,0}(q) \cdot \tilde{D}$, поэтому последние три уравнения системы (3) принимают вид

$$\ddot{q}_1 = v_1, \quad \ddot{q}_2 = v_2, \quad \ddot{q}_3 = v_3.$$

Преобразуем также первое уравнение системы (3). Учитывая соотношение, которым задается кинетическая энергия маятника, запишем первое уравнение системы (3) в виде

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_{i=0}^3 d_{0,i} \dot{q}_i \right) - \frac{\partial T}{\partial q_0} + \frac{\partial \Pi}{\partial q_0} = 0$$

и учтем, что полная кинетическая энергия механической системы не зависит от обобщенной координаты q_0 . Вводя новую переменную состояния $\sigma = d_{0,0}\dot{q}_0 + d_{0,1}\dot{q}_1 + d_{0,2}\dot{q}_2 + d_{0,3}\dot{q}_3$, получаем, что первое уравнение системы (3) распадается на два уравнения первого порядка:

$$\dot{q}_0 = \frac{\sigma}{d_{0,0}(q)} - \frac{d_{0,1}(q)}{d_{0,0}(q)} \dot{q}_1 - \frac{d_{0,2}(q)}{d_{0,0}(q)} \dot{q}_2 - \frac{d_{0,3}(q)}{d_{0,0}(q)} \dot{q}_3, \quad \dot{\sigma} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_0}.$$

Учитывая ранее полученный вид последних трех уравнений системы (3), получим, что движение маятника описывается уравнениями

$$\dot{q}_0 = \frac{\sigma}{d_{0,0}(q)} - \frac{d_{0,1}(q)}{d_{0,0}(q)} \dot{q}_1 - \frac{d_{0,2}(q)}{d_{0,0}(q)} \dot{q}_2 - \frac{d_{0,3}(q)}{d_{0,0}(q)} \dot{q}_3, \quad \dot{\sigma} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_0},$$

$$\ddot{q}_1 = v_1, \quad \ddot{q}_2 = v_2, \quad \ddot{q}_3 = v_3. \quad (4)$$

Здесь $(q_0, q_1, q_2, q_3, \sigma, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_3)^T$ — состояние системы; v_1, v_2, v_3 — управления. Множество положений равновесия системы (4) — это множество состояний, удовлетворяющих системе равенств

$$\sigma = 0, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial q_0} = 0, \quad \dot{q}_1 = 0, \quad \dot{q}_2 = 0, \quad \dot{q}_3 = 0.$$

Таким образом, угловые координаты q_0, q_1, q_2, q_3 в положении равновесия определяются из уравнения $\partial \Pi / \partial q_0(q) = 0$, которое имеет вид

$$(m_1 + m_2 + m_3 + m_4)L_1 \cos q_0 + (m_2 + m_3 + m_4)L_2 \cos(q_0 + q_1) + (m_3 + m_4)L_3 \cos(q_0 + q_1 + q_2) + m_4L_4 \cos(q_0 + q_1 + q_2 + q_3) = 0. \quad (5)$$

Построение минимально фазовой системы, описывающей движение механизма. Чтобы преобразовать систему (4) к минимально фазовой нормальной форме, воспользуемся следующими двумя наблюдениями. Во-первых, заметим, что производная по времени $\dot{\sigma}$ переменной состояния σ не зависит от $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_3$ и зависит только от угловых координат q_0, q_1, q_2 и q_3 . Это означает, что только в третьей производной $\ddot{\sigma}$ этой переменной возникнут управления v_1, v_2 и v_3 .

Во-вторых, следуя работе [14], рассмотрим функцию

$$p_1(q) = q_0 + \int_0^{q_1} \frac{d_{0,1}(\tau, q_2, q_3)}{d_{0,0}(\tau, q_2, q_3)} d\tau,$$

особенностью которой является то, что ее производная в силу системы (4) описывается выражением

$$\dot{p}_1 = \dot{q}_0 + \dot{q}_1 \frac{d_{0,1}(q_1, q_2, q_3)}{d_{0,0}(q_1, q_2, q_3)} + \sum_{k=2}^3 \dot{q}_k \frac{\partial}{\partial q_k} \int_0^{q_1} \frac{d_{0,1}(\tau, q_2, q_3)}{d_{0,0}(\tau, q_2, q_3)} d\tau.$$

Применяя правило дифференцирования интеграла по параметру, получим

$$\begin{aligned} \dot{p}_1 = & \frac{\sigma}{d_{0,0}(q_1, q_2, q_3)} - \frac{d_{0,2}(q_1, q_2, q_3)}{d_{0,0}(q_1, q_2, q_3)} \dot{q}_2 - \frac{d_{0,3}(q_1, q_2, q_3)}{d_{0,0}(q_1, q_2, q_3)} \dot{q}_3 + \\ & + \dot{q}_2 \int_0^{q_1} \frac{\partial}{\partial q_2} \frac{d_{0,1}(\tau, q_2, q_3)}{d_{0,0}(\tau, q_2, q_3)} d\tau + \dot{q}_3 \int_0^{q_1} \frac{\partial}{\partial q_3} \frac{d_{0,1}(\tau, q_2, q_3)}{d_{0,0}(\tau, q_2, q_3)} d\tau. \end{aligned}$$

Введем обозначения

$$\beta_k(q_1, q_2, q_3) = \int_0^{q_1} \frac{\partial}{\partial q_k} \frac{d_{0,1}(\tau, q_2, q_3)}{d_{0,0}(\tau, q_2, q_3)} d\tau - \frac{d_{0,k}(q_1, q_2, q_3)}{d_{0,0}(q_1, q_2, q_3)}, \quad k = 2, 3.$$

Тогда

$$\dot{p}_1 = \frac{\sigma}{d_{0,0}(q_1, q_2, q_3)} + \beta_2(q_1, q_2, q_3) \dot{q}_2 + \beta_3(q_1, q_2, q_3) \dot{q}_3.$$

Таким образом, \dot{p}_1 не зависит от \dot{q}_1 , а значит, зависимость от управления v_1 появится только в третьей производной функции p_1 . Однако можно заметить, что \dot{p}_1 зависит от \dot{q}_2 и \dot{q}_3 , поэтому \ddot{p}_1 будет содержать \dot{v}_2 и \dot{v}_3 . Введем новые управления $\mu_2 = \dot{v}_2$, $\mu_3 = \dot{v}_3$ и рассмотрим функции $v_2 = \dot{q}_2$, $v_3 = \dot{q}_3$ как новые переменные состояния. Переобозначим $v_1 = \mu_1$, чтобы оперировать управлением $\mu = (\mu_1, \mu_2, \mu_3)$ с одинаковыми обозначениями для составляющих его компонент.

Описанное расширение системы (4) приводит к системе

$$\begin{aligned} \dot{q}_0 = & \frac{\sigma}{d_{0,0}(q)} - \frac{d_{0,1}(q)}{d_{0,0}(q)} \dot{q}_1 - \frac{d_{0,2}(q)}{d_{0,0}(q)} \dot{q}_2 - \frac{d_{0,3}(q)}{d_{0,0}(q)} \dot{q}_3, \quad \dot{\sigma} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_0}, \\ \ddot{q}_1 = & \mu_1, \quad \ddot{q}_2 = \mu_2, \quad \ddot{q}_3 = \mu_3, \end{aligned} \quad (6)$$

у которой десять переменных состояния $Q = (q_0, q_1, q_2, q_3, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_3, \ddot{q}_2, \ddot{q}_3, \sigma)^T$ и три управления μ_1, μ_2, μ_3 . Выберем в качестве выхода системы (6) набор функций [14]

$$\begin{aligned} y_1 = & \Phi_1(q_0, q_1, q_2, q_3, \sigma) = K(p_1(q_0, q_1, q_2, q_3) - p_1^e) + \sigma, \\ y_2 = & \Phi_2(q_2) = q_2 - q_2^e, \quad y_3 = \Phi_3(q_3) = q_3 - q_3^e, \end{aligned}$$

где K — некоторая положительная константа; $p_1^e = p_1(q_0^e, q_1^e, q_2^e, q_3^e)$; $q_0^e, q_1^e, q_2^e, q_3^e$ — значения углов q_0, q_1, q_2, q_3 в стабилизируемом положении равновесия.

Поскольку только третьи производные функций y_2 и y_3 содержат управления μ_2 , μ_3 и функция y_1 зависит от p_1 и σ , то управления μ_1 , μ_2 , μ_3 впервые появятся в производных третьего порядка функций y_1 , y_2 , y_3 в силу системы (6).

Непосредственное дифференцирование функций y_1 , y_2 , y_3 приводит к следующему результату:

$$\dot{y}_1 = K\dot{p}_1 + \dot{\sigma} = K \frac{\sigma}{d_{0,0}} + K\beta_2\dot{q}_2 + K\beta_3\dot{q}_3 - \frac{\partial\Pi}{\partial q_0} = \dot{\phi}_1(q_0, q_1, q_2, q_3, \dot{q}_2, \dot{q}_3, \sigma),$$

$$\ddot{y}_1 = \psi(q_0, q_1, q_2, q_3, \sigma) +$$

$$+ \left(K \frac{\partial\beta_2}{\partial q_1} \dot{q}_2 + K \frac{\partial\beta_3}{\partial q_1} \dot{q}_3 - \frac{\partial d_{0,0}}{\partial q_1} \frac{K\sigma}{d_{0,0}^2} + \frac{\partial^2\Pi}{\partial q_0^2} \frac{d_{0,1}}{d_{0,0}} - \frac{\partial^2\Pi}{\partial q_0 \partial q_1} \right) \dot{q}_1 +$$

$$+ \left(K \frac{\partial\beta_2}{\partial q_2} \dot{q}_2 + K \frac{\partial\beta_3}{\partial q_2} \dot{q}_3 - \frac{\partial d_{0,0}}{\partial q_2} \frac{K\sigma}{d_{0,0}^2} + \frac{\partial^2\Pi}{\partial q_0^2} \frac{d_{0,2}}{d_{0,0}} - \frac{\partial^2\Pi}{\partial q_0 \partial q_2} \right) \dot{q}_2 +$$

$$+ \left(K \frac{\partial\beta_2}{\partial q_3} \dot{q}_2 + K \frac{\partial\beta_3}{\partial q_3} \dot{q}_3 - \frac{\partial d_{0,0}}{\partial q_3} \frac{K\sigma}{d_{0,0}^2} + \frac{\partial^2\Pi}{\partial q_0^2} \frac{d_{0,3}}{d_{0,0}} - \frac{\partial^2\Pi}{\partial q_0 \partial q_3} \right) \dot{q}_3 +$$

$$+ K\beta_2\ddot{q}_2 + K\beta_3\ddot{q}_3 = \ddot{\phi}_1(q_0, q_1, q_2, q_3, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_3, \ddot{q}_2, \ddot{q}_3, \sigma),$$

$$\dot{y}_2 = \dot{q}_2 = \dot{\phi}_2(\dot{q}_2), \quad \ddot{y}_2 = \ddot{q}_2 = \ddot{\phi}_2(\ddot{q}_2), \quad \dot{y}_3 = \dot{q}_3 = \dot{\phi}_3(\dot{q}_3), \quad \ddot{y}_3 = \ddot{q}_3 = \ddot{\phi}_3(\ddot{q}_3),$$

где ψ — некоторая функция, зависящая от q_0 , q_1 , q_2 , q_3 и σ , выражение для которой не приводится из-за его громоздкости.

Введем функцию $\eta = p_1(q_0, q_1, q_2, q_3)$ и составим соотношения

$$z_1^1 = \phi_1(q_0, q_1, q_2, q_3, \sigma), \quad z_2^1 = \dot{\phi}_1(q_0, q_1, q_2, q_3, \dot{q}_2, \dot{q}_3, \sigma),$$

$$z_3^1 = \ddot{\phi}_1(q_0, q_1, q_2, q_3, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_3, \ddot{q}_2, \ddot{q}_3, \sigma),$$

$$z_1^2 = \phi_2(q_2), \quad z_2^2 = \dot{\phi}_2(\dot{q}_2), \quad z_3^2 = \ddot{\phi}_2(\ddot{q}_2),$$

$$z_1^3 = \phi_3(q_3), \quad z_2^3 = \dot{\phi}_3(\dot{q}_3), \quad z_3^3 = \ddot{\phi}_3(\ddot{q}_3), \quad \eta = p_1(q_0, q_1, q_2, q_3).$$

Дальнейшие рассуждения предполагают, что эти соотношения в окрестности стабилизируемого положения равновесия задают невырожденную замену переменных состояния Φ . На этапе численного моделирования для конкретных значений констант L_i , m_i , $i = \overline{1, 4}$ будет показана невырожденность данной замены в окрестности выбранного положения равновесия системы.

Для того чтобы записать систему (6) в новых переменных, вычислим производные по времени от функций z_3^1 , z_3^2 , z_3^3 в силу системы (6):

$$\begin{aligned} \dot{z}_3^1 &= f(Q) + M_{1,1}\mu_1 + K\beta_2(q_1, q_2, q_3)\mu_2 + K\beta_3(q_1, q_2, q_3)\mu_3, \\ \dot{z}_3^2 &= \mu_2, \quad \dot{z}_3^3 = \mu_3, \end{aligned}$$

где $f(Q)$ — некоторая функция, выражение для которой не приводится из-за его громоздкости,

$$M_{1,1} = K \frac{\partial \beta_2}{\partial q_1} \dot{q}_2 + K \frac{\partial \beta_3}{\partial q_1} \dot{q}_3 - \frac{\partial d_{0,0}}{\partial q_1} \frac{K\sigma}{d_{0,0}^2} + \frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_0^2} \frac{d_{0,1}}{d_{0,0}} - \frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_0 \partial q_1}.$$

В результате система (6) в новых переменных принимает вид

$$\dot{z}_1^1 = z_2^1, \quad \dot{z}_2^1 = z_3^1,$$

$$\begin{aligned} \dot{z}_3^1 &= (f(Q) + M_{1,1}\mu_1 + K\beta_2(q_1, q_2, q_3)\mu_2 + K\beta_3(q_1, q_2, q_3)\mu_3) \Big|_{Q=\Phi^{-1}(z,\eta)}, \\ \dot{z}_1^2 &= z_2^2, \quad \dot{z}_2^2 = z_3^2, \quad \dot{z}_3^2 = \mu_2, \\ \dot{z}_1^3 &= z_2^3, \quad \dot{z}_2^3 = z_3^3, \quad \dot{z}_3^3 = \mu_3, \end{aligned} \quad (7)$$

$$\dot{p}_1 = \left(\frac{\sigma}{d_{0,0}(q)} + \beta_2(q_1, q_2, q_3)\dot{q}_2 + \beta_3(q_1, q_2, q_3)\dot{q}_3 \right) \Big|_{Q=\Phi^{-1}(z,\eta)},$$

где через Φ^{-1} обозначено отображение, обратное к отображению Φ .

Составим матрицу из коэффициентов перед управлениями μ_1 , μ_2 и μ_3 :

$$g(z, \eta) = \begin{pmatrix} M_{1,1} & K\beta_2(q) & K\beta_3(q) \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Big|_{Q=\Phi^{-1}(z,\eta)}.$$

Из вида матрицы g следует, что система (7) имеет относительный порядок выхода, равный $(3, 3, 3)$, в тех точках (z, η) , в которых функция $M_{1,1} \Big|_{Q=\Phi^{-1}(z,\eta)}$ не обращается в нуль. В этих же точках определена замена управлений

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Big|_{Q=\Phi^{-1}(z,\eta)} + \begin{pmatrix} M_{1,1} & K\beta_2 & K\beta_3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Big|_{Q=\Phi^{-1}(z,\eta)} \cdot \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \end{pmatrix}, \quad (8)$$

приводящая систему (7) к виду

$$\begin{aligned} \dot{z}_1^1 &= z_2^1, & \dot{z}_2^1 &= z_3^1, & \dot{z}_3^1 &= w_1, \\ \dot{z}_1^2 &= z_2^2, & \dot{z}_2^2 &= z_3^2, & \dot{z}_3^2 &= w_2, \\ \dot{z}_1^3 &= z_2^3, & \dot{z}_2^3 &= z_3^3, & \dot{z}_3^3 &= w_3, \end{aligned} \quad (9)$$

$$\dot{p}_1 = \left(\frac{\sigma}{d_{0,0}(q)} + \beta_2(q_1, q_2, q_3)\dot{q}_2 + \beta_3(q_1, q_2, q_3)\dot{q}_3 \right) \Big|_{Q=\Phi^{-1}(z,\eta)}.$$

Найдем нулевую динамику системы (9). Приравнивание нулю всех компонент выхода y и их производных по времени приводит к равенствам

$$\sigma = -K(p_1 - p_1^e), \quad q_2 = q_2^e, \quad \dot{q}_2 = 0, \quad q_3 = q_3^e, \quad \dot{q}_3 = 0.$$

Отсюда получаем нулевую динамику системы (9):

$$\dot{p}_1 = -\frac{K}{d_{0,0}(q)|_{Q=\Phi^{-1}(z,\eta)}}(p_1 - p_1^e).$$

Поскольку функция $d_{0,0}$ и число K положительны, нулевая динамика системы (9) является асимптотически устойчивой и, следовательно, система (9) является минимально фазовой.

Отсюда вытекает, что для решения задачи стабилизации положения равновесия системы (9) достаточно подобрать управления w_1 , w_2 и w_3 как функции $w_i = -c_1^i z_1^i - c_2^i z_2^i - c_3^i z_3^i$, $i = 1, 2, 3$, переменных z так, чтобы полиномы $\lambda^3 + c_3^i \lambda^2 + c_2^i \lambda + c_1^i$, $i = 1, 2, 3$, были гурвицевыми. Тогда система (9), замкнутая этим управлением, будет асимптотически устойчивой в нулевом положении равновесия.

Используя соотношение (8), можно найти управления μ_1 , μ_2 и μ_3 , стабилизирующие заданное положение равновесия системы (6). Для этого каждому текущему значению переменных состояния $Q = (q_0, q_1, q_2, q_3, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_3, \ddot{q}_2, \ddot{q}_3, \sigma)^T$ нужно сопоставить значение состояния в новых переменных (z, η) с помощью соотношений, задающих замену Φ . Затем, воспользовавшись равенствами $w_i = -c_1^i z_1^i - c_2^i z_2^i - c_3^i z_3^i$, $i = 1, 2, 3$, следует найти значения управлений w_1 , w_2 и w_3 , которые с помощью соотношения (8) позволят определить значения управлений μ_1 , μ_2 и μ_3 .

Знание управлений $\mu_i = \mu_i(Q)$, $i = \overline{1, 3}$, стабилизирующих положение равновесия системы (6), позволяет стабилизировать заданное положение равновесия и для системы (3). Для этого требуется расширить систему (3) аналогично тому, как была расширена система (4): необходимо ввести новые управления $\mu_2 = \dot{v}_2$ и $\mu_3 = \dot{v}_3$, а переменные \ddot{q}_2 и \ddot{q}_3 должны рассматриваться как новые переменные состояния. После описанного расширения системы (3) получим систему

$$\begin{aligned} d_{0,0}(q)\ddot{q}_0 + d_{0,1}(q)\ddot{q}_1 + d_{0,2}(q)\ddot{q}_2 + d_{0,3}(q)\ddot{q}_3 + F_0(q, \dot{q}) &= 0, \\ d_{0,1}(q)\ddot{q}_0 + d_{1,1}(q)\ddot{q}_1 + d_{1,2}(q)\ddot{q}_2 + d_{1,3}(q)\ddot{q}_3 + F_1(q, \dot{q}) &= u_1, \\ d_{0,2}(q)\ddot{q}_0 + d_{1,2}(q)\ddot{q}_1 + d_{2,2}(q)\ddot{q}_2 + d_{2,3}(q)\ddot{q}_3 + F_2(q, \dot{q}) &= u_2, \\ d_{0,3}(q)\ddot{q}_0 + d_{1,3}(q)\ddot{q}_1 + d_{2,3}(q)\ddot{q}_2 + d_{3,3}(q)\ddot{q}_3 + F_3(q, \dot{q}) &= u_3, \\ \ddot{q}_2 &= \mu_2, \quad \ddot{q}_3 = \mu_3. \end{aligned} \quad (10)$$

Управления u_1 , u_2 и u_3 в такой постановке будут выражаться через управление μ_1 и переменные состояния \ddot{q}_2 и \ddot{q}_3 посредством равенства

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} &= \begin{bmatrix} d_{1,1} & d_{1,2} & d_{1,3} \\ d_{1,2} & d_{2,2} & d_{2,3} \\ d_{1,3} & d_{2,3} & d_{3,3} \end{bmatrix} - \frac{1}{d_{0,0}} \begin{pmatrix} d_{0,1} \\ d_{0,2} \\ d_{0,3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_{0,1} & d_{0,2} & d_{0,3} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \ddot{q}_2 \\ \ddot{q}_3 \end{bmatrix} + \\ &+ \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{pmatrix} - \frac{F_0}{d_{0,0}} \begin{pmatrix} d_{0,1} \\ d_{0,2} \\ d_{0,3} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (11)$$

Далее в систему (10) надо подставить вместо управлений u_1 , u_2 , u_3 соотношения (11) и положить, что μ_1 , μ_2 , μ_3 задаются выражениями, стабилизирующими положение равновесия системы (6). Положение равновесия полученной замкнутой системы будет асимптотически устойчивым.

Численное моделирование. Выберем массы грузов и длины звеньев, равными

$$m_1 = 1 \text{ кг}, \quad m_2 = 4 \text{ кг}, \quad m_3 = 1 \text{ кг}, \quad m_4 = 1 \text{ кг};$$

$$L_1 = 1,5 \text{ м}, \quad L_2 = 2 \text{ м}, \quad L_3 = 1 \text{ м}, \quad L_4 = 0,5 \text{ м}.$$

Выберем положение равновесия, подлежащее стабилизации. Уравнение (5) для определения величин q_0 , q_1 , q_2 и q_3 принимает вид

$$10,5 \cos q_0 + 12 \cos(q_0 + q_1) + 2 \cos(q_0 + q_1 + q_2) + 0,5 \cos(q_0 + q_1 + q_2 + q_3) = 0.$$

Одним из решений данного уравнения является набор значений

$$q_0^e = \frac{\pi}{4} \text{ рад}, q_1^e = \frac{\pi}{2} \text{ рад}, q_2^e = -\frac{\pi}{2} \text{ рад}, q_3^e = \frac{\pi}{2} \text{ рад}.$$

Таким образом, численная реализация предложенного алгоритма будет решать задачу стабилизации положения равновесия $Q^e = (q_0^e, q_1^e, q_2^e, q_3^e, \dot{q}_0^e, \dot{q}_1^e, \dot{q}_2^e, \dot{q}_3^e, \ddot{q}_2^e, \ddot{q}_3^e)^T$ системы (10), где $\dot{q}_0^e = \dot{q}_1^e = \dot{q}_2^e = \dot{q}_3^e = 0$ рад/с, $\ddot{q}_2^e = \ddot{q}_3^e = 0$ рад/с².

Константы $c_j^k, k, j = 1, 2, 3$ в выражениях $w_k = -c_1^k z_1^k - c_2^k z_2^k - c_3^k z_3^k$ для стабилизирующих управлений w_k будем выбирать так, чтобы полиномы $\lambda^3 + c_3^k \lambda^2 + c_2^k \lambda + c_1^k, k = \overline{1, 3}$ имели корни $\lambda_1 = -2, 2; \lambda_2 = -1, 1 + 1,91i; \lambda_3 = -1, 1 - 1,91i$ (это корни фильтра Баттерворта, обеспечивающего наиболее гладкие переходные процессы).

Важным условием корректности использования описанного алгоритма являлись невырожденность замены Φ , а также неравенство нулю функции $M_{1,1}$. В среде MATLAB были найдены значения функций $M_{1,1}$ и $\det(\partial\Phi / \partial Q)$ в точке Q^e : $M_{1,1}(Q^e) = -7,8038 \neq 0$, $\det(\partial\Phi / \partial Q)|_{Q=Q^e} = 60,8994 \neq 0$. Установленные неравенства подтверждают, что предложенный алгоритм может быть применен для стабилизации положения равновесия Q^e .

Выберем начальное состояние $Q^{(0)} = (q_0^{(0)}, q_1^{(0)}, q_2^{(0)}, q_3^{(0)}, \dot{q}_0^{(0)}, \dot{q}_1^{(0)}, \dot{q}_2^{(0)}, \dot{q}_3^{(0)}, \ddot{q}_2^{(0)}, \ddot{q}_3^{(0)})^T$ системы (10), близкое к Q^e :

$$q_0^{(0)} = 0,89 \text{ рад}, q_1^{(0)} = 1,37 \text{ рад}, q_2^{(0)} = -1,47 \text{ рад}, q_3^{(0)} = 1,77 \text{ рад}, \\ \dot{q}_0^{(0)} = \dot{q}_1^{(0)} = \dot{q}_2^{(0)} = \dot{q}_3^{(0)} = 0 \text{ рад/с}, \ddot{q}_2^{(0)} = \ddot{q}_3^{(0)} = 0 \text{ рад/с}^2.$$

В результате интегрирования системы (10) в среде MATLAB с помощью встроенной функции ode45 на отрезке $[0, 40]$ с шагом $\tau = 0,1$ были получены массивы $\{q_0^{(i)}\}_{i=0}^n, \{q_1^{(i)}\}_{i=0}^n, \{q_2^{(i)}\}_{i=0}^n, \{q_3^{(i)}\}_{i=0}^n, \{\dot{q}_0^{(i)}\}_{i=0}^n, \{\dot{q}_1^{(i)}\}_{i=0}^n, \{\dot{q}_2^{(i)}\}_{i=0}^n, \{\dot{q}_3^{(i)}\}_{i=0}^n, \{\ddot{q}_2^{(i)}\}_{i=0}^n, \{\ddot{q}_3^{(i)}\}_{i=0}^n$ значений переменных состояния системы (10), $n = 401$. Графики функций $q_0(t)$,

$q_1(t)$, $q_2(t)$, $q_3(t)$, $\dot{q}_0(t)$, $\dot{q}_1(t)$, $\dot{q}_2(t)$, $\dot{q}_3(t)$, полученных в результате интегрирования, представлены на рис. 2 и 3. Графики управлений $u_1(t)$, $u_2(t)$ и $u_3(t)$ приведены на рис. 4.

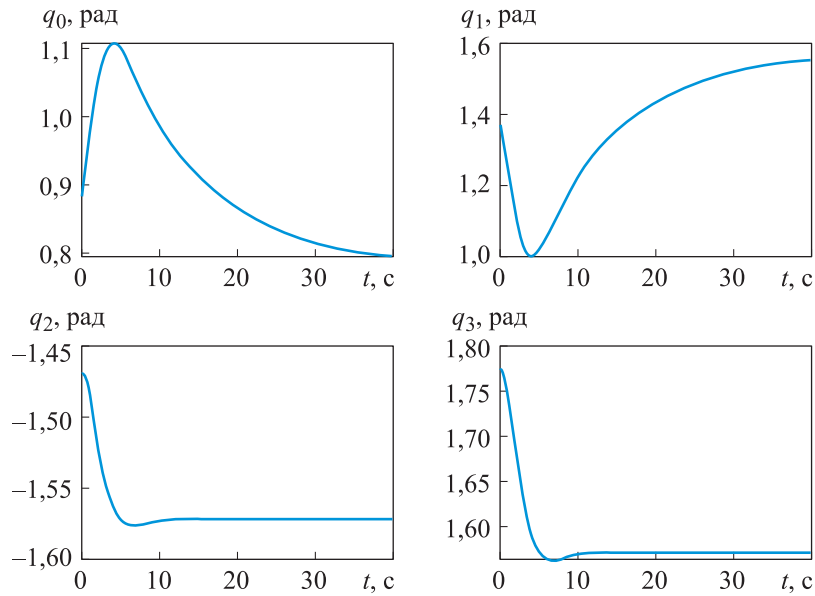


Рис. 2. Графики функций $q_0(t)$, $q_1(t)$, $q_2(t)$, $q_3(t)$

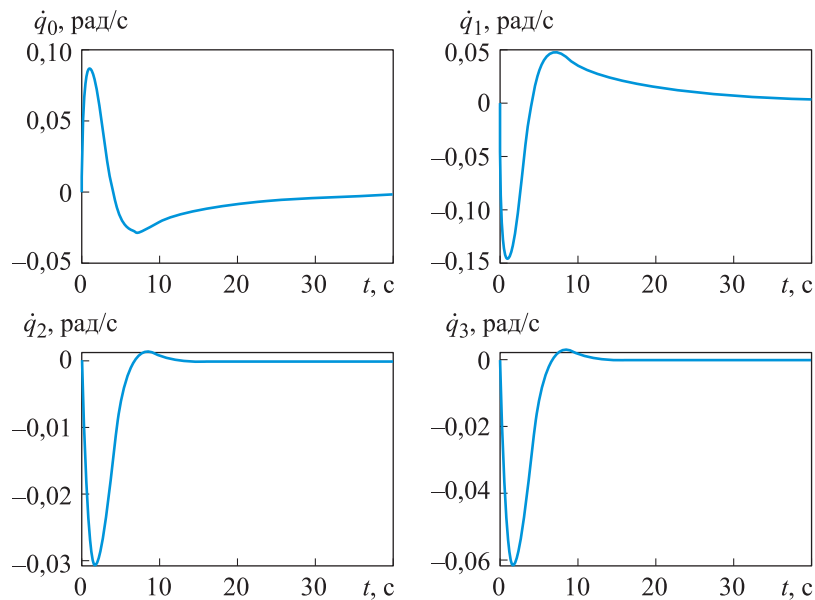


Рис. 3. Графики функций $\dot{q}_0(t)$, $\dot{q}_1(t)$, $\dot{q}_2(t)$, $\dot{q}_3(t)$

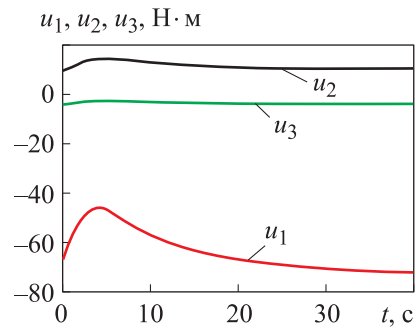


Рис. 4. Графики функций $u_1(t)$, $u_2(t)$, $u_3(t)$

Заключение. Нормальная форма, построенная в настоящей работе, для системы, описывающей движение четырехзвенного перевернутого маятника, может быть использована для решения других задач управления таким маятником, например для решения задачи построения траекторий. Подход, примененный в данной работе, может быть обобщен на случай, когда рассматривается задача управления более сложными механизмами, например, маятниками с большим числом звеньев. Полученные в работе результаты имеют и прикладную направленность, в частности, они могут быть использованы для управления движением змееподобных роботов и перемещением многозвенных шагающих механизмов.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Краснощеченко В.И., Крищенко А.П. *Нелинейные системы: геометрические методы анализа и синтеза*. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2005, 520 с.
- [2] Черноусько Ф.Л., Ананьевский И.М., Решмин С.А. *Методы управления нелинейными механическими системами*. Москва, Физматлит, 2006, 328 с.
- [3] Ortega R., Loria A., Nicklasson P.J., Sira-Ramirez H. *Passivity-based control of Euler–Lagrange systems*. London, Springer, 1998, 543 p.
- [4] Fantoni I., Lozano R. *Non-linear control for underactuated mechanical systems*. London, Springer-Verlag, 2002, 295 p.
- [5] Khalil H.K. *Nonlinear systems*. 3rd edition. Prentice Hall, 2002, 750 p.
- [6] Krstic M., Kanellakopoulos I., Kokotovic P.V. *Nonlinear and adaptive control design*. John Wiley and Sons, 1995, 563 p.
- [7] Isidori A. *Nonlinear control systems*. 3rd edition. London, Springer-Verlag, 1995, 550 p.
- [8] Решмин С.А. Метод декомпозиции в задаче управления лагранжевой системой с дефицитом управляющих параметров. *Прикладная математика и механика*, 2010, т. 74, № 1, с. 151–169.
- [9] Hirose S. *Biologically inspired robots: snake-like locomotors and manipulators*. Oxford University Press, 1993, 220 p.
- [10] Rezapour E., Pettersen K.Y., Liljeback P., Gravdahl J.T., Kelasidi E. Path following control of planar snake robots using virtual holonomic constraints: theory and experiments. *Robotics and Biomimetics*, 2014, vol. 1, art. no 3. <https://doi.org/10.1186/s40638-014-0003-6>

- [11] Формальский А.М. *Перемещение антропоморфных механизмов*. Москва, Наука, 1982, 308 с.
- [12] Westervelt E.R., Grizzle J.W., Chevallereau C., Choi J.H., Morris B. *Feedback control of dynamic bipedal robot locomotion*. CRC Press, 2007, 528 p.
- [13] Tanabe H., Fujii K., Suzuki Y., Kouzaki M. Effect of intermittent feedback control on robustness of human-like postural control system. *Scientific Reports*, 2016, vol. 6, art. no. 22446. <https://doi.org/10.1038/srep22446>
- [14] Chevallereau C., Grizzle J.W., Moog C.H. Nonlinear control of mechanical systems with an unactuated cyclic variable. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2005, vol. 30 (5), pp. 559–576. <https://doi.org/10.1109/TAC.2005.847057>

Статья поступила в редакцию 30.07.2024

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Арцибасов А.В., Фетисов Д.А. Стабилизация четырехзвенного перевернутого маятника на основе преобразования к нормальной форме после продолжения. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2024, вып. 11. EDN FNNPHS

Арцибасов Антон Вячеславович — студент кафедры «Математическое моделирование», МГТУ им. Н.Э. Баумана. Область научных интересов: управление нелинейными системами, робототехника. e-mail: anthony.artsibasov@gmail.com

Фетисов Дмитрий Анатольевич — д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры «Математическое моделирование», МГТУ им. Н.Э. Баумана; автор более 50 научных работ. Область научных интересов: управление нелинейными системами, дифференциально-геометрические методы, робототехника. e-mail: fetisov@bmstu.ru

Quadruple inverted pendulum stabilization based on transformation to a normal form after prolongation

© A.V. Artsibasov, D.A. Fetisov

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, 105005, Russian Federation

Mechanical system control under deficiency of the control parameters appears to be a complex problem, as any unified approaches are missing. A possible approach to solving this problem lies in transforming the dynamic system that describes the mechanism motion in the Isidori normal form. This paper shows how transformation in this form allows solving the stabilization problem for a quadruple inverted pendulum. It is assumed that torques in the hinges connecting the adjacent links are considered as the control actions. Based on the idea proposed in work by C. Chevallereau, J. Grizzle and C. Moog, the paper indicates that stabilization problem of the pendulum unstable equilibrium position could be solved by transformation to the normal form after preliminary prolongation of two of the three controls in the system. The paper presents results of numerical simulation to confirm the proposed approach serviceability.

Keywords: normal form, stabilization, minimum phase system, control system prolongation

REFERENCES

- [1] Krasnoshchechenko V.I., Krishchenko A.P. *Nelineynye sistemy: geometricheskie metody analiza i sinteza* [Nonlinear systems: geometric methods of analysis and synthesis], Moscow, BMSTU Publ., 2005, 520 p.
- [2] Chernousko F.L., Ananyevskiy I.M., Reshmin S.A. *Metody upravleniya nelineynymi mekhanicheskimi sistemami* [Control methods for nonlinear mechanical systems], Moscow, Fizmatlit, 2006, 328 p.
- [3] Ortega R., Loria A., Nicklasson P.J., Sira-Ramirez H. *Passivity-based control of Euler—Lagrange systems*. Springer London, 1998, 543 p.
- [4] Fantoni I., Lozano R. *Non-linear control for underactuated mechanical systems*, Springer-Verlag London, 2002, 295 p.
- [5] Khalil H.K. *Nonlinear systems*. 3rd edition, Prentice Hall, 2002, 750 p.
- [6] Krstic M., Kanellakopoulos I., Kokotovic P.V. *Nonlinear and adaptive control design*. John Wiley and Sons, 1995, 563 p.
- [7] Isidori A. *Nonlinear control systems*. 3rd edition. London, Springer-Verlag, 1995, 550 p.
- [8] Reshmin S.A. Metod dekompozitsii v zadache upravleniya lagranzhevoy sistemoy s defitsitom upravlyayushchikh parametrov [The decomposition method for a control problem for an underactuated Lagrangian system]. *Prikladnaya matematika i mekhanika — Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 2010, vol. 74 (1), pp. 108–121. <https://doi.org/10.1016/j.jappmathmech.2010.03.011>
- [9] Hirose S. *Biologically inspired robots: snake-like locomotors and manipulators*, Oxford University Press, 1993, 220 p.
- [10] Rezapour E., Pettersen K.Y., Liljeback P., Gravdahl J.T., Kelasidi E. Path following control of planar snake robots using virtual holonomic constraints: theory and experiments. *Robotics and Biomimetics*, 2014, vol. 1, art. no. 3. <https://doi.org/10.1186/s40638-014-0003-6>
- [11] Formal'skiy A.M. *Peremeschenie antropomorfnykh mekhanizmov* [Motion of anthropomorphic mechanisms]. Moscow, Nauka Publ., 1982, 308 p.
- [12] Westervelt E.R., Grizzle J.W., Chevallereau C., Choi J.H., Morris B. *Feedback control of dynamic bipedal robot locomotion*. CRC Press, 2007, 528 p.

- [13] Tanabe H., Fujii K., Suzuki Y., Kouzaki M. Effect of intermittent feedback control on robustness of human-like postural control system. *Scientific Reports*, 2016, vol. 6, art. no. 22446. <https://doi.org/10.1038/srep22446>.
- [14] Chevallereau C., Grizzle J.W., Moog C.H. Nonlinear Control of Mechanical Systems with an Unactuated Cyclic Variable. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2005, vol. 30 (5), pp. 559–576. <https://doi.org/10.1109/TAC.2005.847057>.

Artsibasov A.V., Student, Department of Mathematical Modeling, Bauman Moscow State Technical University. Scientific interests: nonlinear control, robotics.
e-mail: anthony.artsibasov@gmail.com

Fetisov D.A., Professor, Dr. Sc. (Phys.-Math.), Department of Mathematical Modeling, Bauman Moscow State Technical University; author of more than 50 scientific papers. Scientific interests: nonlinear control, differential geometric methods, robotics.
e-mail: fetisov@bmstu.ru