

## Гидродинамические особенности при обтекании тел традиционной формы

© Н.И. Сидняев, И.А. Тархов

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Российская Федерация

*Представлены современные подходы к решению проблемы математического моделирования динамических возмущений надводных и подводных тел традиционной формы в морской воде. Даны основные сведения о потоке, о принципе неразрывности, освещены кинематические и динамические стороны общих уравнений движения, их решение для различных условий течения. Приведены допущения классической гидродинамики — однородность, несжимаемость, вязкость, математические приемы, применяемые при решении трех- и двумерных возмущенных движений, а также различные методы приближений для конкретных примеров. Подробно изложены исследования гидродинамического обтекания сублимирующей сферы и способы снижения сопротивления трения путем подвода массы в пристеночную пограничную область потока веществ с малыми значениями вязкости и плотности. Получены зависимости гидродинамических параметров при различных режимах обтекания сферы.*

**Ключевые слова:** гидродинамика, обтекание, сфера, конус, сопротивление, силы, скорость, уравнение, режимы обтекания

**Введение.** Гидродинамика как наука о движении жидкости под действием внешних сил и о механическом взаимодействии между жидкостью и телом получила разнообразное практическое применение при проектировании кораблей, самолетов, расчете трубопроводов и гидротурбин, при исследовании морских течений, изучении фильтрации грунтовых вод и т. п. [1–4]. Развитие прикладной гидродинамики в настоящее время во многом связано с разработкой инженерных методов расчета параметров обтекания различных тел жидкой средой и определением суммарных гидродинамических характеристик тел при движении в воде и при взаимодействии с ней: поля скоростей, сопротивления трения и давления, подъемной силы при внешнем обтекании тел [5–9]. Особое место в развитии гидродинамики занимает вопрос построения адекватных моделей. Несмотря на развитый теоретический аппарат и мощности современных вычислительных средств, теоретическое исследование взаимного влияния тела и среды в динамике оказывается возможным только в исключительных, как правило, сильно упрощенных ситуациях [10–13]. С позиции теоретической механики обсуждается задача о движении твердых тел в среде с сопротивлением, вводится правдоподобная модель воздействия среды на тела, проводится качественный анализ нелинейных движений простых моделей различной конфигурации в потоке

сопротивляющейся среды [14–16]. Современные исследования показывают, что подъемная сила может иметь такую зависимость от обобщенных скоростей, которая носит недиссипативный характер [17, 18]. Указаны условия, в которых возможны устойчивые ротационные режимы движения. Особое внимание уделяется подъемной силе как новому (по сравнению с задачей о движении точки) силовому фактору. Отмечается, что подъемная сила приводит к такой зависимости обобщенных сил от скорости, которая может носить не только диссипативный, но и ускоряющий характер. Наряду с известной неконсервативной зависимостью подъемной силы от координат это свойство служит источником нетривиальных закономерностей движения тела, которые проиллюстрированы примерами [19, 20].

На современном этапе развития авиационной и ракетной техники перед конструкторами-гидромеханиками и учеными поставлена еще одна важная физическая задача, относящаяся к сопротивлению движению тела или системе твердых тел в жидкости, особенно в части снижения трения. Данная проблема является актуальной в настоящее время и представляет значительный теоретический и практический интерес [9, 21–24].

Из трех составляющих сопротивления воды движению твердых тел — волнового, сопротивления формы и сопротивления трения — прежде всего начали уменьшать сопротивление формы путем придания движущимся в жидкости телам обтекаемых плавных обводов. Наименее разработаны вопросы воздействия на сопротивление трения. Возможно снижение сопротивления трения за счет уменьшения смоченной поверхности, но при этом сильно возрастает сопротивление формы, что может вызвать отрывы потоков. В настоящее время существует достаточно ограниченное число работ по снижению гидродинамического сопротивления трения, все они находятся на различных стадиях проверки [3, 9, 12, 14, 17].

Одним из способов решения практических задач, связанных с уменьшением сопротивления трения, является управление пограничным слоем, которое принципиально может быть осуществлено двумя методами [9, 4–6]:

– подачи в пристенную область веществ, свойства которых отличаются от свойств воды. При этом возможно изучение пограничного слоя как с непрерывным распределением свойств жидкости поперек пограничного слоя, так и при наличии границы раздела между жидкостями (воздушная или газовая прослойка между обтекаемой поверхностью и основным потоком воды);

– ламинаризации пограничного слоя, основанной на том, что при больших числах Рейнольдса трение в пограничном слое меньше при ламинарном режиме течения, чем при турбулентном.

Наиболее перспективным и эффективным средством является вдувание в пристеночную область потока веществ с малыми значениями вязкости и плотности, например газов, т. е. создание тонкой воздушной прослойки. В качестве вдуваемого вещества можно использовать воздух. В литературе данный способ уменьшения сопротивления получил название «воздушной смазки» [6, 9]. С точки зрения уменьшения сопротивления трения наибольший интерес представляет пленочный режим газонасыщения, при котором наблюдается четко выраженная, устойчивая поверхность раздела газ — жидкость [6, 10, 13].

Метод теоретического исследования пленочного режима газонасыщения заключается, с одной стороны, в том, что для изучения данного режима используется теория пограничного слоя с учетом влияния плотности и вязкости газа при условии пренебрежения влиянием его вдува на распределение давления, которое предполагается заданным. Форма границы раздела определяется расходом газа и способом его введения в поток. С другой стороны, для исследования искусственно создаваемых газовых пленок используется теория развитого кавитационного течения, в которой не учитываются реальные свойства газа. Движение с поверхностью раздела рассматривается как движение идеальной жидкости, определяемой числами кавитации и Фруда, с подлежащей отысканию свободной линией тока, давление на которой постоянно и равно давлению газа в пленке.

Применение пленочного режима газонасыщения включает в себе ряд допущений о монотонности перехода свойств среды — от свойств газа на стенке до свойств жидкости на границе пограничного слоя [6–9], так как при вдуве газа сквозь пористую поверхность в пограничный слой обычно образуются поверхности раздела, на которых свойства среды могут изменяться скачком, а не монотонно [6, 7, 18]. Необходимо также учитывать, что на характеристики движения жидкости в пограничном слое большое влияние оказывают материал стенки и, прежде всего, отсутствующий в однородных потоках фактор смачиваемости [12, 18]. В данной работе на примере сферы представлены исследования решения задачи обтекания твердого тела жидкостью, проведены расчеты по определению поля скоростей и давления, а также сопоставлены полученные результаты для различных методов решения. Одним из частных случаев исследования проблемы обтекания тела жидкостью является обтекание при малых числах Рейнольдса, так как в этом случае на тело действуют силы вязкости, возникающие вследствие существования пограничного слоя вблизи поверхности тела, и течение является ламинарным.

Цель настоящих исследований — разработка современных подходов к решению математических задач по гидродинамическому нестационарному обтеканию высокоскоростных тел различного назначения в условиях взаимодействия с водной поверхностью.

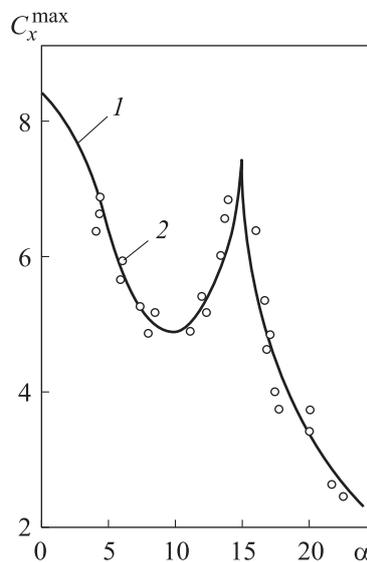
**Гидродинамическое сопротивление при несимметричном погружении конусов.** Рассмотрим характеристики поперечной силы, обусловленной углом атаки. При малых углах  $\gamma$  (острые конусы) и малых углах атаки  $\alpha$  коэффициент поперечной силы будет приблизительно определяться формулами линейной теории, а в пределе — теорией тонкого тела (рис. 1):

$$C_y^{\max} = 2f(\gamma)\alpha, \quad (1)$$

где

$$f(\gamma) = \frac{1}{2}\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \gamma} + \frac{1}{2}\sqrt{1 - \operatorname{tg}^2 \gamma} - \frac{2 \operatorname{tg} \gamma}{1 + \operatorname{tg}^2 \gamma} + \frac{2 \operatorname{tg}^2 \gamma}{(1 + \operatorname{tg}^2 \gamma)^{\frac{3}{2}}} \left( \operatorname{arshtg} \gamma + \operatorname{arsh} \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \gamma}{1 + \operatorname{tg}^2 \gamma} \right). \quad (2)$$

Функция  $f(\gamma)$  отражает влияние конечного значения угла  $\gamma$  и в пределе при  $\gamma \rightarrow 0$  стремится к единице. При больших углах  $\gamma$  (затупленные конусы) поперечная сила может быть оценена по аналогии с горизонтальным ударом эквивалентного эллипсоида вращения со скоростью  $V_0 \sin \alpha$ .



**Рис. 1.** Зависимость коэффициента поперечной силы  $C_x$  от угла атаки  $\alpha$  при  $\beta = 15^\circ$ ,  $\theta = 90^\circ$ :

1 — теоретические данные; 2 — экспериментальные данные

Может быть использован также метод конических сегментов, согласно которому погружающийся конус разбивается радиальными плоскостями на ряд конических сегментов и распределение давления на каждом из этих сегментов такое же, как на вертикально погружающемся конусе с эквивалентным углом конусности. Этот угол для каждого сегмента будет разным. В предельном случае  $\gamma \rightarrow \frac{\pi}{2}$  и  $\alpha \rightarrow 0$ . Такой подход дает простую оценочную формулу

$$C_y^{\max} = \frac{48}{\pi^2} \frac{\alpha}{\beta}, \quad (3)$$

где  $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$ .

При конечных значениях угла атаки  $\alpha$  характеристика  $C_y^{\max}(\alpha)$  является нелинейной (рис. 2). Максимальные нагрузки достигаются при  $\alpha_{\text{кр}} = \beta$ , когда первоначальный удар происходит вдоль образующей конуса. Максимальная осевая сила (сила сопротивления) имеет наибольшее значение при нулевом угле атаки. С возрастанием угла атаки она падает, а затем достигает второго пика при  $\alpha_{\text{кр}} = \beta$ . Отличие траектории от вертикальной в случае острых конусов не приводит к появлению заметных боковых сил. Для тупых конусов влияние угла входа  $\theta$  аналогично влиянию угла атаки на боковые силы. Чем больше угол входа  $\theta$ , тем выше максимальное значение силы сопротивления. Качественная картина протекания характеристик показана на рис. 2.

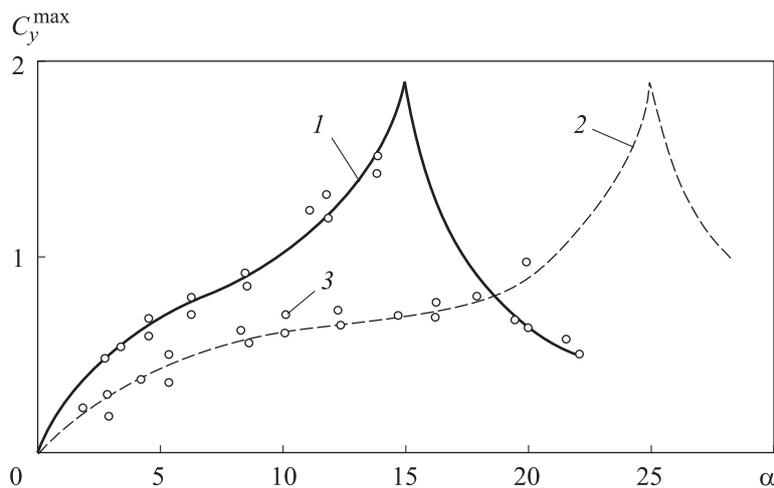
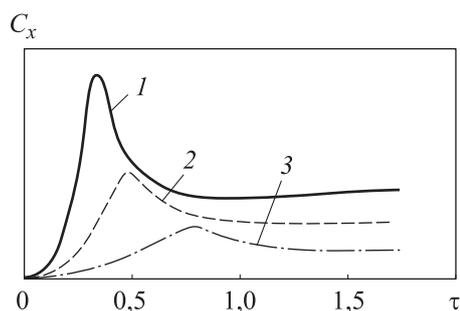
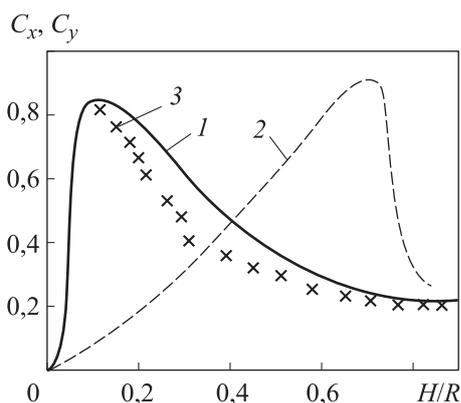


Рис. 2. Зависимость максимальной осевой силы  $C_y$  от угла атаки  $\alpha$ : теоретические данные при  $\beta = 15^\circ$  (1) и  $\beta = 25^\circ$  (2), экспериментальные данные (3)

**Гидродинамическое сопротивление при погружении однородного шара.** В данном случае существенным кинематическим фактором, определяющим картину течения, остается лишь угол приводнения  $\theta$  (рис. 3). В линейной постановке допустимо отдельно рассматривать вертикальное и горизонтальное движения. На рис. 3 представлена горизонтальная компонента силы  $C_x$  в зависимости от времени ( $\tau = V_0 t/R$ ). В рамках «ударной» теории удобно применять для обоих видов движения соответствующий удар трехосного эллипсоида, вертикальная полуось которого равна глубине погружения сферы, горизонтальная полуось — радиусу сферического сегмента в плоскости невозмущенной поверхности жидкости, а третья полуось находится из условия равенства объемов эллипсоида и погруженной части сферы. Для угла приводнения  $45^\circ$  коэффициенты горизонтальной  $C_x$  и вертикальной  $C_y$  компонент сил изображены на рис. 4. Как видим, вертикальная компонента интенсивно нарастает на начальной стадии погружения, а горизонтальная — на конечной.



**Рис. 3.** Зависимость коэффициента горизонтальной компоненты силы  $C_x$  от времени  $\tau$  при  $\theta_1 > \theta_2 > \theta_3$ , где  $\theta_1(1)$ ,  $\theta_2(2)$  и  $\theta_3(3)$  в градусах



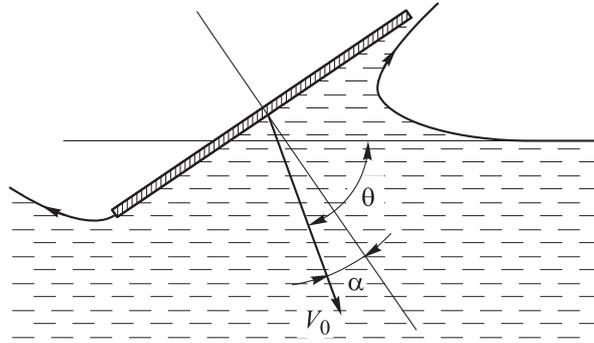
**Рис. 4.** Коэффициенты горизонтальной и вертикальной компонент сил  $C_x$  и  $C_y$  при погружении:

- 1 — для горизонтальной составляющей;
- 2 — для вертикальной составляющей;
- 3 — экспериментальные данные для горизонтальной составляющей

**Гидродинамическое сопротивление при наклонном входе диска.** Пусть диск погружается в воду под углом  $\theta$  и скорость приводнения  $V_0$  отклонена на угол атаки  $\alpha$  от нормали к его поверхности (рис. 5). После касания невозмущенной поверхности воды нижней кромкой диска возникают брызговые струи, основания которых распространяются вдоль кромок диска. Сопротивление формируется за счет нестационарности процесса и распределения давления на диске, которое соответствует квадратичному члену в интеграле Коши — Лагранжа:

$$\frac{\Delta p}{\rho} = -\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{1}{2}(\nabla \varphi)^2. \quad (4)$$

Стадия проникания завершается, когда основание брызговых струй достигает верхней кромки диска.



**Рис. 5.** Схема погружения диска в воду под углом  $\theta$  со скоростью приведения  $V_0$ , отклоненной на угол атаки  $\alpha$

Вместо времени удобно ввести глубину погружения, отсчитываемую вдоль диаметра диска. Очевидно геометрическое соотношение

$$H = V_0 t \frac{\sin \theta}{\cos(\alpha - \theta)}. \quad (5)$$

Опираясь на представление, что нестационарная часть сопротивления отождествляется с понятием присоединенной массы, а другая часть напоминает «кавитационное» сопротивление, можно сконструировать полуэмпирическую зависимость силы сопротивления вида

$$C_x^{\max} = 0,8 \cos \alpha \left[ 1 + \frac{\sin \theta}{\cos(\alpha - \theta)} \right], \quad (6)$$

пригодную в диапазоне  $|\alpha| \leq 20^\circ$ ,  $40^\circ \leq \theta \leq 86^\circ$ . Ясно, что формула исключает случай  $\theta - \alpha = 90^\circ$ , поскольку в рамках несжимаемой жидкости это должно приводить к бесконечным значениям силы. В этом случае нужно вводить поправку на сжимаемость воды:

$$C_y^{\max} = 0,8 \cos \alpha \left[ 1 + \frac{\sin \theta}{\cos(\theta - \alpha - k_1 M)} \right], \quad (7)$$

где на основании экспериментальных данных при числе Маха  $M$  найдено  $k_1 = 0,35$ . Время нарастания максимальной нагрузки определяется зависимостью

$$\tau_{\max} = \frac{1,24}{\operatorname{tg}(\theta - \alpha - k_2 M)}, \quad (8)$$

где  $k_2 = 0,35/(1+3M)$ .

**Проникновение высокоскоростного острого удлиненного тела в жидкость.** Пусть уравнение контура тела  $x = \zeta(y)$ , причем  $|\zeta'(y)| \ll 1$ . Заменяем погруженную часть тела непрерывным распределением источников на отрезке оси  $0 < y \leq H$  и симметричным ему распределением стоков на отрезке оси  $-H \leq y < 0$ . Граничное условие непротекания на поверхности тела снесем на вертикальную ось:

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|_{x=0} \approx H \zeta'(y).$$

На основе теории тонкого тела обильность источников будет

$$q(y) = 2 \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \pm 2H \zeta'(y). \quad (9)$$

Таким образом, потенциал течения можно представить в виде

$$\begin{aligned} \varphi = & -\frac{H}{2\pi} \int_0^H \zeta'(\xi) \ln \sqrt{(y-\xi)^2 + x^2} d\xi + \\ & + \frac{H}{2\pi} \int_{-H}^0 \zeta'(\xi) \ln \sqrt{(y-\xi)^2 + x^2} d\xi. \end{aligned} \quad (10)$$

Распределение давления найдется из линеаризованного уравнения Коши — Лагранжа

$$\Delta p = -\rho \frac{\partial \varphi}{\partial t}. \quad (11)$$

Ограничимся рассмотрением острого клина. Тогда  $|\zeta'(y)| = \operatorname{tg} \gamma \sim \gamma$ . Поэтому

$$\frac{\Delta p}{\rho} = -\frac{H\gamma}{\pi} \ln \frac{H-y}{H+y} - \frac{H\gamma}{\pi} \left( -4y + y \ln \frac{y^2}{H^2 - y^2} + h \ln \frac{H-y}{H+y} \right). \quad (12)$$

Интегрирование дает силу сопротивления

$$F = 2 \int_0^H \Delta p \gamma dy = \frac{2\rho\gamma^2}{\pi} (2 \ln 2 H^2 + 3,4 H^2). \quad (13)$$

При постоянной скорости погружения  $H = \text{const}$ , тогда

$$F = \frac{4}{\pi} \ln 2 \gamma^2 \rho H^3 t = 0,88 \gamma^2 \rho H^3 t. \quad (14)$$

Учет подъема свободной поверхности несколько повышает полученное значение силы сопротивления (при  $\gamma > 2^\circ$  примерно на 10 %).

**Проникновение высокоскоростного затупленного контура в жидкость.** В случае погружения затупленных контуров можно использовать теорию удара эквивалентного тела с последующей поправкой на подпор от встречного движения воды. При сильных затуплениях в качестве эквивалентного тела обычно принимают пластину. Комплексный потенциал течения при поперечном обтекании пластины шириной  $c_0$  можно описать выражением

$$W(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y) = iV_0 \left( \sqrt{z^2 - c_0^2} - z \right). \quad (15)$$

На смоченной части пластины потенциал рассчитывается по формуле

$$\varphi = V_0 \sqrt{c_0^2 - x^2}, \quad |x| < c_0. \quad (16)$$

Для расчета подъема поверхности запишем также выражение для вертикальной скорости жалких частиц на свободной поверхности:

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right|_{y=0} = -V_0 \left( \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{c_0^2}{x^2}}} - 1 \right), \quad |x| > c_0. \quad (17)$$

Ширина эквивалентной пластины без учета подпора воды определяется как произведение

$$c_0 = V_0 t \operatorname{tg} \gamma. \quad (18)$$

Для определения эффекта подпора необходимо решить интегральное уравнение, вытекающее из приближенного кинематического условия и введенное в практику Г. Вагнером в 1932 г.:

$$\eta(x) = \int_0^x u(c) \sqrt{1 - \left(\frac{c}{x}\right)^2} dc; \quad u(c) = \frac{dH}{dc}. \quad (19)$$

Решение данного уравнения записывается в квадратурах:

$$u(c) = \frac{2}{\pi} \left\{ \left. \frac{d\eta(x)}{dx} \right|_{x=0} + c \int_0^c \frac{d}{dx} \left[ \frac{\eta(x)}{x} \right] \frac{dx}{\sqrt{c^2 - x^2}} \right\}. \quad (20)$$

Простое решение получается, если профиль контура представить степенным рядом:

$$\eta(x) = a_0 x + a_1 x^2 + a_2 x^3 + a_3 x^4 + \dots \quad (21)$$

Тогда

$$u(c) = \frac{dH}{dc} = \frac{2}{\pi} a_0 + a_1 c + a_2 \frac{4}{\pi} c^2 + \frac{3}{2} a_3 c^3 + \frac{16}{3\pi} a_4 c^4 + \dots \quad (22)$$

В случае клина

$$\eta(x) = x \operatorname{ctg} \gamma = x \operatorname{tg} \beta; \quad (23)$$

$$\frac{dH}{dc} = \frac{2}{\pi} \operatorname{tg} \beta; \quad (24)$$

$$c = \frac{\pi}{2} H \operatorname{ctg} \beta. \quad (25)$$

В случае квадратичной параболы  $\eta(x) = a_1 x^2$ ,  $c = \sqrt{2Ha_1}$ .

Последний результат можно применить для исследования поперечного погружения кругового цилиндра. Профиль круга можно представить в виде

$$\eta(x) = R - \sqrt{R^2 - x^2} = R \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{x}{R} \right)^2 + \frac{3}{64} \left( \frac{x}{R} \right)^4 + \frac{5}{256} \left( \frac{x}{R} \right)^6 + \dots \right]. \quad (26)$$

Ограничиваясь первым членом разложения, рассчитаем зависимость  $\eta(x) = x^2/2R$ . Следовательно,  $a_1 = 1/2R$ . Из (22) получаем  $c = 2\sqrt{RH}$ . Находим силу сопротивления и соответствующую ударную присоединенную массу пластины:

$$F = \frac{d}{dt} (\lambda_{22} H), \quad (27)$$

$$\lambda_{22} = \rho \frac{\pi}{2} c^2. \quad (28)$$

Отсюда получаем для клина и для кругового цилиндра соответственно

$$F = \pi \rho H H^2 \left( \frac{\pi}{2 \operatorname{tg} \beta} \right)^2, \quad (29)$$

$$F_{\text{ц}} = 2\pi \rho R H^2. \quad (30)$$

В итоге можем записать приближенную формулу для силы сопротивления

$$F = \pi \rho H^2 c \frac{dc}{dH} \left[ 1 - \frac{1}{\pi} \frac{dH}{dc} \left( 1 + \ln 4 \frac{dc}{dH} \right) \right]. \quad (31)$$

В случае клина с использованием формулы (31) получим

$$F = \pi \rho H H^2 \left( \frac{\pi}{2 \operatorname{tg} \beta} \right)^2 K(\beta), \quad (32)$$

$$K(\beta) = 1 - \frac{2}{\pi^2} \operatorname{tg} \beta \left( 1 + \ln \frac{2\pi}{\operatorname{tg} \beta} \right). \quad (33)$$

По оценкам формула (33) дает приемлемые результаты до  $30^\circ$ . Результаты, более близкие к опытным данным, в более широком диапазоне углов килеватости дает аппроксимационная формула, полученная исходя из предельных решений для  $\beta \rightarrow 0$  и  $\beta \rightarrow \frac{\pi}{2}$ , а также из численного решения задачи в точной постановке для  $\beta \rightarrow \frac{\pi}{10}$ :

$$F = \pi \rho H H^2 \left( \frac{\pi}{2\beta} - 1 \right)^2. \quad (34)$$

С помощью ЭВМ получены решения для произвольных углов  $\beta$ .

При  $\beta = \frac{\pi}{4}$  вычислим

$$C_F = \frac{F}{\pi H H^2} = 3,4. \quad (35)$$

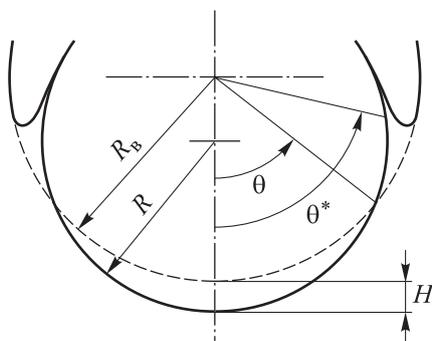
По формуле Вагнера в этом случае получаем  $C_F = 3,14$ . Разница составляет 8 %. Формула Вагнера в силу ее простоты и надежности даваемых результатов является наиболее распространенной.

При поперечном погружении кругового цилиндра из (31) и (34) находим

$$F = 2\pi \rho R H^2 \left[ 1 - \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{H}{R}} \left( 1 + \ln 4 \sqrt{\frac{R}{H}} \right) \right]. \quad (36)$$

Формально формула (36) также должна применяться до углов наклона криволинейного контура порядка  $30^\circ$ , т. е. при относительных погружениях не более 0,1. Однако ее используют до предельных значений относительных погружений  $H/R \sim 0,33$ , когда начинает наблюдаться отрыв основания брызговых струй от поверхности цилиндра. Расчет нагрузок при конечных значениях угла килеватости можно проводить, используя формулы для ударной присоединенной массы погруженной части тела реального очертания, а подпор воды — по теории удара эквивалентного эллиптического цилиндра.

**Проникновение высокоскоростного цилиндра через линейную свободную поверхность.** Рассмотрим случай, когда радиус погружающегося цилиндра  $R$  близок к радиусу впадины  $R_b$ . В отличие от чисто ударного процесса, в данном случае будет также наблюдаться деформация свободной поверхности (рис. 6).



**Рис. 6.** Проникновение цилиндра через линейную свободную поверхность

Величину подпора от встречного движения воды можно оценить с помощью формулы

$$\frac{\theta^*}{\theta} = \sqrt{2 \left( \frac{R_b}{R} - 1 \right)}. \quad (37)$$

Таким образом, присоединенная масса погружающегося в цилиндрическую впадину кругового цилиндра приближенно будет определяться ударной присоединенной массой дужки, но угол эквивалентной дужки будет равен  $\theta^*$ . Глубина погружения цилиндра составит

$$H = (R_b - R) \operatorname{tg}^2 \frac{\theta}{2}. \quad (38)$$

**Скоростное движение тел по свободной поверхности.** Движение тяжелого тела вдоль свободной поверхности, отличительным свойством которого является уравнивание веса тела подъемной силой динамического происхождения, называют глиссированием. В этом случае Архимедовы силы являются относительно малыми. Переход от плавания к глиссированию можно охарактеризовать безразмерным параметром, так называемым числом Фруда по водоизмещению:

$$\operatorname{Fr}_G = \frac{V_0}{\sqrt{g^3 \frac{m}{\rho}}}, \quad (39)$$

где  $V_0$  — скорость привождения;  $m$  — масса тела;  $\rho$  — плотность воды.

Глиссирование наступает при  $Fr_G > 3$ . Разумеется, существенную роль играет и конфигурация подводной части судна. Если представить себе судно водоизмещающего типа в виде полуэллипсоида, то на большей части днища у него будет отрицательный коэффициент давления. Следовательно, при повышении скорости движения за ширину  $B$  принимают размах пластины. Если удлинение пластины  $X = B/l$ , то безразмерная координата центра давления определяется отношением

$$x_d = \frac{x_d}{B} = \frac{x_d}{l} \frac{1}{\lambda}. \quad (40)$$

Задача является плоской, и поэтому допускается применение теории функций комплексного переменного. К настоящему времени известны решения при немалых углах атаки (нелинейная задача), учете весомости воды, различном искривлении пластины, наличии механизации на задней кромке и т. д. Не останавливаясь на сложных теоретических решениях, укажем один полезный практический прием, пригодный при малых углах атаки  $\alpha$  и  $Fr \rightarrow \infty$ .

Рассмотрим линеаризованную задачу о глиссировании пластины. Потенциал возмущенных скоростей должен удовлетворять уравнению Лапласа:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0. \quad (41)$$

На свободной поверхности  $y = f(x)$  должны выполняться два граничных условия: динамическое и кинематическое. Согласно динамическому условию требуется, чтобы на свободной поверхности давление равнялось атмосферному. Тогда из уравнения Бернулли следует

$$p_0 + \frac{\rho V^2}{2} + \rho g f(x) = \frac{\rho V_0^2}{2}. \quad (42)$$

Выразим квадрат скорости:

$$V^2 = \left( V_0 + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2. \quad (43)$$

Подставим выражение (43) в уравнение Бернулли и, отбросив производные в степени выше первой, найдем линеаризованную форму динамического условия на свободной поверхности:

$$f(x) = \frac{V_0}{g} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad (44)$$

при  $y = 0, -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}$ .

Кинематическое условие  $\frac{dS}{dt} = 0$ , где  $S = y - f(x, f)$ , запишем в развернутом виде

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial x} \left( V_0 + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right). \quad (45)$$

После линеаризации (45) получим

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = V_0 \frac{\partial f}{\partial x}. \quad (46)$$

Производную  $\partial f / \partial x$  получим из линейного кинематического условия. Тогда

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{g}{V_0} \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad (47)$$

при  $y = 0, -\frac{l}{2} \leq x \leq \frac{l}{2}$ . Установим теперь граничные условия на пластине. В силу тангенциальности потока

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = -V_0 \alpha, \quad (48)$$

при  $y = 0, -\frac{l}{2} \leq x \leq \frac{l}{2}$ .

На задней кромке должен быть обеспечен плавный сход струй. Остается теперь записать условие на бесконечности:  $\nabla \varphi \rightarrow 0$ , при  $x \rightarrow 0; y \rightarrow 0$ . Сформулированная задача остается еще достаточно сложной. Однако упростим ее дальше, положив, что число Фруда  $Fr \rightarrow \infty$ . Запишем динамическое условие в безразмерном виде

$$\frac{1}{Fr^2} \frac{f(x)}{l} = \frac{1}{V_0} \frac{\partial \varphi}{\partial x}. \quad (49)$$

При  $Fr \rightarrow \infty$  следует, что на свободной поверхности  $y = 0, -\frac{l}{2} \leq x \leq \frac{l}{2}$  справедливо  $\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0$  или  $\varphi = \text{const}$ . Без потери общности можно положить  $\varphi = 0$ . Как и в задаче об ударе, это условие позволяет продолжить несимметричным образом потенциал в верхнюю полуплоскость  $\varphi(x, y) = -\varphi(x, -y)$  и свести задачу о глиссировании пластины по поверхности воды к задаче обтекания пластины под углом атаки безграничным потоком жидкости. Линеаризованная форма

уравнения Бернулли дает соотношение для избыточного давления на верхней и нижней стороне пластины:

$$p - p_0 = \mp \rho V_0 \frac{\partial \varphi}{\partial x}. \quad (50)$$

На нижней стороне наблюдается повышение давления, а на верхней — разрежение. При движении в безграничном потоке результирующая сила создается при суммировании этих давлений. При глиссировании давление на верхней поверхности постоянно (разрежения нет) и нормальная сила создается только за счет повышения давления на нижней стороне пластины. Следовательно, нормальная сила глиссирующей пластины будет вдвое меньше, чем у пластины в безграничном потоке:  $Y_{\text{гл}} = Y_{H=\infty} / 2$ , где  $Y_{\text{гл}}$  — подъемная сила глиссирующей пластины,  $Y_{H=\infty}$  — подъемная сила в безграничной жидкости (на бесконечной глубине).

Аналогия Вагнера позволяет использовать хорошо разработанную теорию профиля в потоке безграничной жидкости. В частности, для профиля известно решение  $C_{yH=\infty} = 2\pi\alpha$ ,  $C_{y_{\text{гл}}=\infty} = \pi\alpha$ . Аналогия Вагнера справедлива не только для профиля, но и для крыла конечного размаха. При этом углы атаки должны быть малыми, а передние кромки крыльев — острыми. Глиссирующее крыло является частным случаем подводного крыла, характеристики которого зависят от глубины по закону

$$Y_H = \left( 1 - \frac{1}{2} e^{-2,5 \frac{H}{b}} \right) Y_{H=\infty}, \quad (51)$$

где  $b$  — хорда крыла.

Для расчета величины подъемной силы глиссирующего крыла необходимо знать смоченную длину  $l$ , которая пока не известна. Для ее определения можно воспользоваться примерно тем же подходом, что и при определении величины подпора от встречного движения воды в задаче о входе в воду. Подъем свободной поверхности можно выразить в виде

$$\eta = \int_{-\infty}^t v dt = -\frac{1}{V_0} \int_{\infty}^{l-l_0} v dx, \quad (52)$$

где  $v$  — вертикальная скорость жидких частиц на свободной поверхности;  $l_0$  — расстояние от задней кромки пластины до уровня невозмущенной свободной поверхности, измеряемое вдоль пластины.

В то же время, непосредственно из геометрических соображений следует

$$\eta = (l - l_0) \sin \alpha \sim (l - l_0). \quad (53)$$

Таким образом, после приравнивания (52) и (53) получаем интегральное уравнение для нахождения неизвестной смоченной длины  $l$ :

$$(l-l_0)ga = \int_{\infty}^{l-l_0} v dx. \quad (54)$$

Вертикальную скорость и нужно выразить с помощью определенной схемы обтекания крыла. Как уже отмечалось, для крыла конечного размаха простейшей является схема одиночного П-образного вихря, более сложной — схема несущей линии. А в общем случае можно рассматривать схему несущей поверхности, применяя затем метод дискретной вихревой решетки. На практике использовались все указанные подходы. В случае одиночного подковообразного вихря снос потока от присоединенного вихря и от свободных вихрей равен соответственно

$$v_{\text{пр}} = \frac{\Gamma}{4\pi(x-\xi)} \frac{B}{\sqrt{(x-\xi)^2 + \left(\frac{B}{2}\right)^2}}, \quad (55)$$

$$v_{\text{св}} = -\frac{\Gamma}{\pi b} \left( 1 - \frac{x-\xi}{\sqrt{(x-\xi)^2 + \left(\frac{B}{2}\right)^2}} \right). \quad (56)$$

Выполнив интегрирование в (54), приходим к соотношению

$$\frac{\Gamma}{4\pi V_0} \varphi(\lambda) = (l-l_0)\alpha, \quad (57)$$

где

$$\varphi(\lambda) = 2 \ln(\sqrt{4\lambda^2 + 1} + 2\lambda) + \frac{1}{\lambda}(1 - \sqrt{4\lambda^2 + 1}); \quad (58)$$

$$\lambda = B/l.$$

Величину циркуляции  $\Gamma$  можно выразить через принятую зависимость для коэффициента подъемной силы крыла. Наиболее простой формулой является

$$C_y = \frac{2\pi\lambda a}{2 + \lambda}. \quad (59)$$

Следовательно, справедливо решение

$$\rho V_0 \Gamma B = \frac{2\pi\lambda}{2+\lambda} \rho \frac{V_0^2}{2} l B \alpha, \quad (60)$$

$$\Gamma = \frac{\pi\lambda}{2+\lambda} V_0 l \alpha.$$

Подставляя данное значение циркуляции в (58), получаем трансцендентное уравнение для определения смоченной длины пластины:

$$\psi(\lambda) = 4(1 - \bar{l}_0) \left( 1 + \frac{2}{\lambda} \right), \quad \bar{l}_0 = l_0/l. \quad (61)$$

Анализ уравнения показывает, что решения получаются при произвольных знаках  $l_0$ . При  $l_0 = 0$  (задняя кромка касается воды)  $\lambda = 7,9$ ; при  $l_0 < 0$  задняя кромка приподнята над невозмущенной поверхностью воды (при  $l_0 = 0,0275$   $\lambda = 22,5$ ); при  $l_0 > 0$  задняя кромка опущена ниже невозмущенной поверхности воды. В общем, для нахождения  $l$  при определенных значениях параметра  $\bar{l}_0$  нужно решать уравнение (10).

**Теоретический анализ обтекания сублимирующей сферы.** Рассмотрим прямолинейное и равномерное движение сферы в вязкой жидкости. Эта задача вполне эквивалентна задаче об обтекании неподвижной сферы потоком жидкости, имеющим на бесконечность заданную скорость  $\vec{v}_\infty$ . Распределение скоростей в первой задаче получается из решения второй задачи вычитанием скорости  $\vec{v}_\infty$ , тогда жидкость на бесконечности оказывается неподвижной, а сфера движется со скоростью  $-\vec{v}_\infty$ . Если рассматривать движение как стационарное, то необходимо говорить именно об обтекании жидкостью неподвижной сферы, так как при движущейся сфере скорость жидкости в каждой точке пространства меняется со временем [4, 5]. Уравнение Навье — Стокса для расчета обтекания сферы используем в виде [6]:

$$(\vec{v}\nabla)\vec{v} = -\frac{1}{\rho} \text{grad } p + \frac{\eta}{\rho} \Delta\vec{v} - \frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + \vec{f}, \quad (62)$$

где  $\vec{f}$  — вектор плотности массовых сил.

Расчет заметно упрощается для движений при малом числе Рейнольдса. Для стационарного движения несжимаемой жидкости это уравнение имеет вид [2, 3]

$$(\vec{v}\nabla)\vec{v} = -\frac{1}{\rho} \text{grad } p + \frac{\eta}{\rho} \Delta\vec{v}. \quad (63)$$

Член  $(\vec{v}\nabla)\vec{v}$  имеет порядок величины  $u^2/l$ , где  $u$  и  $l$  — единицы измерения скорости и длины.

Для выражения  $(\eta/p)\Delta\vec{v} \approx \eta ul^2/\rho$  отношение первой величины ко второй есть число Рейнольдса. Поэтому при малых числах Рейнольдса членом  $(\vec{v}\nabla)\vec{v}$  можно пренебречь, и уравнение движения сводится к линейному уравнению

$$-\text{grad } p + \eta\Delta\vec{v} = 0. \quad (64)$$

Вместе с уравнением непрерывности  $\text{div } \vec{v} = 0$  оно полностью определяет движение. Полезно также заменить уравнение  $\Delta \text{rot } \vec{v} = 0$ , получающееся применением операции  $\text{rot}$  к уравнению (64). Поскольку  $\text{div } (\vec{v} - \vec{v}_\infty) = \text{div } \vec{v} = 0$ , то разность  $\vec{v} - \vec{v}_\infty$  может быть представлена в виде ротора некоторого вектора  $\vec{A}$

$$\vec{v} - \vec{v}_\infty = \text{rot } \vec{A}, \quad (65)$$

причем  $\text{rot } \vec{A}$  обращается на бесконечности в нуль. Вектор  $\vec{A}$  должен быть аксиальным для того, чтобы его ротор был полярным вектором, как скорость. В задаче об обтекании полностью симметричного тела — сферы — нет никаких выделенных направлений за исключением направления  $\vec{v}_\infty$ . Параметр  $\vec{v}_\infty$  должен входить в  $\vec{A}$  линейно (ввиду линейности уравнения движения и граничных условий к нему). Общий вид векторной функции  $\vec{A}(\vec{r})$ , удовлетворяющей всем этим требованиям, есть  $\vec{A} = f'(r)[\vec{n}\vec{v}_\infty]$ , где  $\vec{n}$  — единичный вектор в направлении радиус-вектора  $\vec{r}$  (начало координат выбираем в центре шара), а  $f'(r)$  — скалярная функция от  $r$ . Произведение можно представить в виде градиента некоторой другой функции  $f(r)$ . Таким образом, будем искать скорость в виде

$$\vec{v} = \vec{v}_\infty + \text{rot}[\nabla f \cdot \vec{v}_\infty] = \vec{v}_\infty + \text{rot rot } f\vec{v}_\infty. \quad (66)$$

В равенстве (66) учтено, что  $\vec{v}_\infty = \text{const}$ .

Для определения функции  $f$  воспользуемся уравнением (66). Имеем

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{v} &= \text{rot rot rot } f\vec{v}_\infty = (\text{grad div} - \Delta)\text{rot } f\vec{v}_\infty = \\ &= -\Delta \text{rot } f\vec{v}_\infty \quad \Delta^2 \text{rot } f\vec{v}_\infty = \Delta^2 [\nabla f \cdot \vec{v}_\infty] = [\Delta^2 \text{grad } f \cdot \vec{v}_\infty] = 0. \end{aligned} \quad (67)$$

Отсюда следует, что должно быть  $\Delta^2 \text{grad } f = 0$ . Первое интегрирование дает  $\Delta^2 f = \text{const}$ . Легко видеть, что  $\text{const}$  должна быть положена равной нулю. Действительно, на бесконечности разность  $\vec{v} - \vec{v}_\infty$  должна исчезать, тем более это относится к ее производным. Выражение  $\Delta^2 f$  содержит четвертые производные от  $f$ , между тем как сама скорость выражается через ее вторые производные. В сферических координатах  $\text{div grad } U$  имеет вид

$$\nabla^2 U = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left[ \sin \theta \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial U}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial U}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} \right]. \quad (68)$$

Учитывая при этом, что  $f = f(r)$ , имеем

$$\Delta^2 f \equiv \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{d\Delta f}{dr} \right) = 0. \quad (69)$$

Следовательно,  $\Delta f = 2a/r + c$ . Постоянная  $c$  должна быть положена равной нулю, для того чтобы скорость  $v - v_\infty$  исчезала на бесконечности. Интегрируя остающееся уравнение, находим:  $f = ar + b/r$  (аддитивная постоянная в  $f$  опущена как несущественная, поэтому скорость определяется производными от  $f$ ). Подстановка в (66) дает после простого вычисления

$$\vec{v} = \vec{v}_\infty - a \frac{\vec{v}_\infty + \vec{n}(\vec{v}_\infty \vec{n})}{r} + b \frac{3\vec{n}(\vec{v}_\infty \vec{n}) - \vec{v}_\infty}{r^3}. \quad (70)$$

Тогда компоненты скорости в сферических координатах (с полярной осью в направлении  $\vec{v}_\infty$ ) имеют вид

$$\begin{aligned} v_r &= \vec{v}_\infty \cos \theta \left[ 1 - 2\frac{a}{r} + 2\frac{b}{r^3} \right], \\ v_\theta &= -\vec{v}_\infty \sin \theta \left[ 1 - \frac{a}{r} - \frac{b}{r^3} \right]. \end{aligned} \quad (71)$$

Полученное выражение определяет распределение скоростей вокруг движущейся сферы. Для определения давления подставляем (66) в (64):

$$\text{grad } p = \eta \Delta \vec{v} = \eta \Delta \text{rot rot } f \vec{v}_\infty = \eta \Delta (\text{grad div } f \vec{v}_\infty - \vec{v}_\infty \Delta f), \quad (72)$$

но  $\Delta^2 f = 0$  и поэтому

$$\text{grad } p = \text{grad } (\eta \Delta \text{div } f \vec{v}_\infty) = \text{grad } (\eta \vec{v}_\infty \text{ grad } \Delta f). \quad (73)$$

Отсюда

$$p = \eta \vec{v}_\infty \operatorname{grad} \Delta f + p_0, \quad (74)$$

где  $p_0$  — давление жидкости на бесконечности. С помощью полученных формул можно вычислить силу  $F$  давления текущей жидкости на сферу (или, что есть то же самое, силу сопротивления, испытываемую движущейся в жидкости сферой). Для этого введем сферические координаты с полярной осью вдоль скорости  $\vec{v}_\infty$ , все величины будут в силу симметрии функциями только от  $r$  и полярного угла  $\theta$ . Очевидно, что сила  $F$  направлена по скорости  $\vec{v}_\infty$ . Силу  $F$ , действующую на единицу площади поверхности, можно найти как сумму давления жидкости и силы трения, действующей на поверхность и обусловленной вязкостью:

$$F_i = -\sigma_{ik} n_k = p n_i - \sigma'_{ik} n_k, \quad (75)$$

где  $n$  — единичный вектор нормали, внешний по отношению к поверхности жидкости.

Определяя из формулы (75) компоненты (по нормали и по касательной к поверхности) силы, приложенной к элементу поверхности сферы, и проецируя эти компоненты на направление  $\vec{v}_\infty$ , получим абсолютную величину силы:

$$F = \int (-p \cos \theta + \sigma'_{rr} \cos \theta - \sigma'_{r\theta} \sin \theta) df, \quad (76)$$

где интегрирование производится по всей поверхности сферы.

**Давление однородного стационарного потока на погруженное в него тело.** Пространственное обтекание сферы можно найти, накладывая однородный поток, параллельный, например, оси  $Oz$ , со скоростью  $\vec{v}_\infty$  на поток от диполя, ориентированного вдоль этой оси. Используем функцию тока для составного потока [3]:

$$\psi = \frac{1}{2} v_\infty r^2 \sin^2 \theta + \frac{m}{4\pi r} \sin^2 \theta = \left( \frac{1}{2} v_\infty r^2 + \frac{m}{4\pi r} \right) \sin^2 \theta. \quad (77)$$

Нулевая поверхность тока

$$\psi = \left( \frac{1}{2} v_\infty r^2 + \frac{m}{4\pi r} \right) \sin^2 \theta = 0 \quad (78)$$

разбивается на уравнение поверхности сферы

$$r^3 = -m / (2\pi v_\infty) = R^3, \quad (79)$$

(где  $R$  — радиус сферы) и уравнение оси  $Oz$ :  $\theta = 0, \dots, \pi$ . Желая получить обтекание сферы радиусом  $R$  потоком со скоростью  $v_\infty$  на

бесконечности, направленным вдоль оси  $Oz$ , надо в выражении функции тока использовать параметр  $m = -2\pi R^3 v_\infty$ , тогда будем иметь

$$\psi = \frac{1}{2} v_\infty r^2 \left[ 1 - \left( \frac{R}{r} \right)^3 \right] \sin^2 \theta. \quad (80)$$

После этого нетрудно найти и потенциал скоростей, который при однородном прямолинейном потоке с постоянной скоростью будет иметь вид

$$\varphi = v(x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma), \quad (81)$$

где  $\alpha, \beta, \gamma$  — углы заданного направления потока с осями координат  $Ox, Oy, Oz$ . Можно было бы проинтегрировать систему уравнений связи потенциала  $\varphi$  с функцией тока  $\psi$ , но проще непосредственно составить сумму потенциалов слагаемых потоков:

$$\varphi = v_\infty z - \frac{m \cos \theta}{4\pi r^2} - v_\infty r \left[ 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{R}{r} \right)^3 \right] \cos \theta = v_\infty z \left[ 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{R}{r} \right)^3 \right]. \quad (82)$$

Исследуем полученный поток. Прежде всего найдем распределение скоростей:

$$\begin{cases} v_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r} = v_\infty \left[ 1 - \left( \frac{R}{r} \right)^3 \right] \cos \theta; \\ v_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = -v_\infty \left[ 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{R}{r} \right)^3 \right] \sin \theta. \end{cases} \quad (83)$$

Очевидно, что на поверхности сферы ( $r = R$ ) выполняется основное граничное условие непроницаемости твердой стенки  $v_r = v_n = 0$ , а на бесконечности ( $r \rightarrow \infty$ ),  $v_r = v_\infty \cos \theta$ ,  $v_\theta = -v_\infty \sin \theta$ , скорость однородного потока равна по величине  $v_\infty$  и направлена по оси  $Oz$  в положительную сторону. Как это делалось ранее при изучении плоского движения, разобьем рассматриваемый поток на два: однородный, невозмущенный сферой поток со скоростями  $v_{\infty r} = v_\infty \cos \theta$ ,  $v_{\infty \theta} = -v_\infty \sin \theta$  и поток от диполя, представляющий возмущение однородного потока сферой:

$$v'_r = v_\infty \left( \frac{R}{r} \right)^3 \cos \theta; \quad (84)$$

$$v'_\theta = -\frac{1}{2} v_\infty \left( \frac{R}{r} \right)^3 \sin \theta. \quad (85)$$

Скорости возмущения, как видно из последних равенств, быстро убывают с удалением от возмущающей поток сферы. Убывание имеет порядок обратной пропорциональности кубу расстояния. Распределение скорости по поверхности сферы характеризуется равенством  $v_\theta = -1,5v_\infty \sin \theta$ . В точках полного торможения скорость обращается в нуль. Максимальная скорость будет иметь место в миделевой плоскости при  $\theta = \pi/2$ , она равна по величине  $(v_\theta)_{\max} = 1,5v_\infty$ . В пространственном случае обтекания сферы максимальная скорость на ее поверхности достигает только трех вторых скоростей набегающего потока. Заметим, что в действительности максимальная скорость не достигает столь большого значения. Сфера представляет собой плохо обтекаемое тело, с которого набегающий поток реальной жидкости срывается, не доходя при одних условиях даже до миделевой плоскости. Распределение давления по поверхности сферы получим по теореме Бернулли  $p + \rho v^2/2 = p_0 + \rho v_\infty^2/2$ , из которой следует выражение коэффициента давления

$$\bar{p} = \frac{p - p_0}{0,5\rho v_\infty^2} = 1 - \left( \frac{v}{v_\infty} \right)^2 = 1 - \frac{9}{4} \sin^2 \theta. \quad (86)$$

Как видно непосредственно из формулы (86), в силу симметрии главный вектор сил давления потока идеальной жидкости на поверхность сферы будет равен нулю [6, 7]. Сфера при своем равномерном движении в идеальной жидкости не испытывает со стороны последней никакого сопротивления.

**Решение задачи обтекания сферы в условиях поверхностного массообмена.** Выражение для скорости имеет вид

$$\vec{v} = \vec{v}_\infty - a \frac{\vec{v}_\infty + \vec{n}(\vec{v}_\infty \vec{n})}{r} + b \frac{3\vec{n}(\vec{v}_\infty \vec{n}) - \vec{v}_\infty}{r^3}. \quad (87)$$

Определим  $a$  и  $b$  из граничных условий. Пусть на поверхности шара заданы условия массоподвода, т. е.  $\vec{v} = \vec{v}_{\text{вд}}$  при  $r = R$ :

$$\vec{v}_\infty \left( 1 - \frac{a}{R} - \frac{b}{R^3} \right) + \vec{n}(\vec{v}_\infty \vec{n}) \left( -\frac{a}{R} + \frac{3b}{R^3} \right) = \vec{v}_{\text{вд}}. \quad (88)$$

Поскольку это равенство должно иметь место при произвольном  $\vec{n}$ , получаем систему

$$\begin{cases} 1 - \frac{a}{R} - \frac{b}{R^3} = v_{вд}; \\ -\frac{a}{R} + \frac{3b}{R^3} = 0. \end{cases} \quad (89)$$

Отсюда находим  $a = 3R(1 - v_{вд})/4$ ,  $b = R^3(1 - v_{вд})/4$  и окончательно для данных граничных условий получаем

$$f = ar + \frac{b}{r} = \frac{3Rr(1 - v_{вд})}{4} + \frac{R^3(1 - v_{вд})}{4r}, \quad (90)$$

$$\vec{v} = \vec{v}_\infty \left( 1 - \frac{a}{R} - \frac{b}{R^3} \right) + \vec{n}(\vec{v}_\infty \vec{n}) \left( -\frac{a}{R} + \frac{3b}{R^3} \right) = \vec{v}_\infty \left( 1 - \frac{5(1 - v_{вд})}{4} \right) + \vec{n}(\vec{v}_\infty \vec{n}). \quad (91)$$

Соответственно, компоненты скорости для граничных условий с массоподводом

$$v_r = v_\infty \cos \theta \left[ 1 - \frac{3R(1 - v_{вд})}{2r} + \frac{(1 - v_{вд})R^3}{2r^3} \right]; \quad (92)$$

$$v_\theta = -v_\infty \sin \theta \left[ 1 - \frac{3R(1 - v_{вд})}{4r} - \frac{(1 - v_{вд})R^3}{4r^3} \right]. \quad (93)$$

Выражениями (92) и (93) определяется распределение скоростей вокруг движущейся сферы с массоподводом на границе. Для давления с учетом (90) и (91) получаем выражение в условиях массообмена

$$p = p_0 - \frac{2a\eta v_\infty \cos \theta}{r^2} = p_0 - \frac{3R(1 - v_{вд})\eta v_\infty \cos \theta}{2r^2}. \quad (94)$$

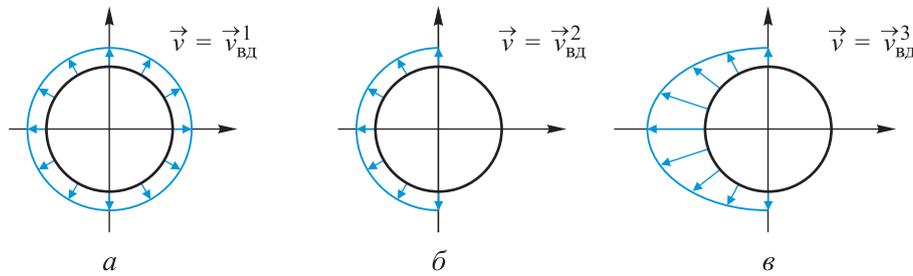
Решив задачу по определению параметров течения при обтекании тела, можно найти его волновое сопротивление путем интегрирования по его поверхности полученного распределения давления и рассчитать коэффициент лобового сопротивления (интегральная характеристика зависит от скорости вдува):

$$c_x = \frac{4}{\pi R^2 \lambda_\infty^2} \int_0^r r dr \int_0^\pi \frac{p}{\rho_0 a_{зв}^2} d\theta - \frac{2}{\gamma_\infty M_\infty^2}, \quad (95)$$

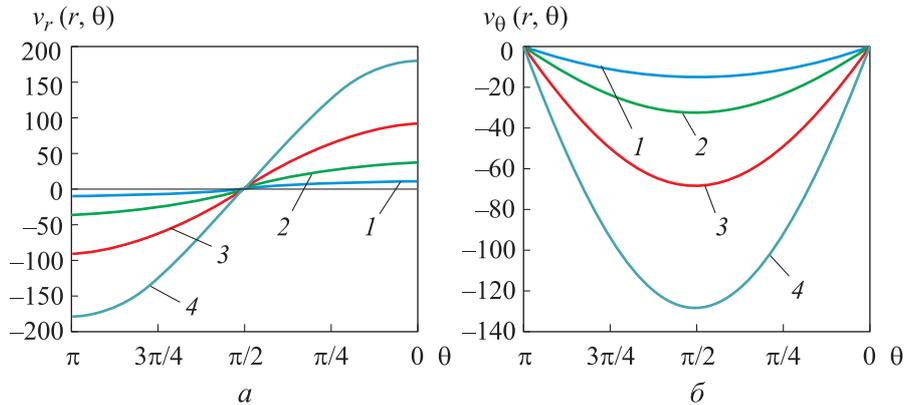
где  $\lambda_\infty$  — коэффициент, равный отношению скорости набегающего потока к критической скорости звука в среде (жидкости),

$\lambda_\infty = v_\infty / a_{зв}$ ;  $a_{зв}$  — скорость звука в среде обтекания, т. е. в жидкости;  $M_\infty$  — число Маха,  $M_\infty = v_\infty / a_{зв}$ ;  $\rho_0$  — давление на бесконечности.

**Расчетные сценарии массоподвода по поверхности сферы.** Рассмотрим случаи массоподвода с постоянной скоростью на внешней границе (скоростью вдува):  $v_{вд}^1 = v_0 = \text{const}$  (рис. 7). Распределение скорости и давления вокруг движущейся сферы для данного граничного условия приведены на рис. 7, а. Результаты расчетов представлены на рис. 8 и 9. Здесь для равномерного массообмена по всей поверхности сферы:  $v_{вд}^1 = v_0 = \text{const}$ .

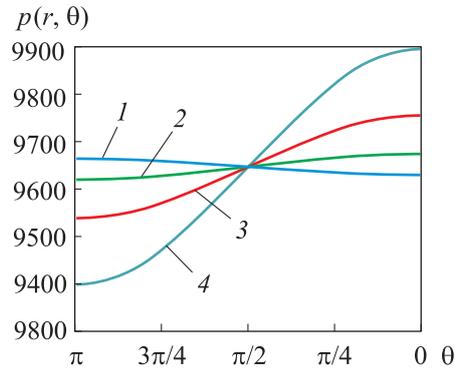


**Рис. 7.** Схема массоподвода с поверхности сферы: равномерного (а), равномерного с передней части (б), переменного с передней части (в)



**Рис. 8.** Распределение скоростей  $v_r$  (а) и  $v_\theta$  (б) вокруг движущейся сферы (схема на рис. 7, а) в зависимости от угла  $\theta$  на расстоянии  $0,5R$  от поверхности сферы при скорости набегающего течения  $v_\infty = 75$  км/ч для различных значений скорости вдува  $v = v_{вд}^1$ :

$$v_0 = 0,5 \text{ м/с (1)}, v_0 = 2 \text{ м/с (2)}, v_0 = 5 \text{ м/с (3)}, v_0 = 10 \text{ м/с (4)}$$

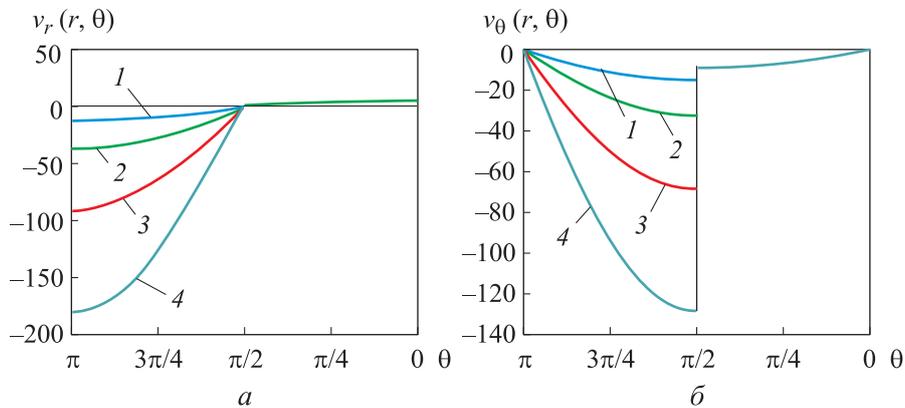


**Рис. 9.** Распределение давления вокруг движущейся сферы (схема на рис. 7, а) в зависимости от угла  $\theta$  на расстоянии  $0,5R$  от поверхности сферы на глубине  $h = 1$  м при скорости набегающего течения  $v_\infty = 75$  км/ч для различных значений

скорости вдува  $v = v_{\text{вд}}^1$ :

$$v_0 = 0,5 \text{ м/с (1)}, v_0 = 2 \text{ м/с (2)}, v_0 = 5 \text{ м/с (3)}, v_0 = 10 \text{ м/с (4)}$$

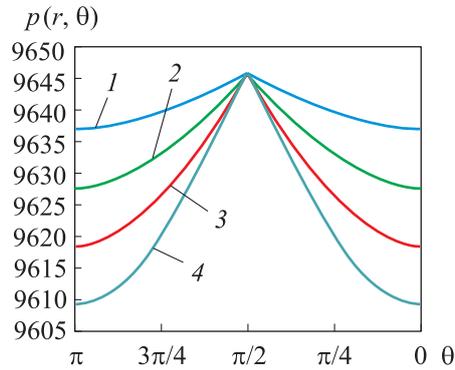
Для случая массоподвода по части поверхности сферы с постоянной скоростью на лобовой части внешней границы (скоростью вдува)  $v_{\text{вд}}^2 = v_0 = \text{const}$  результаты расчета представлены на рис. 10 и 11.



**Рис. 10.** Распределение скоростей  $v_r$  (а) и  $v_\theta$  (б) вокруг движущейся сферы (схема на рис. 7, б) в зависимости от угла  $\theta$  на расстоянии  $0,5R$  от поверхности сферы и глубине  $h = 1$  м при скорости набегающего течения  $v_\infty = 75$  км/ч для различных значений

скорости вдува  $v = v_{\text{вд}}^1$ :

$$v_0 = 0,5 \text{ м/с (1)}, v_0 = 2 \text{ м/с (2)}, v_0 = 5 \text{ м/с (3)}, v_0 = 10 \text{ м/с (4)}$$

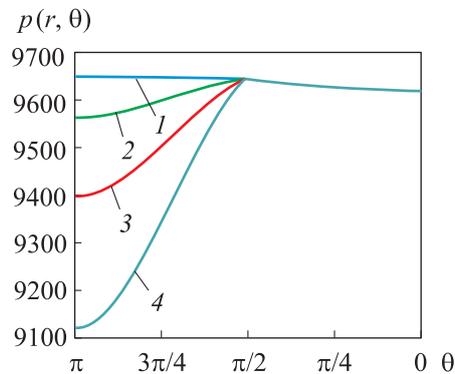


**Рис. 11.** Распределение давления вокруг движущейся сферы (схема на рис. 7, б) в зависимости от угла  $\theta$  на расстоянии  $0,5R$  от поверхности сферы и глубине  $h = 1$  м при скорости набегающего потока  $v_\infty = 75$  км/ч для различных значений

скорости вдува  $v = v_{\text{вд}}^1$ :

$$v_0 = 0,5 \text{ м/с (1), } v_0 = 2 \text{ м/с (2), } v_0 = 5 \text{ м/с (3), } v_0 = 10 \text{ м/с (4)}$$

Для случая переменного массоподвода на лобовой части (рис. 12 и 13) распределения скоростей и давления вокруг движущейся сферы при данном граничном условии приведены на рис. 7, в.



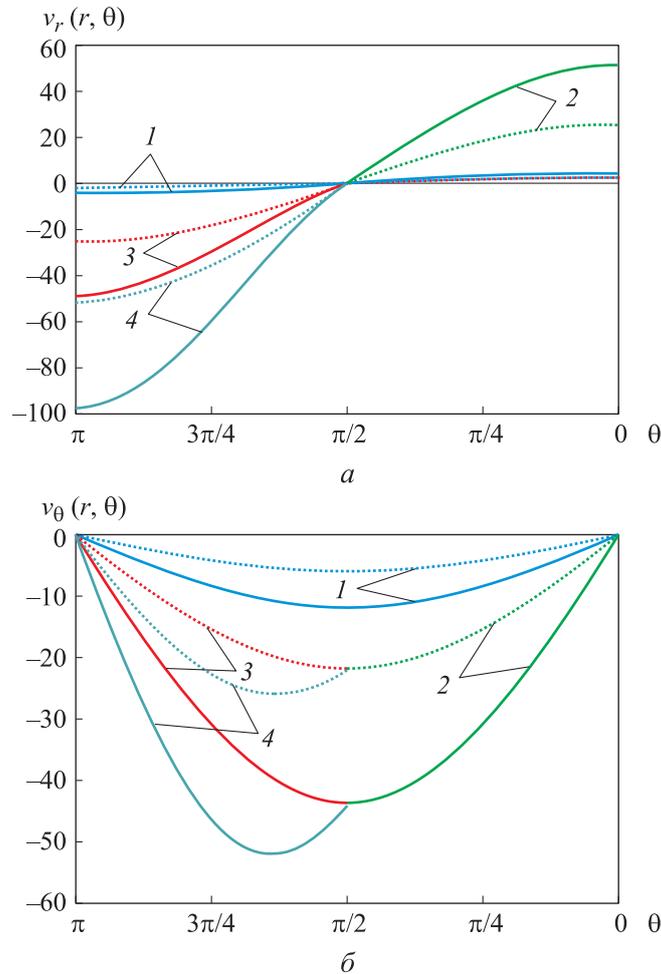
**Рис. 12.** Распределение давлений вокруг движущейся сферы (схема на рис. 7, в) в зависимости от угла  $\theta$  на расстоянии  $0,5R$  от поверхности сферы и глубине  $h = 1$  м при скорости набегающего потока  $v_\infty = 75$  км/ч для различных значений

скорости вдува  $v = v_{\text{вд}}^1$ :

$$v_0 = 0,5 \text{ м/с (1), } v_0 = 2 \text{ м/с (2), } v_0 = 5 \text{ м/с (3), } v_0 = 10 \text{ м/с (4)}$$

Согласно проведенному анализу полученных результатов, массоподвод оказывает большое влияние на гидродинамические характеристики сферы. На рис. 12 и 13 показано, что давление заметно снижается при вдуве газа в пограничный слой, особенно для переменной

скорости ддува. Соответственно снижается и коэффициент лобового сопротивления, что позволяет сделать вывод о возможности и целесообразности применения данного метода управления пограничным слоем в целях снижения сопротивления движущихся в жидкости тел.



**Рис. 13.** Распределение скоростей  $v_r$  (а) и  $v_\theta$  (б) вокруг движущейся сферы (схема на рис. 7, в) в зависимости от угла  $\theta$  при скорости ддува  $v_0 = 2$  м/с на расстоянии  $0,5R$  от поверхности сферы для граничных условий прилипания (1), постоянного массоподвода (2), постоянного массоподвода на части внешней границы (3), переменного массоподвода на части внешней границы (4). Пунктирной линией обозначены распределения скоростей при скорости набегаания  $v_\infty = 50$  км/ч, сплошной — при  $v_\infty = 100$  км/ч

**Заклучение.** Расчет и анализ гидродинамического обтекания тел различного назначения показывают, что, например, при погружении клина сила сопротивления нарастает от нуля по линейному закону, т. е.

при  $\beta \rightarrow 0$  сила стремится к бесконечности. В результате исследований установлено, что при поперечном погружении кругового цилиндра сила сопротивления в момент касания имеет конечное значение, при малых погружениях — не зависит от глубины погружения, а в дальнейшем начинает уменьшаться. Для конечных значений углов килеватости модель эквивалентной пластины в чистом виде становится непригодной, поэтому в работе предложено силу сопротивления вычислять путем интегрирования давления только на той части пластины, где перепад давления является положительным. При этом потенциал скорости записывается в подвижной системе координат с коррекцией. Следует отметить, что при глиссировании не наблюдается обтекание передней кромки, а существуют брызговые струи. Однако в реальных потоках далеко не всегда удается достичь плавного обтекания передней кромки профиля в набегающем потоке, особенно в случаях, когда эта кромка острая. При обтекании острой кромки, как правило, развиваются бесконечные скорости и, соответственно, отрицательные давления. Произведение бесконечного разрежения на бесконечно малую носовую площадку приводит к возникновению давления, которое создает подсосывающую силу. В реальных условиях бесконечных разрежений быть не может. Поток срывается и на верхней поверхности у передней кромки образуется носовой пузырь. В такой ситуации картина течения близка к условиям глиссирования. Таким образом, можно утверждать, что аналогия Вагнера справедлива для профилей, у которых не реализуется подсосывающая сила и возникает сопротивление даже в идеальной жидкости.

Полученные в ходе исследования результаты позволяют считать, что распределение давления по поверхности сферы существенно зависит от интенсивности массоподвода, а массоподвод оказывает большое влияние на гидродинамические характеристики сферы. В частности, давление заметно снижается при вдуве газа в пристеночный пограничный слой, особенно для переменной скорости вдува, соответственно снижается и коэффициент лобового сопротивления, что свидетельствует о возможности и целесообразности применения данного метода управления пограничным слоем в целях снижения сопротивления движущихся в жидкости тел. В статье широко представлены проблемы снижения трения на примере равномерного гидродинамического обтекания сферы с сублимирующей поверхностью.

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Лойцянский Л.Г. *Об изменении сопротивления тел путем заполнения пограничного слоя жидкостями с другими физическими константами. Т. VI.* Москва, ПММ, 1942, с. 12–22.
- [2] Седов Л.И. *Механика сплошной среды.* В 2 томах. Москва, Наука, 1970, т. 1, 492 с.; т. 2, 568 с.

- [3] Сидняев Н.И., Крылов Д.А., Федотов А.А. Обтекание колеблющегося крыла потоком идеальной несжимаемой жидкости. *Динамика возмущений в сплошных средах: 50 лет НУК «Фундаментальные науки» МГТУ им. Н.Э. Баумана: сб. ст.* Сост. Н.И. Сидняев. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2013, с.156–179.
- [4] Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. *Проблемы гидродинамики и их математические модели.* Москва — Ижевск, НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2003. 416 с.
- [5] Андерсон Д., Таннехил Дж., Плетчер Р. *Вычислительная гидромеханика и теплообмен.* Т. 1, 2. Москва, 1990, 385 с.
- [6] Басин А.М., Короткий А.И., Козлов Л.Ф. *Управление пограничным слоем.* Ленинград, 1968, 492 с.
- [7] Биркгоф Г., Сарантонелло Э. *Струи, следы, каверны.* Москва, 1964, 466 с.
- [8] Буйвол В.Н. *Тонкие каверны в течениях с возмущениями.* Киев, 1980, 295 с.
- [9] Сидняев Н.И. *Теория удара и проникания высокоскоростных тел в жидкость.* Москва, КНОРУС, 2021, 296 с.
- [10] Григолюк Э.И., Горшков А.Г. *Взаимодействие упругих конструкций с жидкостью (удар и погружение).* Ленинград, 1976, 199 с.
- [11] Гуревич М.И. *Теория струй идеальной жидкости.* Москва, 1979, 536 с.
- [12] Егоров И.Т., Садовников Ю.М., Исаев И.П., Басин А.М. *Искусственная кавитация.* Ленинград, 1971, 283 с.
- [13] Иванов А.И. *Гидродинамика развитых кавитационных течений.* Ленинград, 1980, 237 с.
- [14] Кочин И.Е., Кибель И.А., Розе И.В. *Теоретическая гидромеханика.* Москва, 1963, 727 с.
- [15] Логвинович Г.В. и др. *Течения со свободными поверхностями.* Киев, 1980, 295 с.
- [16] Лойцянский Л.Г. *Механика жидкости и газа.* Москва, 1970, 678 с.
- [17] Лотов А.Б. *Глиссирование и быстрый вход тел в воду.* Москва, 1984, 107 с.
- [18] Седов Л.И., Степанов Г.Ю., ред. Неустановившиеся течения воды с большими скоростями. *Тр. Международного симпозиума в Ленинграде в 1971 г.* Москва, 1973, 496 с.
- [19] Пантов Е.И., Махин И.И., Шереметов Б.Б. *Основы теории движения подводных аппаратов.* Ленинград, 1973, 216 с.
- [20] Рождественский В.В. *Кавитация.* Ленинград, 1977, 247 с.
- [21] Сагомонян А.Д. *Удар и проникание тел в жидкость.* Москва, 1986, 169 с.
- [22] Титов И.А., Егоров И.Т., Дробленков В.Ф. *Ходкость быстроходных судов.* Ленинград, 1979, 256 с.
- [23] Бивин Ю.К., Глухов Ю.М., Пермяков Ю.В. Вертикальный вход твердых тел в воду. *Изв. АН СССР. МЖГ*, 1985, № 6, с. 3–9.
- [24] Николаев М.Н. Исследование формы свободной поверхности жидкости при глиссировании пластинки конечного размаха. *Изв. АН СССР, МЖГ*, 1983, № 5, с. 16–28.

Статья поступила в редакцию 28.07.2024

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Сидняев Н.И., Тархов И.А. Гидродинамические особенности при обтекании тел традиционной формы. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2024, вып. 10. EDN KCGPVX

**Сидняев Николай Иванович** — д-р техн. наук, профессор, заведующий кафедрой «Высшая математика» научно-учебного комплекса «Фундаментальные науки» МГТУ им. Н.Э. Баумана. Научные интересы: математическое моделирование, гидродинамика, аэродинамика пространственных тел и крыльев при сверх- и гиперзвуковых скоростях, теория конических сверхзвуковых течений газа, взаимодействие ударных волн с пограничным слоем. e-mail: Sidnyaev@bmstu.ru

**Тархов Илья Алексеевич** — студент кафедры «Системы автоматического управления» МГТУ им. Н.Э. Баумана. Научные интересы: динамика аппаратов, математическое моделирование, управление. e-mail: tarkhovia@mail.ru

## **Hydrodynamic features of a flow around the traditionally shaped bodies**

© N.I. Sidnyaev, I.A. Tarkhov

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, 105005, Russian Federation

*The paper presents modern approaches to solving the problem of mathematical simulation of dynamic disturbances of the traditionally shaped surface and underwater bodies in sea water. It provides basic information on the flow and the principle of continuity, highlights kinematic and dynamic aspects of the general equations of motion, as well as their solution for various flow conditions. Assumptions are provided of the classical hydrodynamics including homogeneity, incompressibility, viscosity, mathematical techniques used to solve the three- and two-dimensional disturbed motions, as well as various approximation methods for the specific examples. The paper presents a detailed study of the hydrodynamic flow around the sublimating sphere and methods in reducing frictional resistance by supplying mass to the near-wall boundary region of the flow of substances with low viscosity and density. Dependences are obtained of the hydrodynamic parameters for various flow regimes around a sphere.*

**Keywords:** hydrodynamics, flow, sphere, cone, resistance, forces, velocity, equation, flow regimes

### REFERENCES

- [1] Loitsyanskiy L.G. *Ob izmenenii soprotivleniyam tel putem zapolneniya pogranichnogo sloya zhidkostyami s drugimi fizicheskimi konstantami* [On changing the resistance of bodies by filling the boundary layer with liquids with other physical constants]. *Vol. VI*. Moscow, PMM Publ., 1942, pp. 12–22.
- [2] Sedov L.I. *Mekhanika sploshnoy sredy* [Continuum Mechanics]. In 2 vols. Moscow, Nauka, 1970, vol. 1, 492 p.; vol. 2, 568 p.
- [3] Sidnyaev N.I., Krylov D.A., Fedotov A.A. Obtekanie koleblyushchegosya kryla potokom idealnoy neszhimaemoy zhidkosti [Flow of an ideal incompressible fluid around the oscillating wing]. In: *Dinamika vozmushcheniy v sploshnykh sredakh: 50 let NUK "Fundamentalnye nauki" MGTU im. N.E. Baumana: sb. st.* [Dynamics of disturbances in continuous media: 50 years of the Scientific and Educational Institution "Fundamental Sciences" of the Bauman Moscow State Technical University: coll. of articles]. N.I. Sidnyaev, Compl. Moscow, BMSTU Publ., 2013, pp. 156–179.
- [4] Lavrentyev M.A., Shabat B.V. *Problemy gidrodinamiki i ikh matematicheskie modeli* [Problems of hydrodynamics and their mathematical models]. Moscow – Izhevsk, NITs Regulyatornaya i Khaoticheskaya Dinamika Publ., 2003, 416 p.
- [5] Tannehill J.C. Anderson D.A., Pletcher R.H. *Computational fluid mechanics and heat transfer*. Hemisphere Publishing Corporation, 1984 [In Russ.: Anderson D., Tannekhil Dz., Pletcher R. *Vychislitel'naya gidrodinamika i teplotobmena*. Vols. 1, 2. Moscow, 1990, 385 p.].
- [6] Basin A.M., Korotkiy A.I., Kozlov L.F. *Upravlenie pogranichnym sloem* [Boundary layer control]. Leningrad, 1968, 492 p.
- [7] Birkhoff G., Zarantonello E. *Jets, Wake, and Cavities*. Academic, New York, 1957 [In Russ.: Birkhof G., Sarantonello E. *Strui, sledy, kaverny*. Moscow, 1964, 466 p.].
- [8] Buyvol V.N. *Tonkie kaverny v techeniyakh s vozmushcheniyami* [Thin cavities in flows with disturbances]. Kyiv, 1980, 295 p.

- [9] Sidnyaev N.I. *Teoriya udara i pronikaniya vysokoskorostnykh tel v zhidkost* [Theory of high-speed bodies impact and penetration into liquid]. Moscow, KNORUS Publ., 2021, 296 p.
- [10] Grigolyuk E.I., Gorshkov A.G. *Vzaimodeystvie uprugikh konstruksiy s zhidkostyu (udar i pogruzhenie)* [Interaction of elastic structures with liquid (impact and immersion)]. Leningrad, 1976, 199 p.
- [11] Gurevich M.I. *Teoriya struy idealnoy zhidkosti* [Theory of the ideal liquid jets]. Moscow, 1979, 536 p.
- [12] Egorov I.T., Sadovnikov Yu.M., Isaev I.II., Basin A.M. *Iskusstvennaya kavitatsiya* [Artificial cavitation]. Leningrad, 1971, 283 p.
- [13] Ivanov A.I. *Gidrodinamika razvitykh kavitatsionnykh techeniy* [Hydrodynamics of the developed cavitation flows]. Leningrad, 1980, 237 p.
- [14] Kochin I.E., Kibel I.A., Roze I.V. *Teoreticheskaya gidromekhanika* [Theoretical hydromechanics]. Moscow, 1963, 727 p.
- [15] Logvinovich G.V. et al. *Techeniya so svobodnymi poverkhnostyami* [Flows with free surfaces]. Kyiv, 1980, 295 p.
- [16] Loitsyanskiy L.G. *Mekhanika zhidkosti i gaza* [Mechanics of liquids and gases]. Moscow, 1970, 678 p.
- [17] Lotov A.B. *Glissirovanie i bystryi vkhod tel v vodu* [Planing and rapid entry of bodies into water]. Moscow, 1984, 107 p.
- [18] Sedov L.I., Stepanov G.Yu., eds. *Neustanovivshiesya techeniya vody s bolshimi skorostyami* [Unsteady water flows with high velocities]. In: *Trudy Mezhdunarodnogo simpoziuma v Leningrade v 1971 g.* [Works of the International Symposium in Leningrad in 1971]. Moscow, 1973, 496 p.
- [19] Pantov E.I., Makhin I.I., Sheremetov B.B. *Osnovy teorii dvizheniya podvodnykh apparatov* [Fundamentals of the underwater vehicles motion theory]. Leningrad, 1973, 216 p.
- [20] Rozhdestvensky V.V. *Kavitatsiya* [Cavitation]. Leningrad, 1977, 247 p.
- [21] Sagomonyan A.D. *Udar i pronikaniy tel v zhidkost* [Impact and penetration of bodies into liquid]. Moscow, 1986, 169 p.
- [22] Titov I.A., Egorov I.T., Droblenkov V.F. *Khodkost bystrokhodnykh sudov* [Propulsion of the high-speed vessels]. Leningrad, 1979, 256 p.
- [23] Bivin Yu.K., Glukhov Yu.M., Permyakov Yu.V. *Vertikalnyi vkhod tverdykh tel v vodu* [Vertical entry of solid bodies into water]. *Izv. AN SSSR. MZhG — Fluid Dynamics*, 1985, no. 6, pp. 3–9.
- [24] Nikolaev M.N. *Issledovanie formy svobodnoy poverkhnosti zhidkosti pri glissirovani plastinki konechnogo razmakha* [Investigation of the shape of the liquid free surface during the finite-span plate gliding]. *Izv. AN SSSR. MZhG — Fluid Dynamics*, 1983, no. 5, pp. 16–28.

**Sidnyaev N.I.**, Dr. Sc. (Eng.), Professor, Head of the Department of Higher Mathematics, Scientific and Educational Complex “Fundamental Sciences”, Bauman Moscow State Technical University. Research interests: mathematical simulation, hydrodynamics, aerodynamics of spatial bodies and wings at the super- and hypersonic velocities, theory of conical supersonic gas flows, shock wave interaction with the boundary layers.  
e-mail: Sidnyaev@bmsu.ru

**Tarkhov I.A.**, Student, Department of Automatic Control Systems, Bauman Moscow State Technical University. Research interests: vehicle dynamics, mathematical simulation, control. e-mail: tarkhovia@mail.ru