

## Расчет механических характеристик монослоя полимерного композиционного материала на основе инвариантов Цая — Мело

© Е.А. Башаров

Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), Москва, 125993, Российская Федерация

*Дано обоснование расчетной методики на основе инвариантов Цая — Мело по определению упругих констант монослоя слоистого полимерного композиционного материала (ПКМ). Разработаны алгоритм и расчетная программа в MS Excel на базе встроенного языка программирования Visual Basic for Applications по расчету механических характеристик слоя ПКМ на основе инвариантов Цая — Мело. Приведен пример расчета монослоев композитов, выбранных для апробации. Оформлены таблицы, диаграммы и графики полученных механических характеристик монослоя для разных вариантов укладки пакета композита, выбранного для апробации. Дана оценка точности расчетов по сравнению с расчетами, выполненными в пакете ANSYS, и результатами испытаний образцов ПКМ.*

**Ключевые слова:** полимерный композиционный материал, монослой, матрица жесткости (податливости), упругие константы и инварианты, проектирование композитных конструкций, автоматизация

**Введение.** При создании авиационных конструкций из полимерных композиционных материалов (ПКМ) для проведения проекторочных расчетов важны максимально точные значения механических характеристик монослоя ПКМ с той или иной схемой укладки, а также применение методов автоматизации расчета упругих констант монослоя композиционного многослойного пакета. В настоящее время упругие постоянные и механические характеристики монослоя ПКМ получают в ходе испытаний элементарных образцов. Их точность существенно влияет на прочность и надежность конструкции из ПКМ в зависимости от различных факторов. Аналитические методики механики композитов позволяют с достаточной степенью приближения устанавливать механические характеристики монослоя ПКМ. Однако часто такие методики сложны, и для их применения требуются большие затраты времени при расчете, а также они не всегда дают результаты, совпадающие с натурными испытаниями образцов из ПКМ. Это является проблемой, особенно на этапе первоначального проектирования конструкций из ПКМ. Необходимо внедрять более прогрессивные методики оценки механических характеристик монослоя ПКМ, например, на основе инвариантов Цая — Мело, позволяющие получать результаты за короткий период времени. Применение программного комплекса на основе MS Excel для решения этой задачи [1–3] снижает

временные затраты по сравнению с применением программных комплексов конечно-элементного анализа типа MSC Patran/Nastran или ANSYS. При использовании ПКМ в авиационных конструкциях следует учитывать, что изготовление материала и детали происходит одновременно и основная задача — обеспечить стабильность получающихся свойств готовой детали. На это направлена вся процедура сертификации ПКМ в конструкции самолета или вертолета.

Инвариантный подход к выявлению упругих постоянных монослоя, как и понятие инвариантов для описания механических свойств анизотропных материалов, был известен довольно давно. В 1967 г. Цай (Tsai) и Пагано (Pagano) представили уравнения преобразования жесткости для чередующегося слоя как функции инвариантов [4]. Последующие их работы описывали, как после нахождения инвариантов можно получать упругие характеристики анизотропных пластин [5]. В работе [6] Цай и Мело (Melo) предложили использовать след нормированной в плоскости матрицы напряженно-жесткостных компонентов для проектирования армированных углеродным волокном композитов. Использование понятия инвариантности является полезным при проектировании пакетов слоев, поскольку инварианты не зависят от ориентации волокон в слое. Далее будет показано, что след определяет все механические характеристики слоя композиционного материала, которые выявляются с помощью одного простого испытания.

Цель работы — создание и апробация методики расчета механических характеристик монослоя полимерного композиционного материала на основе инвариантов Цая — Мело для увеличения точности проекторочных расчетов конструкций из ПКМ.

**Основные обозначения и допущения.** Для того чтобы записать основные формулы методики, необходимо ввести некоторые обозначения. Строчные буквы  $\{x, y, z, q, r, s\}$  задают оси и координаты монослоя, ориентированного по продольной оси пакета, а числа  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  — оси и координаты монослоя пакета вне оси. Очень важно соблюдать последовательность перестановки индексов в уравнениях преобразования напряжений, деформаций и констант упругости относительно различных осей. Кроме того используются следующие допущения:

- 1) упругие постоянные рассчитываются от компонент в нормированном виде. Коэффициенты нормированы колонками, не рядами;
- 2) используются нормированные переменные с индексом (\*) для определения свойств монослоя в дополнение к абсолютным. Нормированные значения требуются для сравнения одних свойств с другими;
- 3) используются безразмерные переменные. Апостроф (') означает сжимающий или отрицательный, индекс «o» — в плоскости, индекс  $f$  — изгибный.

**Основные формулы методики расчета механических характеристик монослоя ПКМ на основе инвариантов Цая — Мело.** Поведением слоя композиционного материала управляет большое число не равных нулю коэффициентов матрицы податливости. Причем не имеет значения, связаны или нет эти коэффициенты, отличные от нуля. Упругие постоянные слоя устанавливаются от коэффициентов матрицы податливости. Тогда можем записать:

$$\begin{aligned} E_1 &= \frac{1}{S_{11}}, \quad E_2 = \frac{1}{S_{22}}, \quad E_6 = G_{12} = \frac{1}{S_{66}}, \\ v_{21} &= \frac{S_{21}}{S_{11}}, \quad v_{12} = \frac{S_{12}}{S_{22}} = v_{12} \frac{E_2}{E_1}, \\ v_{61} &= \frac{S_{61}}{S_{11}}, \quad v_{16} = \frac{S_{16}}{S_{66}} = v_{61} \frac{E_6}{E_1}, \\ v_{62} &= \frac{S_{62}}{S_{22}}, \quad v_{26} = \frac{S_{26}}{S_{66}} = v_{62} \frac{E_6}{E_1}. \end{aligned} \quad (1)$$

Наконец, связи между упругими постоянными монослоя и компонентами жесткости монослоя выявляют посредством инверсии матрицы податливости, они являются простыми только для ортотропного материала, ориентированного по оси. Простых соотношений для анизотропных и ортотропных материалов вне оси не существует, т. е. имеем

$$\begin{aligned} Q_{11} &\neq E_1 / (1 - v_{21}v_{12}), \quad Q_{22} \neq E_2 / (1 - v_{21}v_{12}), \\ Q_{12} &\neq v_{21}Q_{11} \neq v_{12}Q_{22}, \quad Q_{66} \neq E_6 \neq G_{12}. \end{aligned} \quad (2)$$

Во избежание путаницы компоненты ортотропного материала, ориентированного по оси, обозначаются буквенными индексами для различения с числовыми индексами анизотропных и ортотропных компонент вне оси:

$$\begin{aligned} Q_{xx} &= \frac{E_x}{1 - v_{xy}v_{yx}}, \quad Q_{yy} = \frac{E_y}{1 - v_{xy}v_{yx}}, \\ Q_{xy} &= v_{xy}Q_{yy} = v_{yx}Q_{xx}, \quad Q_{ss} = E_s. \end{aligned} \quad (3)$$

Нахождение модулей Юнга анизотропного материала аналогично их определению для изотропных материалов, когда образцы подвергаются одноосным испытаниям на растяжение или сжатие. Используя отношение деформация — напряжения, можно вычислить модуль Юнга в направлении оси 1 монослоя путем проведения одного одноосного испытания образца ПКМ вдоль той же оси и повторного испытания вдоль осей 2 и 3:

$$E_1 = \frac{\sigma_1}{\varepsilon_1} = \frac{1}{S_{11}}, \quad E_2 = \frac{\sigma_2}{\varepsilon_2} = \frac{1}{S_{22}}, \quad E_3 = \frac{\sigma_3}{\varepsilon_3} = \frac{1}{S_{33}}. \quad (4)$$

При этом для проведения испытаний необходимо изготовить образцы соответствующей ГОСТу длины.

Сдвиговые модули выявляются при испытании образца ПКМ на сдвиг и обозначаются с помощью единичной или двойной записи индексов:

$$E_4 = G_{23} = \frac{\sigma_4}{\varepsilon_4} = \frac{1}{S_{44}}, \quad E_5 = G_{32} = \frac{\sigma_5}{\varepsilon_5} = \frac{1}{S_{55}}, \quad E_6 = G_{12} = \frac{\sigma_6}{\varepsilon_6} = \frac{1}{S_{66}}. \quad (5)$$

Далее будем использовать единичную запись индексов, потому что она не входит в противоречие со стандартизированной записью. Таким образом, упругое поведение однонаправленного слоя может быть описано с точки зрения матрицы жесткости, матрицы податливости или ряда упругих постоянных. Модули могут быть выражены в любой произвольной системе координат с помощью соответствующих отношений преобразования. Инвариантность преобразованных модулей, квазиизотропных постоянных и коэффициента сдвига уникальна для композиционных материалов и может быть использована при их проектировании. В продольной плоскости могут быть вычислены матрицы жесткости  $[Q]$  и податливости  $[S]$  для однонаправленного или тканого слоя из упругих констант следующим образом:

$$[Q] = \begin{bmatrix} \frac{E_x}{1 - \nu_{xy}\nu_{yx}} & \frac{\nu_y E_x}{1 - \nu_{xy}\nu_{yx}} & 0 \\ \frac{\nu_x E_y}{1 - \nu_{xy}\nu_{yx}} & \frac{E_y}{1 - \nu_{xy}\nu_{yx}} & 0 \\ 0 & 0 & E_s \end{bmatrix}, \quad [S] = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_x} & -\frac{\nu_{yx}}{E_y} & 0 \\ -\frac{\nu_{xy}}{E_x} & \frac{1}{E_y} & 0 \\ 0 & 0 & 1/E_s \end{bmatrix}. \quad (6)$$

Если слой укладывается вне продольной оси материала (рис. 1), матрица жесткости может быть получена из связи деформации — напряжения в уравнении (6) и преобразования соотношения напряжения — деформации:

$$\begin{aligned} \{\sigma\} &= [Q]\{\varepsilon\} [J]\{\sigma\} = [J][Q]\{\varepsilon\}, \\ \{\sigma'\} &= [J][Q][J^T]\{\varepsilon'\}, \quad \{\sigma'\} = [Q']\{\varepsilon'\}. \end{aligned} \quad (7)$$

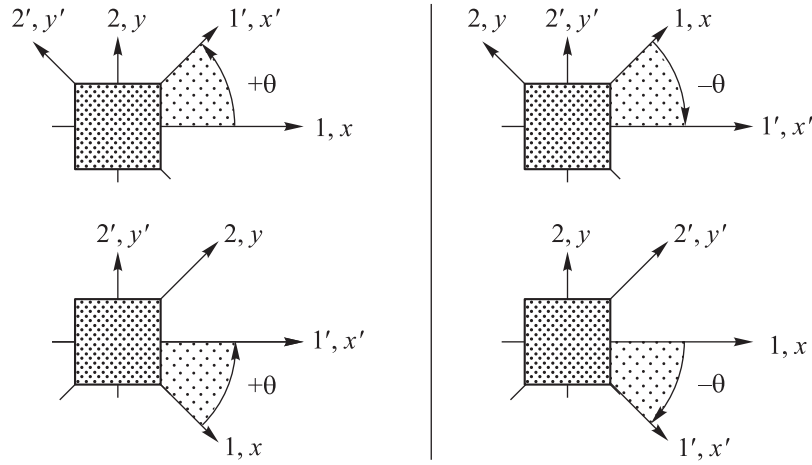


Рис. 1. Отношения между различными осями координат монослоя [4]

Отсюда получаем отношения преобразования матрицы жесткости:

$$[Q'] = [J][Q][J^T].$$

Тогда справедлива запись

$$\begin{aligned} \{\sigma'\} &= [J]\{\sigma\} = [T^+]\{\sigma\}, \quad \{\sigma\} = [J]^{-1}\{\sigma'\} = [T^-]\{\sigma'\}, \\ \{\varepsilon'\} &= [J^T]^{-1}\{\varepsilon\} = [T^+]\{\varepsilon\}, \quad \{\varepsilon\} = [J^T]\{\varepsilon'\} = [T^-]\{\varepsilon'\}, \end{aligned} \quad (8)$$

где

$$\begin{aligned} [J] &= \begin{bmatrix} m^2 & n^2 & 2mn \\ n^2 & m^2 & -2mn \\ -mn & mn & m^2 - n^2 \end{bmatrix}, \quad [J^T] = \begin{bmatrix} m^2 & n^2 & -mn \\ n^2 & m^2 & mn \\ 2mn & -mn & m^2 - n^2 \end{bmatrix}, \\ [J]^{-1} &= \begin{bmatrix} m^2 & n^2 & -2mn \\ n^2 & m^2 & 2mn \\ mn & -mn & m^2 - n^2 \end{bmatrix}, \quad [J^T]^{-1} = \begin{bmatrix} m^2 & n^2 & mn \\ n^2 & m^2 & -mn \\ -2mn & 2mn & m^2 - n^2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Здесь  $m = \cos \theta$ ,  $n = \sin \theta$ .

Различие между положительными и отрицательными преобразованиями заключается в том, что меняются знаки функции синуса несимметричных комбинаций (рис. 2).

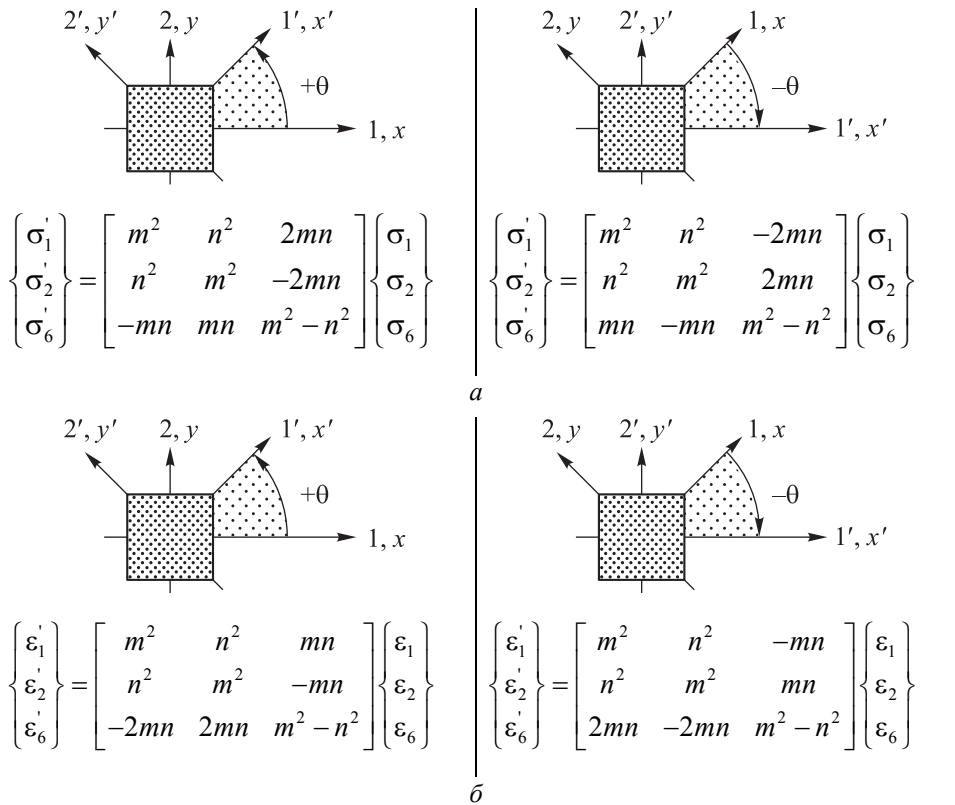


Рис. 2. Трансформация напряжений (а) и деформаций (б) монослоя [4]

Можно также получить отношения преобразования матрицы податливости, что делается по аналогии с преобразованием матрицы жесткости. Преобразования напряжения и деформации являются теми же, но связи деформации — напряжения в продольной оси слоя считают теперь с точки зрения податливости, как в уравнении (7). Преобразование податливости отличается от преобразования жесткости тем, что используется обычная деформация сдвига (рис. 3).

В случае необходимости многократного углового преобразования можно представить следующие тригонометрические тождества для изменения отношений преобразования от четырех тригонометрических функций:

$$\begin{aligned} m^4 &= \frac{3 + 4 \cos 2\theta + \cos 4\theta}{8}, & m^3 n &= \frac{2 \sin 2\theta + \sin 4\theta}{8}, \\ m^2 n^2 &= \frac{1 - \cos 4\theta}{8}, & mn^3 &= \frac{2 \sin 2\theta - \sin 4\theta}{8}, \\ n^4 &= \frac{3 - 4 \cos 2\theta + \cos 4\theta}{8}. \end{aligned} \quad (9)$$

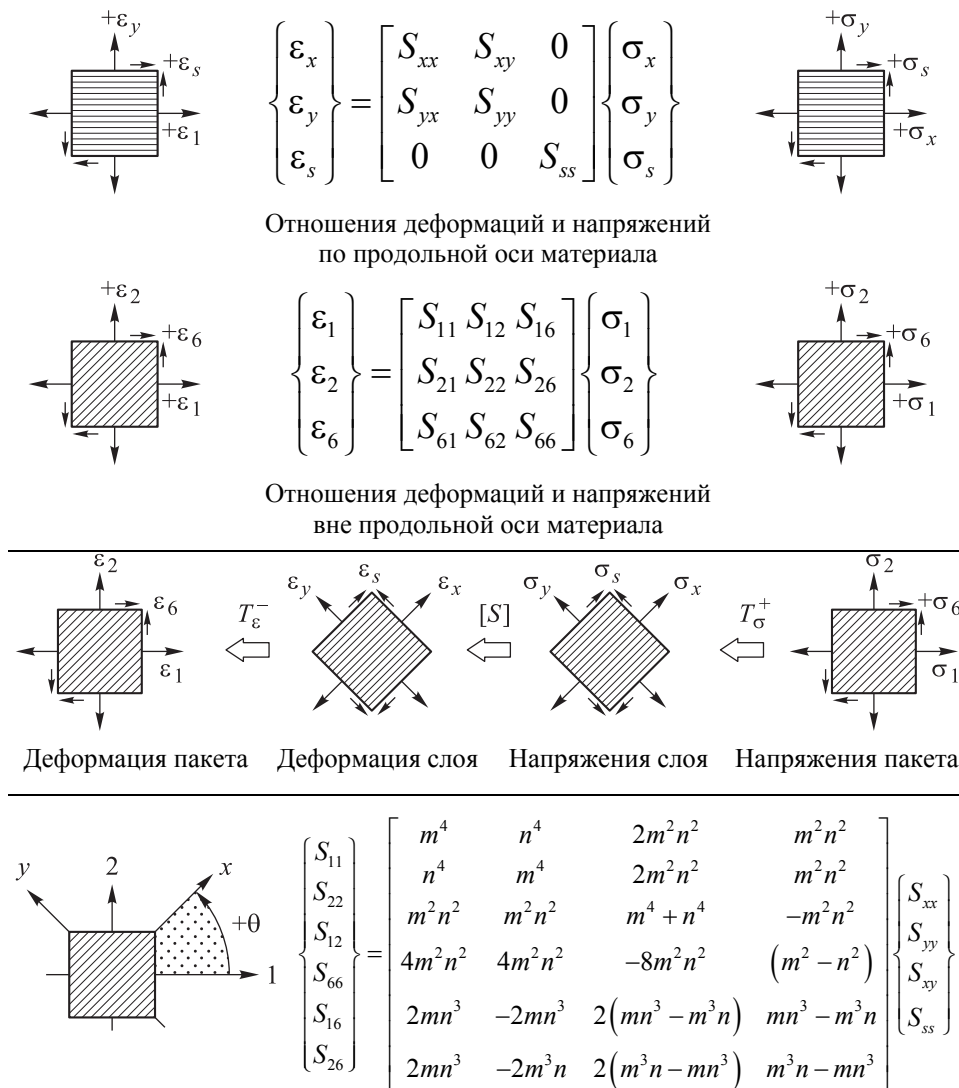


Рис. 3. Деривация преобразований податливости плосконапряженного состояния с трансформацией матрицы податливости [4]

Когда повторно переводим отношения преобразования путем замены этими тождествами в том же уравнении (8), появляется ряд линейных комбинаций основных жесткостей, приведенных в табл. 1.

Три из этих комбинаций —  $U_1$ ,  $U_4$  и  $U_5$  являются инвариантами. Существует практическое значение инвариантности при проектировании независимо от направления укладки слоев пакета, инвариантность остается постоянной. Неинвариантные или циклические комбинации ответственны за анизотропию слоя материала. При использовании этих линейных комбинаций  $U_s$  и углов укладки появляется новый набор отношений преобразования. Таким образом, инвариант представляет собой общий потенциал жесткости анизотропного материала.

Линейные комбинации модулей жесткости монослоя  
вдоль оси материала

| Линейные комбинации     | $Q_{xx}$ | $Q_{yy}$ | $Q_{xy}$ | $Q_{ss}$ |
|-------------------------|----------|----------|----------|----------|
| $U_1 = U_4 + 2U_5$      | 3/8      | 3/8      | 1/4      | 1/2      |
| $U_2$                   | 1/2      | -1/2     | 0        | 0        |
| $U_3$                   | 1/8      | 1/8      | -1/4     | -1/2     |
| $U_4 = U_1 - 2U_5$      | 1/8      | 1/8      | 3/4      | -1/2     |
| $U_5 = (U_1 - U_4) / 2$ | 1/8      | 1/8      | -1/4     | 1/2      |

Если использовать тензор вместо обычной сдвиговой деформации, то отношение деформации напряжения можно записать в следующей форме, совпадающей с уравнением (8):

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 2Q_{16} \\ Q_{21} & Q_{22} & 2Q_{26} \\ Q_{61} & Q_{62} & 2Q_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_{xy} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{16} \\ S_{21} & S_{22} & S_{26} \\ \frac{S_{61}}{2} & \frac{S_{62}}{2} & \frac{S_{66}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \end{bmatrix}, \quad (10)$$

т. е. фактор 2 должен быть умножен на матрицу жесткости и разделен на матрицу податливости.

Линейные комбинации инвариантов в матрице являются, конечно, инвариантными. Например, линейные комбинации  $I_s$  с точки зрения  $U_s$  показаны в следующем уравнении:

$$\begin{aligned} I_1 &= Q_{xx} + Q_{yy} + 2Q_{xy} = Q_{11} + Q_{22} + 2Q_{12} = 2(U_1 + U_4), \\ I_2 &= Q_{xx} + Q_{yy} + 2Q_{ss} = Q_{11} + Q_{22} + 2Q_{66} = 2(U_1 + U_5) = Tr [Q], \\ J_2 &= Tr [S] = S_{xx} + S_{yy} + \frac{S_{ss}}{2} = S_{11} + S_{22} + \frac{S_{66}}{2}. \end{aligned} \quad (11)$$

След матрицы ( $Tr$ ) является суммой ее диагональных компонент, для которых должен использоваться тензор деформации. Если деформации обычные сдвиговые, то след будет инвариантным при условии, что фактор 2 в уравнении (7) включен. Линейные комбинации, в которых варьируется угол слоя, являются инвариантными. В то время как компоненты  $[Q]$  и  $[S]$  модифицируются с изменением углов слоя, их суммы остаются постоянными. Такие же комбинации являются инвариантными и для изгибных жесткостей пакета. Когда материал монослоя выбран, инварианты налагают пределы на общий потенциал жесткости разнонаправленного пакета слоев, независимо от того, является ли



нагрузка действующей в плоскости или она изгибная. Чтобы полностью использовать возможности композиционных материалов, увеличение жесткости в одном направлении можно вести за счет другого направления. Это — важное понятие в оптимизации и проектировании слоистых композитов. При проектировании ПКМ важно помнить, что число независимых переменных материала слоя ограничивается двумя. Как только выбраны две из компонент жесткости, остающиеся управляются этими двумя инвариантами. Ранее было показано, что с каждым анизотропным материалом связаны инварианты координатного преобразования, из которых могут быть получены квазиизотропные упругие постоянные, как показано в уравнении

$$[Q]^{iso} = \begin{bmatrix} U_1 & U_4 & 0 \\ U_4 & U_1 & 0 \\ 0 & 0 & U_5 \end{bmatrix}, [S]^{iso} = \begin{bmatrix} \frac{U_1}{D} & \frac{-U_4}{D} & 0 \\ -\frac{U_4}{D} & \frac{U_1}{D} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{U_5} \end{bmatrix}, \quad (12)$$

где  $D = U_1^2 - U_4^2$ ,  $\nu^{iso} = \frac{U_4}{U_1}$ ,  $G^{iso} = U_5$ ,  $E^{iso} = \frac{D}{U_1}$ .

Эти упругие постоянные представляют нижнюю границу характеристик каждого композита. Они используются в качестве параметров сравнения, которые можно выбрать для данной нагрузки, при проектировании композиционных материалов, чтобы обеспечить независимо от угловой ориентации слоя необходимые характеристики пакета. Эти постоянные являются инвариантными и как проектировочные параметры лучше, чем изменяющиеся компоненты матрицы жесткости. Инверсией матрицы жесткости является матрица податливости.

**Определение следа жесткостных инвариантов слоя.** Ранее было показано, что след матрицы жесткости  $Tr [Q]$  плосконапряженного состояния слоя и соответствующий след матрицы податливости  $Tr [S]$  являются инвариантами, так как они остаются неизменными в рамках преобразования координат:

$$I_2 = Q_{11} + Q_{22} + 2Q_{66} = 2(U_1 + U_5) = Tr [Q],$$

$$J_2 = S_{11} + S_{22} + \frac{S_{66}}{2} = Tr [S]. \quad (13)$$

Для слоистых пакетов рекомендуется использовать нормированные свойства, такие как  $[A^*]$  и  $[D^*]$  жесткости пакета в срединной плоскости и изгибной жесткости пакета. Члены  $[A^*]$  не зависят от последовательности укладки, а  $[D^*]$  — зависят. Тем не менее, такие

следы, как  $[A^*]$  и  $[D^*]$ , имеют те же значения инварианта в зависимости от последовательности укладки:

$$I_2 = A_{11}^* + Q_{22}^* + 2Q_{66}^* = D_{11}^* + D_{22}^* + 2D_{66}^*. \quad (14)$$

На самом деле эти следы нормированной жесткости ограничиваются тем же значением следа жесткости плосконапряженного состояния:

$$Tr[Q] = Tr[A^*] = Tr[D^*]. \quad (15)$$

Таким образом, след  $Tr[Q]$  является свойством материала, как и любые другие упругие постоянные (например, модули Юнга и модули сдвига). Поскольку след есть линейная комбинация других следов, то если любые два следа установлены, третий след найти просто, т. е. не нужно проводить сложные и ненадежные испытания образцов, такие как испытание на сдвиг. След является единственным ключом данных, из которого можно выявить поведение слоистого пакета при нагружении в плоскости и при изгибе. Следует повторить, что инварианты накладывают ограничения на потенциал общей жесткости разнонаправленного пакета. Как только материал выбран, существуют только две независимые жесткости компонент, которые могут быть выбраны из четырех для однонаправленных слоев. После подбора двух жесткостных компонент, остальные определяются двумя инвариантами ( $I_1$ ) и ( $I_2$ ):

$$\frac{Q_{ij}}{Tr} = Q_{ij}^*, \quad \frac{U_i}{Tr} = U_i^*, \quad \frac{E_x}{Tr} = E_x^*. \quad (16)$$

Примеры получения следа  $Tr[Q]$  и след-нормированных компонент жесткости показаны на рис. 4 и 5.

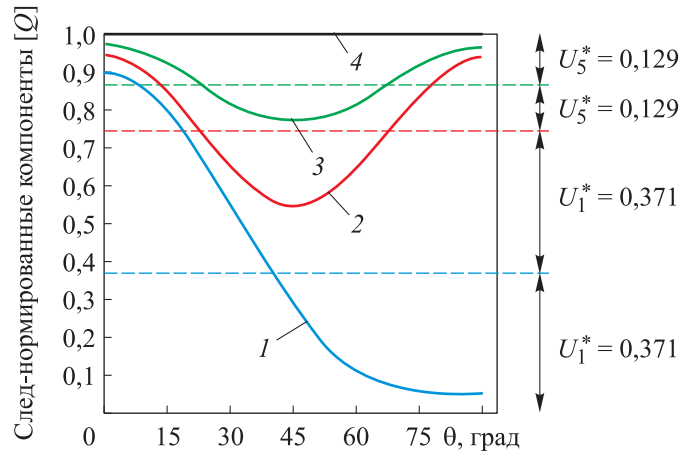


Рис. 4. Определение следа мастер-слоя и зависимость нормированных жесткостных компонент от угла укладки слоя  $\theta$  [4]:

$$1 - Q_{11}^*; 2 - Q_{11}^* + Q_{22}^*; 3 - Q_{66}^*; 4 - Tr[Q^*] = Q_{11}^* + Q_{22}^* + 2Q_{66}^* = 1$$

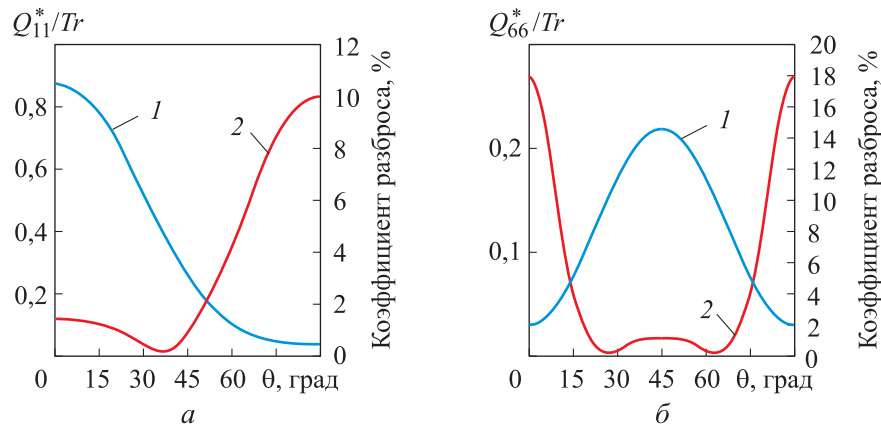


Рис. 5. След-нормированные компоненты жесткости (1)  $Q_{11}^*$  (а) и  $Q_{66}^*$  (б) и соответствующие коэффициенты разброса (2) как функции от угла укладки слоя  $\theta$  [4]

**След-нормированная жесткость пакета и определение следа пакета слоев.** След-нормированные упругие свойства  $E_1^*$  разнонаправленных пакетов могут быть получены с использованием классической теории слоистых композитных пластин. Компоненты мастер-слоя формируются как средние из слоев пакета:

$$\frac{E_1}{Tr} = E_1^*. \quad (17)$$

С помощью такого подхода может быть определена стратегия в области испытаний композиционных материалов. Считается, что различные факторы (тип формования, ремонт и дефекты производства) могут искажать жесткость испытываемого образца в виде пакета слоев. Таким образом, полученные из испытаний пакета данные будут искаженными. Поэтому след становится очень важной характеристикой при выявлении свойств ПКМ и, соответственно, упорядочено построенного мастер-слоя. След есть математически точная (а не полученная из испытаний) величина как инвариант, который легко рассчитать и измерить, он может являться основой при расчетах пакетов из композиционных материалов. Вместо испытаний ста образцов пакетов необходимы точные расчеты и измерение следов  $Tr^+$  и  $Tr^-$ . Автоматически в расчет включаются влияние термообработки и наличие дефектов производства, поэтому рассчитанные жесткостные и прочностные свойства пакета будут ближе к результатам, полученным при испытаниях образцов. Как следствие, процесс создания композитов и обеспечение их аттестации будут существенно упрощены, легко понятны и реализованы. Ранее было показано, что жесткость несимметричного пакета может быть выражена, по крайней мере, в двух формах — в абсолютных членах  $[A, B, D]$ , зависящих от толщины пакета, и нормированных членах  $[A^*, B^*, D^*]$ , не зависящих от толщины, где

$$[A^*] = \frac{1}{h}[A], [B^*] = \frac{1}{h^2}[B], [D^*] = \frac{12}{h^3}[D]. \quad (18)$$

Обе модели показаны в табл. 2.

Таблица 2

**Матрица жесткости и обратная матрица с абсолютными и нормированными членами**

| Матрица   | Абсолютные члены   | Нормированные члены   |
|-----------|--|---|
| Жесткости | $\begin{Bmatrix} N_i \\ M_i \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{ij} & B_{ij} \\ B_{ij} & D_{ij} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_j^0 \\ k_j \end{Bmatrix}$         | $\begin{Bmatrix} \sigma_i^0 \\ \sigma_i^f \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{ij}^* & B_{ij}^* \\ B_{ij}^* & D_{ij}^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_j^0 \\ \varepsilon_j^f \end{Bmatrix}$            |
| Обратная  | $\begin{Bmatrix} \varepsilon_i^0 \\ k_i \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{ij} & b_{ij} \\ \tilde{b}_{ij} & d_{ij} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N_j \\ M_j \end{Bmatrix}$ | $\begin{Bmatrix} \varepsilon_i^0 \\ \varepsilon_i^f \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{ij}^* & 1/3b_{ij}^* \\ \tilde{b}_{ij}^* & d_{ij}^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_i^0 \\ \sigma_i^f \end{Bmatrix}$ |

**Алгоритм определения механических характеристик пакета по методике на основе инвариантов Цая — Мело.** Исходными данными при определении механических характеристик пакета ПКМ по методике на основе инвариантов Цая — Мело будут:

- $E_x$  — модуль упругости в продольном направлении пакета;
- $E_y$  — модуль упругости в поперечном направлении пакета;
- $\nu_{xy}$  — прямой коэффициент Пуассона.

Далее проводится расчет по следующему алгоритму.

1. Определение обратного коэффициента Пуассона пакета  $\nu_{yx}$  и сдвигового модуля упругости пакета  $E_s$  согласно обычным уравнениям механики композитов [7–9].

2. Расчет табличных значений:

- компонент матрицы жесткости ортотропного композиционного материала  $Q_{xx}, Q_{yy}, Q_{xy}, Q_{ss}$  согласно уравнениям (3);
- компонент жесткости  $U_1-U_5$ :

$$U_1 = \frac{3}{8}(Q_{11} + Q_{22}) + \frac{1}{4}Q_{12} + \frac{1}{2}Q_{66}, \quad U_2 = \frac{1}{2}(Q_{11} - Q_{22}),$$

$$U_3 = \frac{1}{8}(Q_{11} + Q_{22}) - \frac{1}{4}Q_{12} - \frac{1}{2}Q_{66}, \quad U_4 = \frac{1}{8}(Q_{11} + Q_{22}) + \frac{3}{4}Q_{12} - \frac{1}{2}Q_{66}, \quad (19)$$

$$U_5 = \frac{1}{8}(Q_{11} + Q_{22}) - \frac{1}{4}Q_{12} + \frac{1}{2}Q_{66}.$$

3. Определение следа матрицы жесткости пакета  $Tr [Q]$  согласно уравнению (15).

4. Расчет табличных значений согласно уравнениям (16), нормированных:

- компонент матрицы жесткости ортотропного композиционного материала  $Q_{xx}^*, Q_{yy}^*, Q_{xy}^*, Q_{ss}^*$ ;
- компонент жесткости  $U_1^*, U_2^*, U_3^*, U_4^*, U_5^*$ ;
- модуля упругости в продольном направлении  $E_x^*$ ;
- модуля упругости в продольном направлении  $E_1^*$  для разных произвольных вариантов укладки.

5. Проведение анализа распределения нормированных компонент матрицы жесткости нормированных инвариантных компонент жесткости монослоя.

6. Определение значения продольного модуля упругости монослоя  $E_1$  для разных произвольных вариантов укладки пакета.

Уточнение и практическое внедрение методики на основе инвариантов Цая — Мело в процесс проектирования ПКМ позволит значительно сократить количество квалификационных испытаний образцов композиционных материалов, необходимых для определения физико-механических характеристик композитов. Большое преимущество использования следа матрицы жесткости или податливости как инварианта заключается в простоте и легкости применения методики на основе инвариантов Цая — Мело в практической деятельности [10]. С использованием мастер-слоя существенно снижается погрешность при определении механических характеристик композиционного материала из-за разброса свойств [11, 12]. Кроме того уже из первого испытания образца могут быть получены свойства этого материала. Благодаря использованию инвариантов испытание и проектирование композитных конструкций может стать более простым, быстрым и реалистичным. При использовании следа матрицы жесткости или податливости большая часть свойств пакета слоев может быть получена линейным масштабированием для различных пакетов с одним материалом или при сравнении различных материалов одного и того же армированного пакета. Для предсказания с большой уверенностью свойств и поведения пакета достаточно одного испытания по выявлению следа. Недостатком методики определения механических свойств монослоя однонаправленного ПКМ на основе инвариантов Цая — Мело является усложнение расчетов для явно несимметричных пакетов слоев, а также тканых ПКМ, которые все чаще применяются в вертолетных конструкциях, поскольку в меньшей степени подвержены растрескиванию и расслоению [13].

**Расчет в MS Excel механических характеристик слоя ПКМ по методике на основе инвариантов Цая — Мело.** При создании программы расчета в пакете MS Excel на базе встроенного языка программирования Visual Basic for Application в основу положены формулы методики. Пример интерфейса программы показан на рис. 6.

|            |        |               |        |        |          |        |        |
|------------|--------|---------------|--------|--------|----------|--------|--------|
| Ex [МПа] = | 152000 |               |        |        |          |        |        |
| Ey [МПа] = | 7400   | ← ВВОД ДАННЫХ |        |        |          |        |        |
| νx =       | 0,27   |               |        |        |          |        |        |
| Qxx*       | Qyy*   | Qxy*          | Qss*   | Ex*    | Tr [МПа] |        |        |
| 0,8849     | 0,0525 | 0,0167        | 0,0313 | 0,88   | 172727   |        |        |
| U1*        | U2*    | U3*           | U4*    | U5*    |          |        |        |
| 0,371      | 0,416  | 0,097         | 0,114  | 0,129  |          |        |        |
| Укладка    | [0]    | [0/90]        | [π/4]  | Soft 1 | Hard 1   | Soft 2 | Hard 2 |
| % [0]      | 100    | 50            | 25     | 10     | 50       | 9      | 55     |
| % [±45]    | 0      | 0             | 50     | 80     | 40       | 73     | 36     |
| % [90]     | 0      | 50            | 25     | 10     | 10       | 18     | 9      |
| E1* =      | 0,88   | 0,468         | 0,336  | 0,218  | 0,517    | 0,221  | 0,55   |

|                     |           |            |           |          |        |        |        |
|---------------------|-----------|------------|-----------|----------|--------|--------|--------|
| РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТА: |           |            |           |          |        |        |        |
| νx =                | 0,01314   | Es [МПа] = |           | 5406     |        |        |        |
| Qxx [МПа]           | Qyy [МПа] | Qxy [МПа]  | Qss [МПа] |          |        |        |        |
| 152846              | 9068      | 2885       | 5406      |          |        |        |        |
| U1 [МПа]            | U2 [МПа]  | U3 [МПа]   | U4 [МПа]  | U5 [МПа] |        |        |        |
| 64082               | 71855     | 16755      | 19691     | 22282    |        |        |        |
| Укладка             | [0]       | [0/90]     | [π/4]     | Soft 1   | Hard 1 | Soft 2 | Hard 2 |
| % [0]               | 100       | 50         | 25        | 10       | 50     | 9      | 55     |
| % [±45]             | 0         | 0          | 50        | 80       | 40     | 73     | 36     |
| % [90]              | 0         | 50         | 25        | 10       | 10     | 18     | 9      |
| E1 [МПа] =          | 152000    | 80836      | 58036     | 37655    | 89300  | 38173  | 95000  |

Рис. 6. Ввод данных и вывод результатов расчета механических характеристик слоя композита при различных вариантах укладки (интерфейс программы MS Excel)

Программа позволяет в автоматическом режиме после ввода данных получить механические характеристики слоя ПКМ, в том числе значения продольного модуля упругости монослоя  $E_1$  для различных типов произвольной укладки в зависимости от процентного содержания волокон:

[0] — все слои в образце уложены вдоль основы;

[0/90] — 50 % слоев уложены по основе, другие 50 % — по утку симметрично относительно срединной плоскости;

[π/4] — 50 % слоев в образце уложены с ориентацией ±45°, 25 % слоев — вдоль основы, другие 25 % — по утку симметрично относительно срединной плоскости;

Soft 1 — 10 % слоев в образце уложены вдоль основы, 80 % слоев — с ориентацией ±45°, оставшиеся 10 % — по утку симметрично относительно срединной плоскости;

Hard 1 — 50 % слоев в образце уложены вдоль основы, 40 % — с ориентацией ±45°, оставшиеся 10 % — по утку симметрично относительно срединной плоскости;

Soft 2 — 9 % слоев в образце уложены вдоль основы, 73 % — с ориентацией ±45°, оставшиеся 18 % — по утку симметрично относительно срединной плоскости;

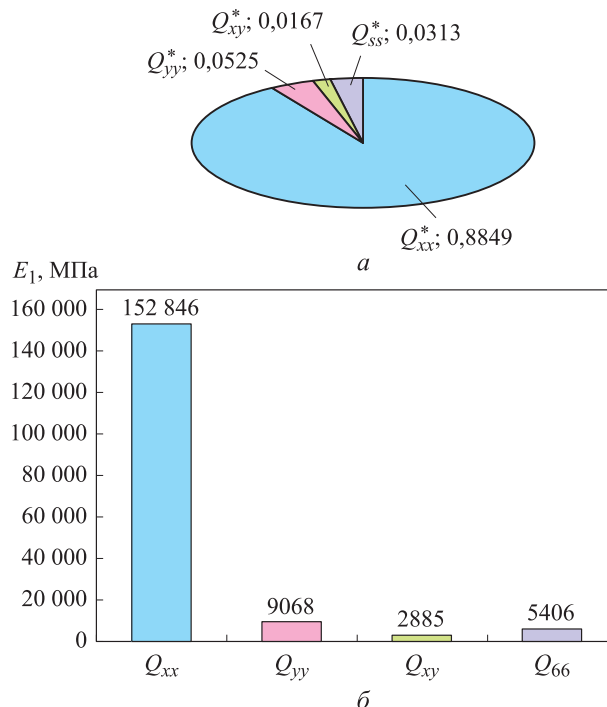
Hard 2 — 55 % слоев в образце уложены вдоль основы, 36 % — с ориентацией ±45°, оставшиеся 9 % — по утку симметрично относительно срединной плоскости.

Указанные в программе MS Excel укладки слоев в образце произвольные. Программа расчета основных механических характеристик слоя ПКМ в MS Excel позволяет создавать и рассчитывать любые симметричные и некоторые несимметричные комбинации слоев.

**Пример расчета основных механических характеристик монослоя образца из ПКМ, выбранного для апробации, при разных вариантах укладки пакета.** В качестве входных данных при расчете использованы некоторые физико-механические характеристики препрега однонаправленной углеродной ленты типа ВСР-3М/IMS65E23 (ТУ1-595-25-1365-2012), которые приведены ниже [2]:

|  |        |
|--|--------|
| Модуль упругости при растяжении в продольном направлении $E_x$ , МПа ..... | 152000 |
| Модуль упругости при растяжении в поперечном направлении $E_y$ , МПа ..... | 7400   |
| Коэффициент Пуассона $\nu_{xy}$ .....                                      | 0,27   |
| Толщина монослоя, мм .....   | 0,18   |

В результате расчета характеристик монослоя образца ПКМ на основе препрега ВСР-3М/IMS65E23 были получены значения компонент матрицы жесткости монослоя и продольного модуля упругости монослоя  $E_1$  для разных вариантов укладки пакета, представленные в виде диаграмм на рис. 7–9.



**Рис. 7.** Распределение нормированных компонент (а) и значения абсолютных компонент (б) матрицы жесткости монослоя

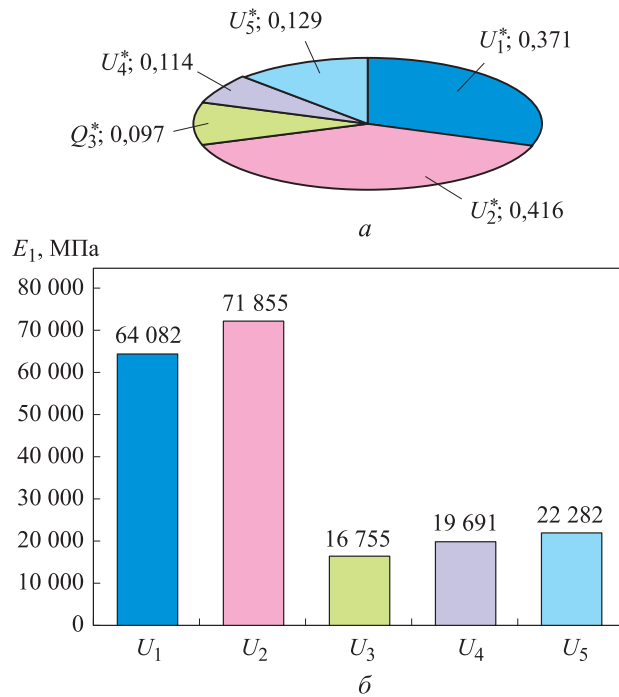


Рис. 8. Распределение инвариантных компонент (а) и значения абсолютных компонент (б) жесткости монослоя

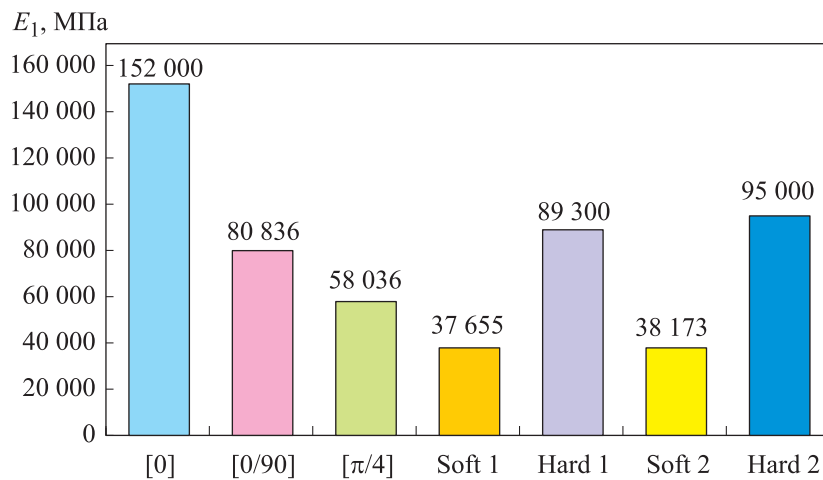


Рис. 9. Расчетные значения продольного модуля упругости монослоя  $E_1$  для разных вариантов укладки пакета

**Закключение.** Дано обоснование методики на основе инвариантов Цая — Мело по определению упругих констант монослоя слоистого ПКМ. Разработан алгоритм вычисления механических характеристик слоя ПКМ на основе инвариантов Цая — Мело, а также предложена методика и программа в MS Excel на базе встроенного языка программи-



рования Visual Basic for Application для нахождения механических характеристик слоя композита на основе инвариантов Цзя — Мело. Приведен пример расчета монослоев образца ПКМ, выбранного для апробации, при различных произвольных укладках слоев. Оформлены диаграммы полученных механических характеристик монослоя.

Результаты расчетов в MS Excel (см. рис. 6, 9) показывают хорошую точность и сходимость, особенно при вычислении симметричных относительно срединной плоскости пакетов, с результатами расчетов в различных конечно-элементных моделях [14, 15]. В качестве примера можно привести сравнение таких результатов, полученных в программах MS Excel и ANSYS [2].

Согласно [2], были изготовлены образцы из ПКМ на основе препрега BCP-3M/IMS65E23, физико-механические характеристики которого представлены выше, с различными вариантами укладки слоев (табл. 3).

Таблица 3

**Размеры и укладка образцов ПКМ для испытаний на растяжение и сжатие [2]**

| Наименование образца             | Размеры образца, мм | Укладка материала образца, %, при углах |      |     | Кол-во образцов, шт. с числом слоев |    |    |    |
|----------------------------------|---------------------|---|------|-----|-------------------------------------|----|----|----|
|                                  |                     | 0°                                      | ±45° | 90° | 8                                   | 16 | 32 | 48 |
| Вид испытания: <i>сжатие</i>     |                     |   |      |     |                                     |    |    |    |
| ЭК-00-25734А                     | 25×1,52×150         | 100                                     | –    | –   | 5                                   | –  | –  | –  |
| ЭК-00-25734А                     | 25×3,04×150         | 100                                     | –    | –   | –                                   | 5  | –  | –  |
| ЭК-00-25735Б                     | 25×1,52×150         | 25                                      | 50   | 25  | 5                                   | –  | –  | –  |
| ЭК-00-25735Б                     | 25×3,04×150         | 25                                      | 50   | 25  | –                                   | 5  | –  | –  |
| ЭК-00-25735Б                     | 25×6,08×156         | 25                                      | 50   | 25  | –                                   | –  | 5  | –  |
| ЭК-00-25735Б                     | 25×9,12×170         | 25                                      | 50   | 25  | –                                   | –  | –  | 2  |
| Вид испытания: <i>растяжение</i> |                     |   |      |     |                                     |    |    |    |
| ЭК-00-25734А                     | 15×1,52×250         | 100                                     | –    | –   | 5                                   | –  | –  | –  |
| ЭК-00-25734А                     | 15×3,04×250         | 100                                     | –    | –   | –                                   | 5  | –  | –  |
| ЭК-00-25735Б                     | 25×1,52×175         | 25                                      | 50   | 25  | 5                                   | –  | –  | –  |
| ЭК-00-25735Б                     | 25×3,04×175         | 25                                      | 50   | 25  | –                                   | 5  | –  | –  |
| ЭК-00-25735Б                     | 25×6,08×175         | 25                                      | 50   | 25  | –                                   | –  | 5  | –  |
| <i>Итого:</i>                    |                     |   |      |     | 52                                  |    |    |    |

Согласно табл. 3, в программе ANSYS были созданы конечно-элементные модели образцов ПКМ (рис. 10–12) и определены механические характеристики приведенных свойств пакета (рис. 11, 13).

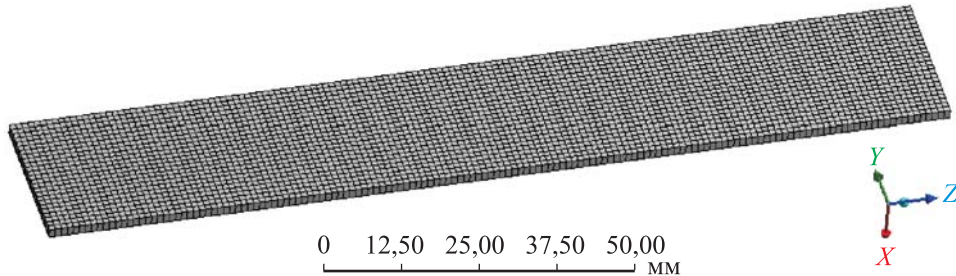


Рис. 10. Пример конечно-элементной модели образца ЭК-00-25734А (25×1,52×250)

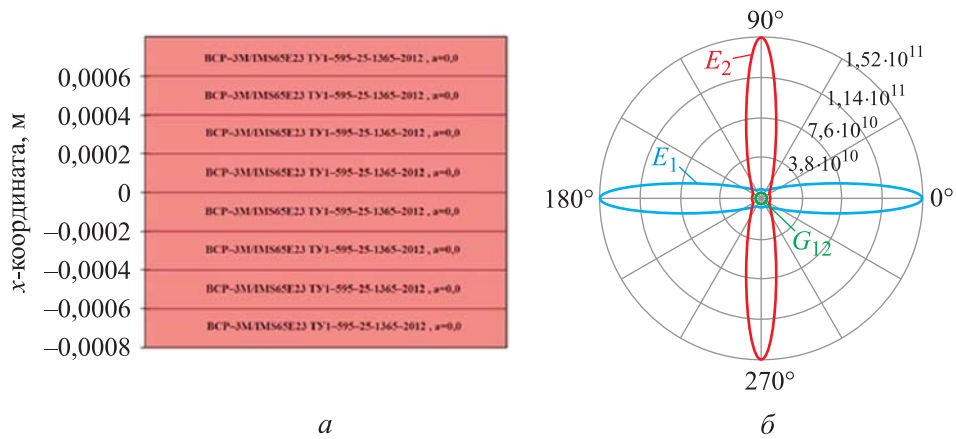


Рис. 11. Укладка в образце ЭК-00-25734А (25×1,52×150) (а) и его свойства в полярной системе (б)

Рассчитанные в программе ANSYS приведенные свойства пакета ПКМ образца ЭК-00-25734А (25×1,52×150) даны ниже [2]:

|  |                      |
|--|----------------------|
| Приведенный модуль сдвига пакета $G_{12}$ , Па ..... | $4,4 \cdot 10^9$     |
| Приведенный модуль упругости пакета $E_1$ , Па ..... | $1,52 \cdot 10^{11}$ |
| Приведенный модуль упругости пакета $E_2$ , Па ..... | $7,4 \cdot 10^9$     |
| Модуль сдвига пакета $G_{12}$ , Па .....             | $4,4 \cdot 10^9$     |
| Модуль упругости пакета $E_1$ , Па .....             | $1,52 \cdot 10^{11}$ |
| Модуль упругости пакета $E_2$ , Па .....             | $7,4 \cdot 10^9$     |
| Модуль сдвига вне плоскости $G_{23}$ , Па .....      | $2,25 \cdot 10^9$    |
| Модуль сдвига вне плоскости $G_{31}$ , Па .....      | $2,25 \cdot 10^9$    |
| Сдвиговой коэффициент $k_{44}$ ( $G_{23}$ ) .....    | 0,833333             |
| Сдвиговой коэффициент $k_{55}$ ( $G_{31}$ ) .....    | 0,833333             |

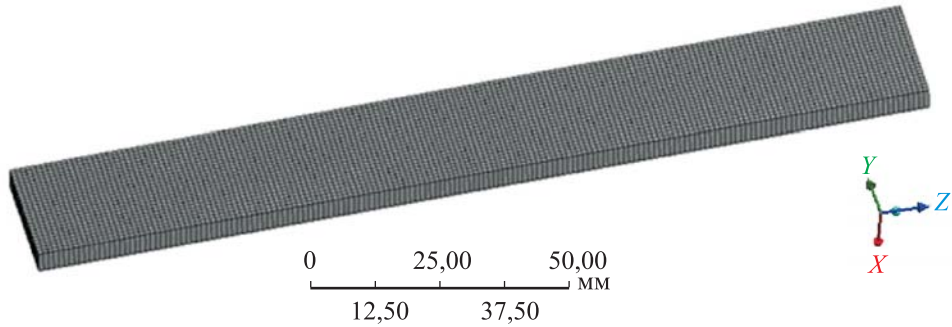


Рис. 12. Пример конечно-элементной модели образца ЭК-00-25735Б (25×3,04×175)

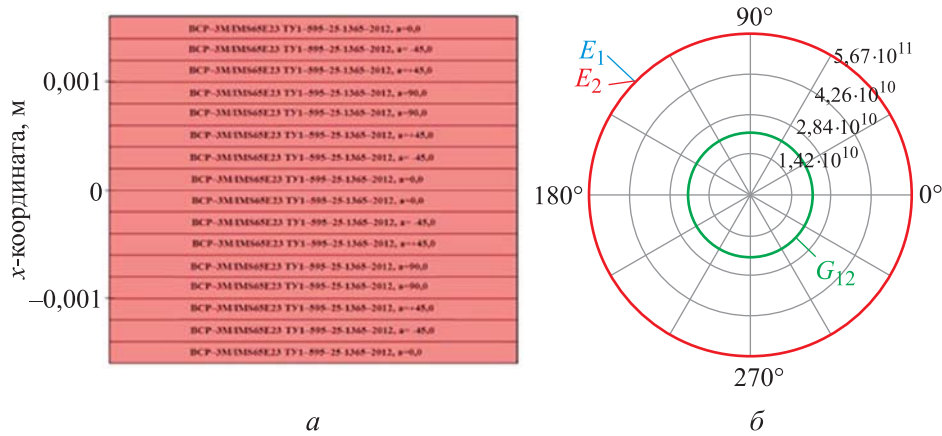


Рис. 13. Укладка в образце ЭК-00-25735Б (25×3,04×175) (а) и его свойства в полярной системе (б)

Приведенные свойства пакета ПКМ образца ЭК-00-25735Б (25×3,04×175), рассчитанные в программе ANSYS, представлены ниже [2]:

|  |                         |
|--|-------------------------|
| Приведенный модуль сдвига пакета $G_{12}$ , Па ..... | $2,08114 \cdot 10^{10}$ |
| Приведенный модуль упругости пакета $E_1$ , Па ..... | $6,723 \cdot 10^{10}$   |
| Приведенный модуль упругости пакета $E_2$ , Па ..... | $4,85805 \cdot 10^{10}$ |
| Модуль сдвига пакета $G_{12}$ , Па .....             | $2,16947 \cdot 10^{10}$ |
| Модуль упругости пакета $E_1$ , Па .....             | $5,67474 \cdot 10^{10}$ |
| Модуль упругости пакета $E_2$ , Па .....             | $5,67474 \cdot 10^{10}$ |
| Модуль сдвига вне плоскости $G_{23}$ , Па .....      | $1,82614 \cdot 10^9$    |
| Модуль сдвига вне плоскости $G_{31}$ , Па .....      | $2,48917 \cdot 10^9$    |
| Сдвиговой коэффициент $k_{44}$ ( $G_{23}$ ) .....    | 0,676349                |
| Сдвиговой коэффициент $k_{55}$ ( $G_{31}$ ) .....    | 0,921916                |

Для сравнения в табл. 4 приведены результаты расчета абсолютного продольного модуля упругости  $E_1$  монослоя образца ПКМ

в программах MS Excel и ANSYS. Отмечается расхождение менее 5 % в результатах вычислений в MS Excel и в ANSYS, обусловленное тем, что в MS Excel не учитывается краевой эффект.

Таблица 4

Результаты расчета абсолютного продольного модуля упругости  $E_1$  монослоя образца ПКМ в MS Excel и ANSYS

| Укладка        | Ориентация нитей композита вдоль основы |           |               |            |
|----------------|---|-----------|---------------|------------|
|                | 0°, MS Excel                            | 0°, ANSYS | 45°, MS Excel | 45°, ANSYS |
| % [0°]         | 100                                     | 100       | 25            | 10         |
| % [±45°]       | 0                                       | 0         | 50            | 80         |
| % [90°]        | 0                                       | 0         | 25            | 10         |
| $E_1$ , МПа    | 152 000                                 | 152 000   | 58 036        | 56 747     |
| Погрешность, % | 0                                       |           | 2             |            |

Разработанная на базе MS Excel программа автоматизированного вычисления основных механических характеристик слоя многослойного пакета из ПКМ может применяться при проектировании и расчете различных слоистых композитных конструкций авиационной техники.

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Башаров Е.А., Ерков А.П. Метод расчета многослойного пакета из полимерного композиционного материала с учетом выбора критерия прочности. *Общероссийский научно-технический журнал «Полет»*, 2018, № 6, с. 39–53. URL: [http://www.ros-polet.ru/files/archiv/pl1618\\_web.pdf](http://www.ros-polet.ru/files/archiv/pl1618_web.pdf) (дата обращения: 10.04.2023).
- [2] Башаров Е.А. Оценка статической прочности образцов из полимерных композиционных материалов в расчетных программах MS Excel и ANSYS с учетом выбора критерия прочности. *Общероссийский научно-технический журнал «Полет»*, 2021, № 12, с. 31–38. URL: [http://www.ros-polet.ru/files/archiv/pl1221\\_web.pdf](http://www.ros-polet.ru/files/archiv/pl1221_web.pdf) (дата обращения: 10.04.2023).
- [3] Башаров Е.А. Сравнительный анализ результатов расчета образцов из ПКМ в расчетной программе MS Excel и ANSYS с учетом выбора критерия прочности с результатами их статических испытаний. *Общероссийский научно-технический журнал «Полет»*, 2022, № 6, с. 3–12. URL: [http://www.ros-polet.ru/files/archiv/pl1221\\_web.pdf](http://www.ros-polet.ru/files/archiv/pl1221_web.pdf) (дата обращения: 10.04.2023).
- [4] Tsai S.W., Pagano N.J. Invariant Properties of Composite Materials. In: *Composite Materials Workshop*. S.W. Tsai, J.C. Halpin, N.J. Pagano, editors. St. Louis, Missouri, 1967, Technomic Publishing Company, 1968, pp. 233–253.
- [5] Tsai S.W., Wu E.M. A general theory of strength for anisotropic materials. *Journal of Composite Materials*, 1971, vol. 5, pp. 58–80.
- [6] Tsai S.W., Melo J.D.D. An Invariant-Based Theory of Composites. *Composite Science and Technologies*, 2014, vol. 100, pp. 237–243. URL: <https://doi.org/10.1016/j.compscitech.2014.06.017>

- [7] Васильев В.В. *Механика конструкций из композиционных материалов*. Москва, Машиностроение, 1988, 272 с.
- [8] Васильев В.В., Протасов В.Д., Болотин В.В. *Композиционные материалы. Справочник*. Москва, Машиностроение, 1990, 272 с.
- [9] Дудченко А.А. *Прочность и проектирование элементов авиационных конструкций из ПКМ*. Москва, Изд-во МАИ, 2007, 200 с.
- [10] Greediac M., Fournier N., Paris P.-A., Surrel Y. Direct measurement of invariant mechanical parameters of composite plates. *Journal of Composite Materials*, 1999, vol. 33 (21), pp. 2017–2036.
- [11] Daniel L.M., Ishai O. *Engineering Mechanics of Composite Materials*. 2nd ed. Oxford University Press, New York, Oxford, 2006, 463 p. URL: <https://abru.ac.ir/files/teachers/doc-1569398578.pdf> (дата обращения: 10.04.2023).
- [12] Gdoutos E.E., Daniel I.M., Wang K.A. Multiaxial characterization and modeling of a PVC cellular foam. *Journal of Thermoplastic Composite Materials*, 2001, vol. 14, pp. 365–373.
- [13] Abrate S. Criteria for yielding or failure of cellular materials. *Journal of Sandwich Structures and Materials*, 2008, vol. 10, pp. 5–51.
- [14] Кравцов В.А. Конечно-элементные модели слоистого композиционного материала. *Вестник Московского авиационного института*, 2009, т. 16, вып. 6, с. 39–42. URL: <https://vestnikmai.ru/download/php?=12494.pdf> (дата обращения: 10.04.2023).
- [15] Грищенко С.В., Попов Ю.И. Разработка макромодели слоистого композита для анализа напряженно-деформированного состояния нерегулярных зон типовых конструкций планера самолета. *Труды МАИ*, 2013, № 65, с. 1–15. URL: <https://mai.ru/upload/iblock/168/1685505fa649aec9868e56c34cbf9e13.pdf> (дата обращения: 10.04.2023).

Статья поступила в редакцию 30.05.2024

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Башаров Е.А. Расчет механических характеристик монослоя полимерного композиционного материала на основе инвариантов Цая — Мело. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2024, вып. 9. EDN JZESNL

**Башаров Евгений Анатольевич** — канд. техн. наук, доцент кафедры 102 «Проектирование вертолетов» Московского авиационного института (национального исследовательского университета); автор более 20 научных работ и статей в области проектирования конструкций вертолетов из полимерных композиционных материалов. e-mail: e.basharov@yandex.ru

## The Tsai—Melo invariants-based computation of the main mechanical characteristics for the polymer composite material monolayer

© E.A. Basharov

Moscow Aviation Institute, Moscow, 125993, Russian Federation

*The paper substantiates the Tsai–Melo computation method in determining the monolayer elastic constants of the layered polymer composite material (PCM). It develops an algorithm and a computation program in the MS Excel based on the Visual Basic for Applications (VBA) built-in programming language to compute main mechanical characteristics of a PCM layer based on the Tsai–Melo invariants. The paper provides an example in computing the composite monolayers selected for testing. Tables, diagrams and graphs of the obtained monolayer mechanical characteristics for different options of laying the composite package selected for testing are compiled. Computation accuracy is assessed in comparison with calculations in the ANSYS package and the results of testing the PCM samples.*

**Keywords:** polymer composite material, monolayer, stiffness (compliance) matrix, elastic constants and invariants, composite structures design, automation

### REFERENCES

- [1] Basharov E.A., Yerkov A.P. Metod rascheta mnogosloynnogo paketa iz polimernogo kompozitsionnogo materiala s uchetom vybora kriteriya prochnosti [The method of calculation for multilayer package of composite with given choice of strength criterion]. *Obscherossiyskiy nauchno-tekhnicheskiy zhurnal "Polet" — All-Russian Scientific and Technical Journal "Polyot" ("Flight")*, 2018, no. 6, pp. 39–53. Available at: [http://www.ros-polet.ru/files/archiv/pl1618\\_web.pdf](http://www.ros-polet.ru/files/archiv/pl1618_web.pdf) (accessed April 10, 2023).
- [2] Basharov E.A. Otsenka staticheskoy prochnosti obraztsov iz polimernykh kompozitsionnykh materialov v raschetnykh programmakh MS.Excel i ANSYS s uchetom vybora kriteriya prochnosti [Static strength assessment samples from polymeric composite materials in the MS.Excel and ANSYS calculation programs accounting for selection of the strength criterion]. *Obscherossiyskiy nauchno-tekhnicheskiy zhurnal "Polyot" — All-Russian Scientific-Technical Journal "Polyot" ("Flight")*, 2021, no. 12, pp. 31–38. Available at: [http://www.ros-polet.ru/files/archiv/pl1221\\_web.pdf](http://www.ros-polet.ru/files/archiv/pl1221_web.pdf) (accessed April 10, 2023).
- [3] Basharov E.A. Sravnitelnyi analiz rezultatov rascheta obraztsov iz PKM v raschetnoy programme MS.Excel i ANSYS s uchetom vybora kriteriya prochnosti s rezultatami ikh staticheskikh ispytaniy [Comparative analysis of the calculation result of samples from PCM in the MS.Excel and ANSYS calculation programs accounting for selection of the strength criterion with results of their static testing]. *Obscherossiyskiy nauchno-tekhnicheskiy zhurnal "Polyot" — All-Russian Scientific-Technical Journal "Polyot" ("Flight")*, 2022, no. 6, pp. 3–12. Available at: <http://www.ros-polet.ru/files/archiv/pl1221web.pdf> (accessed April 10, 2023).
- [4] Tsai S.W., Pagano N.J. Invariant properties of composite materials. In: *Composite Materials Workshop*. Tsai S.W., Halpin J.C. and Pagano N.J. (Editors). St. Louis, Missouri, 1967, Technomic Publishing Company, 1968, pp. 233–253.

- [5] Tsai S.W., Wu E.M. A general theory of strength for anisotropic materials. *Journal of Composite Materials*, 1971, vol. 5, pp. 58–80.
- [6] Tsai S.W., Melo J.D.D. An invariant-based theory of composites. *Composite Science and Technologies*, 2014, vol. 100, pp. 237–243. <https://doi.org/10.1016/j.compscitech.2014.06.017>
- [7] Vasiliev V.V. *Mechanics of structures made of composite materials*. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1988, 272 p.
- [8] Vasiliev V.V., Protasov V.D., Bolotin V.V. *Kompozitsionnye materialy. Spravochnik* [Composite materials. Reference book]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1990, 272 p.
- [9] Dudchenko A.A. *Prochnost i proektirovanie elementov aviatsionnykh konstruksiy iz PKM* [Strength and design of elements of aircraft structures from PCM]. Moscow, MAI Publ., 2007, 200 p.
- [10] Greediac M., Fournier N., Paris P.-A., Surrel Y. Direct measurement of invariant mechanical parameters of composite plates. *Journal of Composite Materials*, 1999, no. 33 (21), pp. 2017–2036.
- [11] Daniel L.M., Ishai O. *Engineering Mechanics of Composite Materials*. 2nd ed. Oxford University Press, New York, Oxford, 2006, 463 p. Available at: <https://abru.ac.ir/files/teachers/doc-1569398578.pdf>. (accessed April 10, 2023).
- [12] Gdoutos E.E., Daniel I.M., Wang K.A. Multiaxial characterization and modeling of a PVC cellular foam. *Journal of Thermoplastic Composite Materials*, 2001, vol. 14, pp. 365–373.
- [13] Abrate S. Criteria for yielding or failure of cellular materials. *Journal of Sandwich Structures and Materials*, 2008, vol. 10, pp. 5–51.
- [14] Kravtsov V.A. Konechno-elementnye modeli sloistogo kompozitsionnogo materiala [The finite element models of slide composite material]. *Vestnik Moskovskogo aviatsionnogo instituta — Aerospace MAI Journal*, 2009, vol. 16, no. 6, pp. 39–42. Available at: <https://vestnikmai.ru/download/php?=12494.pdf> (accessed April 10, 2023).
- [15] Grishchenko S.V., Popov Yu.I. Razrabotka makromodeli sloistogo kompozita dlya analiza napryazhenno-deformirovannogo sostoyaniya neregulyarnykh zon tipovykh konstruksiy planera samoleta [The development of a composite laminate macromodel for the analysis of stress-strain behavior in irregular zones of typical airframe]. *Trudy MAI*, 2013, no. 65, pp. 1–15. Available at: <https://mai.ru/upload/iblock/168/1685505fa649aec9868e56c34cbf9e13.pdf> (accessed April 10, 2023).

**Basharov E.A.**, Cand. Sc. (Eng.), Associate Professor, Department 102 “Helicopter Design”, Moscow Aviation Institute (National Research University); author of more than 20 scientific papers and articles. Main scientific interests: design of helicopter structural from polymer composite materials (PCM). e-mail: e.basharov@yandex.ru