

## Точное аналитическое решение для поля скорости сдвигового течения Куэтта — Пуазейля — Бенара

© С.А. Берестова, Е.Ю. Просвиряков

Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б.Н. Ельцина, Екатеринбург, Свердловская область, 620062, Российская Федерация

*Представлено аналитическое частное решение уравнений Навье — Стокса для описания стационарной конвекции Бенара течения вязкой несжимаемой жидкости в бесконечно протяженном горизонтальном слое. Исследовано поле скорости при движении вертикального вихревого потока. Крупномасштабный поток жидкости рассматривается в приближении тонкого слоя с недеформируемыми границами. Учитываются две горизонтальные компоненты вектора скорости. Сдвиговое течение возникает при нагреве/охлаждении нижней границы и наличии градиента давления на верхней. Температура и давление взяты в виде линейных форм. Коэффициенты линейных форм зависят от вертикальной (поперечной) координаты. Заранее неизвестные функции — многочлены, описывающие поле скоростей, точно найдены из системы шестого порядка обыкновенных дифференциальных уравнений. Исследованы спектральные свойства полиномов в области определения решения. Анализ распределения нулей полиномов, задающих поле скорости, позволил проиллюстрировать стратификацию слоев жидкости. Представлено подробное исследование существования устойчивых обратных течений в конвективном потоке жидкости типа Куэтта — Пуазейля — Бенара.*

**Ключевые слова:** неоднородный поток, конвекция, точное решение, вертикальное завихрение, противотечение, застойная зона

**Введение.** Нахождение точных решений уравнений гидродинамики вязкой жидкости является актуальной проблемой [1–4]. Аналитическое интегрирование уравнений Навье — Стокса было начато в конце XIX столетия. Течение Куэтта, течение Пуазейля, решение задач Стокса, течение Экмана стали классическими результатами, которые описываются аналитически [1–4]. Первый обзор по точным решениям, где был сделан акцент на геометрии линий тока для установившихся и нестационарных течений, был предложен Немени [5]. Можно констатировать, что в том обзоре используются идеи точного интегрирования уравнений движения, предложенные Громеком, Тркалом и Бельтрами [6, 7]. Дальнейшее развитие идей построения точных решений уравнений Навье — Стокса привело к формулированию класса точных решений Линя — Сидорова — Аристова [8–11].

Предложенный Линем анзац для поля скоростей [8] был независимо использован Сидоровым и Аристовым при интегрировании уравнений Обербека — Буссинеска [9, 10]. Отметим, что первое точное решение уравнений естественной конвекции было получено представителями пермской гидродинамической школы Остроумовым

и Бирихом для описания однонаправленных движений жидкости с осевой и плоской симметрией бесконечного слоя жидкости [12–16]. Точное решение Остроумова — Бириха было применено Шлиомисом при решении задач испарительной конвекции [17, 18]. С учетом современных потребностей микроэлектроники, микро- и нанофлюидики необходимо рассмотреть не только возможность использования однонаправленных течений для исследования их гидродинамической устойчивости, но и применение сдвиговых течений для решения точно интегрируемых задач конвекции [19].

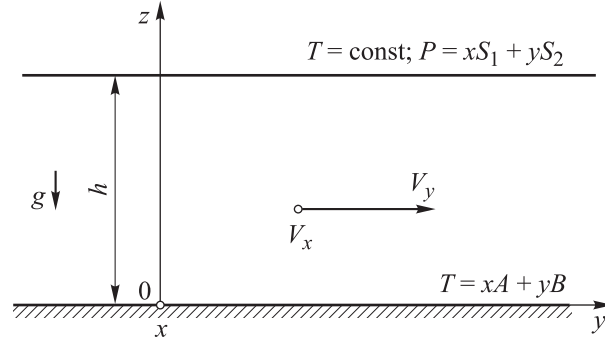
В статье [20] было исследовано влияние термокапиллярного механизма на конвективное перемешивание жидкости и показано влияние ограниченных условий и диссипативных коэффициентов жидкости на существование двумерного поля скорости, т. е. было продемонстрировано, что в рамках класса Линя — Сидорова — Аристова можно описывать неоднородные по скорости течения, обобщающие семейство Остроумова — Бириха — Шлиомиса. В цикле работ [21, 22] рассмотрены краевые и начально-краевые задачи для конвекции Марангони сдвиговых однородных и неоднородных течений. Было показано, что структура гидродинамических полей сопровождается стратификацией, а это приводит к регистрации противотечений в жидкости. Интерес к конвекции Марангони обусловлен классическими опытами Бенара, который исследовал течения спермацета со свободной границей. В этих опытах конвекция индуцировалась двумя механизмами: гравитационным переносом конвекции Бенара (неоднородность силового поля Архимеда) и поверхностным эффектом Марангони. Интенсивно изучаются противотечения в жидкости в источниках [20, 23, 24].

Цель данной статьи — изучение гравитационной конвекции Бенара с учетом кинематических граничных условий Куэтта в бесконечном горизонтальном слое жидкости. Приводятся точное решение и анализ гидродинамических полей для простейшего сдвигового течения типа Бенара — Куэтта.

**Постановка задачи.** Рассмотрим гравитационное сдвиговое течение теплопроводящей жидкости между двумя плоскостями, когда на нижней неподвижной границе происходит подогрев или охлаждение, а на верхней границе — изменение давления (рис. 1). При этом под вязким несжимаемым крупномасштабным течением будем понимать течение жидкости с показателями геометрической анизотропии:

$$\delta \leq 0,1, \quad a = \frac{B}{A} h, \quad b = \frac{S_2}{S_1} h,$$

где  $\delta \leq h/l$ ,  $h$  и  $l$  — характерный масштаб течения по вертикали (толщина слоя) и горизонтали соответственно;  $A$  и  $B$  — горизонтальные градиенты температуры жидкости на нижней границе;  $S_1$  и  $S_2$  — горизонтальные градиенты давления на верхней границе.



**Рис. 1.** Схема движения жидкости между двумя плоскостями:

$T$  — отклонение от средней температуры;  $A$  и  $B$  — горизонтальные градиенты температуры жидкости на нижней границе слоя высотой  $h$ ;  $P$  — отклонение давления от гидростатического, поделенное на постоянную среднюю плотность жидкости  $\rho$ ;  $S_1$  и  $S_2$  — горизонтальные градиенты давления на верхней границе;  $g$  — ускорение свободного падения

Уравнения движения вязкой жидкости Навье — Стокса в случае стационарного гравитационного течения [25] имеют вид

$$(\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} = -\nabla P + \nu \Delta \vec{V} + g\beta T \vec{k},$$

где  $\nabla = \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z}$  — оператор Гамильтона;  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  — орты

прямоугольной декартовой системы координат;  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$  —

оператор Лапласа;  $\vec{V} = V_x \vec{i} + V_y \vec{j} + V_z \vec{k}$  — вектор скорости;  $P$  — отклонение давления от гидростатического, поделенное на постоянную среднюю плотность жидкости  $\rho$ ;  $\nu$  — коэффициент кинематической (молекулярной) вязкости;  $T$  — отклонение от средней температуры;  $g$  — ускорение свободного падения;  $\beta$  — температурный коэффициент объемного расширения жидкости.

Вызывает интерес рассмотрение взаимного влияния полей температуры и скорости вследствие теплового и механического взаимодействий. Пренебрегая диссипацией энергии, теплообмен в слое жидкости задается уравнением теплопроводности

$$\vec{V} \cdot \nabla = \chi \Delta T,$$

где  $\chi$  — коэффициент температуропроводности жидкости.

Условие неразрывности замыкает систему уравнений для несжимаемой жидкости:

$$\nabla \cdot \vec{V} = 0.$$

В итоге скалярная форма записи уравнений сдвигового движения вязкой жидкости между двумя плоскостями, учитывающая влияние на ее течение как температуры, так и давления, имеет вид

$$\begin{aligned} V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_x}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_x}{\partial z} &= -\frac{\partial P}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial z^2} \right); \\ V_x \frac{\partial V_y}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_y}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_y}{\partial z} &= -\frac{\partial P}{\partial y} + \nu \left( \frac{\partial^2 V_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_y}{\partial z^2} \right); \\ V_x \frac{\partial V_z}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_z}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_z}{\partial z} &= -\frac{\partial P}{\partial z} + \nu \left( \frac{\partial^2 V_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial z^2} \right) + g\beta T; \quad (1) \\ V_x \frac{\partial T}{\partial x} + V_y \frac{\partial T}{\partial y} + V_z \frac{\partial T}{\partial z} &= \chi \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right); \\ \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} &= 0. \end{aligned}$$

Аналитическое частное точное решение системы уравнений (1) будем находить в случае, когда скорость, отклонение температуры и давления стационарного движения задаются следующим образом [26]:

$$\begin{aligned} V_x &= V_x(z), \quad V_y = V_y(z), \quad V_z = 0; \\ P &= P_0(z) + xP_1(z) + yP_2(z); \quad (2) \\ T &= T_0(z) + xT_1(z) + yT_2(z). \end{aligned}$$

Наличие горизонтальных компонент градиента температуры и давления, в отличие от классического течения Куэтта, когда действует ограничение потока движущейся жидкости в одном направлении, сводит исследование к рассмотрению сдвигового установившегося конвективного течения вязкой несжимаемой жидкости только в горизонтальных плоскостях, следовательно,  $V_z = 0$ .

Проекции скорости и функции-коэффициенты линейных форм (2) давления и температуры зависят только от поперечной координаты  $z$ . Такая структура гидродинамических полей позволяет конструировать точное решение системы уравнений (1), описывающее конвективные

течения завихренной диссипативной среды. При этом учитывается влияние сил инерции на перенос импульса и температуры в жидкости.

Конвективная производная в уравнениях движения отлична от нуля только в уравнении теплопроводности [27]. Подставляя выражения (2) в систему (1), получаем

$$\begin{aligned} \nu \frac{d^2 V_x(z)}{dz^2} - P_1(z) &= 0; \\ \nu \frac{d^2 V_y(z)}{dz^2} - P_2(z) &= 0; \\ g\beta(T_0(z) + xT_1(z) + yT_2(z)) - \left( \frac{dP_0(z)}{dz} + x \frac{dP_1(z)}{dz} + y \frac{dP_2(z)}{dz} \right) &= 0; \\ V_x(z)T_1(z) + V_y(z)T_2(z) - \chi \left( \frac{d^2 T_0(z)}{dz^2} + x \frac{d^2 T_1(z)}{dz^2} + y \frac{d^2 T_2(z)}{dz^2} \right) &= 0. \end{aligned}$$

Для нахождения проекций скорости течения и функций-коэффициентов в выражениях для температуры и давления работаем с полученной системой дифференциальных уравнений первого и второго порядка, интегрируя их в определенной последовательности по мере получения неизвестных функций:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 T_1(z)}{dz^2} = 0, \quad \frac{d^2 T_2(z)}{dz^2} = 0; \\ \frac{dP_1(z)}{dz} = g\beta T_1(z), \quad \frac{dP_2(z)}{dz} = g\beta T_2(z); \\ \nu \frac{d^2 V_x(z)}{dz^2} = P_1(z), \quad \nu \frac{d^2 V_y(z)}{dz^2} = P_2(z). \end{aligned} \quad (3)$$

Общее размерное решение системы (3) записывается полиномиальными функциями. Очевидно, что по линейному закону распределены лишь функции  $T_1(z)$  и  $T_2(z)$  — это полиномы первой степени;  $P_1(z)$  и  $P_2(z)$  изменяются согласно квадратичному закону;  $V_x(z)$ ,  $V_y(z)$  — это полиномы четвертой степени и  $T_0(z)$  — полином седьмой степени. Наибольшую, восьмую степень имеет полином в составе функции давления  $P_0(z)$ .

**Формулировка краевой задачи сдвигового течения.** Для формулирования краевой задачи задаются граничные условия (см. рис. 1) на верхней и нижней границах слоя жидкости. Для определения

постоянных интегрирования точного решения (3) записывается условие прилипания на нижней недеформируемой границе, когда  $z = 0$ . На верхней свободной границе, когда  $z = h$ , при толщине слоя  $h$  отмечается неоднородное распределение скоростей, т. е. выполняются условия на компоненты скорости:

$$V_x(0) = 0, \quad V_y(0) = 0,$$
$$V_x(h) = W \cos \varphi, \quad V_y(h) = W \sin \varphi.$$

Здесь  $W$  — модуль скорости на верхней границе;  $\varphi$  — угол между вектором скорости на верхней границе и осью абсцисс.

Отклонение давления от атмосферного  $S$  на верхней свободной границе

$$P_0(h) = 0, \quad P_1(h) = S_1, \quad P_2(h) = S_2,$$

где  $S_1$  и  $S_2$  — горизонтальные градиенты давления на верхней границе.

При нулевой отсчетной температуре на нижней границе рассматривается либо нагрев, либо охлаждение, на верхней границе задается горизонтальный градиент температуры жидкости, т. е. краевые условия для температуры принимают вид

$$z = 0: \quad T_0(0) = 0, \quad T_1(0) = A, \quad T_2(0) = B;$$
$$z = h: \quad T_0(h) = 0, \quad T_1(h) = 0, \quad T_2(h) = 0,$$

где  $A$  и  $B$  — горизонтальные градиенты температуры жидкости на нижней границе, которые при нагреве положительные, при охлаждении — отрицательные.

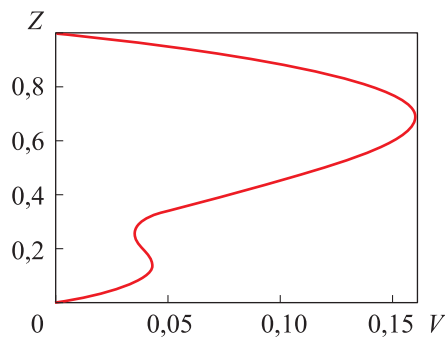
**Гидродинамические поля.** Для удобства дальнейшего исследования осуществляется переход к безразмерной вертикальной (поперечной) координате  $Z = \frac{z}{h}$  в записи функций, определяющих гидродинамические поля. Составляющие функции, задающие поле температуры и поле давления, имеют вид

$$T_1(Z) = -A(Z-1), \quad T_2(Z) = -B(Z-1);$$
$$P_1(Z) = S_1 - \frac{Ag\beta h}{2}(Z-1)^2, \quad P_2(Z) = S_2 - \frac{Bg\beta h}{2}(Z-1)^2.$$

Точное решение поставленной задачи для поля скорости определяется соотношениями

$$\begin{aligned} V_x(Z) &= Z \left[ W \cos \varphi + (Z-1) \left( \frac{S_1 h^2}{2\nu} - \frac{g\beta A h^3}{24\nu} (Z^2 - 3Z + 3) \right) \right]; \\ V_y(Z) &= Z \left[ W \sin \varphi + (Z-1) \left( \frac{S_2 h^2}{2\nu} - \frac{g\beta B h^3}{24\nu} (Z^2 - 3Z + 3) \right) \right]. \end{aligned} \quad (4)$$

Изменение модуля скорости в слое жидкости, находящемся между неподвижными границами при нагреве нижней границы и ненулевом градиенте давления на верхней, показано на рис. 2.



**Рис. 2.** Изменение скорости в слое жидкости, находящемся между неподвижными границами при нагреве нижней границы и ненулевом градиенте давления на верхней

При рассмотрении неизотермического течения гидродинамические поля зависят пропорционально от температурного коэффициента объемного расширения жидкости и обратно пропорционально — от кинематической вязкости и от коэффициента температуропроводности движущейся жидкости.

**Зависимость компонент поля скорости от чисел подобия.** Для исследования гидродинамических полей вводятся масштабы. Используются числа подобия для оценки влияния соответствующих членов в системе уравнений Навье — Стокса, что физически означает степень влияния соответствующих сил [28]. В качестве параметров подобия выбирают числа: Рейнольдса, отражающее пропорциональное отношение потока импульса жидкости, заключенного в объеме единичной длины вдоль по потоку, через выбранное сечение к силе вязкого трения, действующей на этот объем,  $Re = \frac{Wh}{\nu}$ ; Грасгофа, характеризующее соотношение архимедовых сил, сил инерции и внутреннего трения в потоке,  $Gr_A = \frac{Ag\beta h^4}{\nu^2}$  и  $Gr_B = \frac{Bg\beta h^4}{\nu^2}$ ; Эйлера, иллюстрирующее отношение сил давления к потоку импульса,

$Eu_1 = \frac{S_1 h}{W^2}$  и  $Eu_2 = \frac{S_2 h}{W^2}$ . В итоге полученное решение (4) приводится к безразмерному виду. Знаки введенных в рассмотрение чисел подобия зависят от констант в граничных условиях, что существенно затрудняет анализ результатов.

Поле скорости в безразмерных величинах определяется соотношением

$$\begin{aligned} \frac{V_x(Z)}{W} &= Z \left[ \cos \varphi + (Z-1) \left( \frac{Eu_1 Re}{2} - \frac{Gr_A}{24 Re} (Z^2 - 3Z + 3) \right) \right]; \\ \frac{V_y(Z)}{W} &= Z \left[ \sin \varphi + (Z-1) \left( \frac{Eu_2 Re}{2} - \frac{Gr_B}{24 Re} (Z^2 - 3Z + 3) \right) \right]. \end{aligned} \quad (5)$$

Эпюра распределения скоростей в потоке вязкой жидкости отражает течение Куэтта — Пуазейля — Рэлея — Бенара, стимулированное движением верхней границы и градиентами давления и температуры. При определенных характеристиках жидкости и граничных условиях существует застойная зона (рис. 3), определяющая наличие противотечений в слое жидкости.



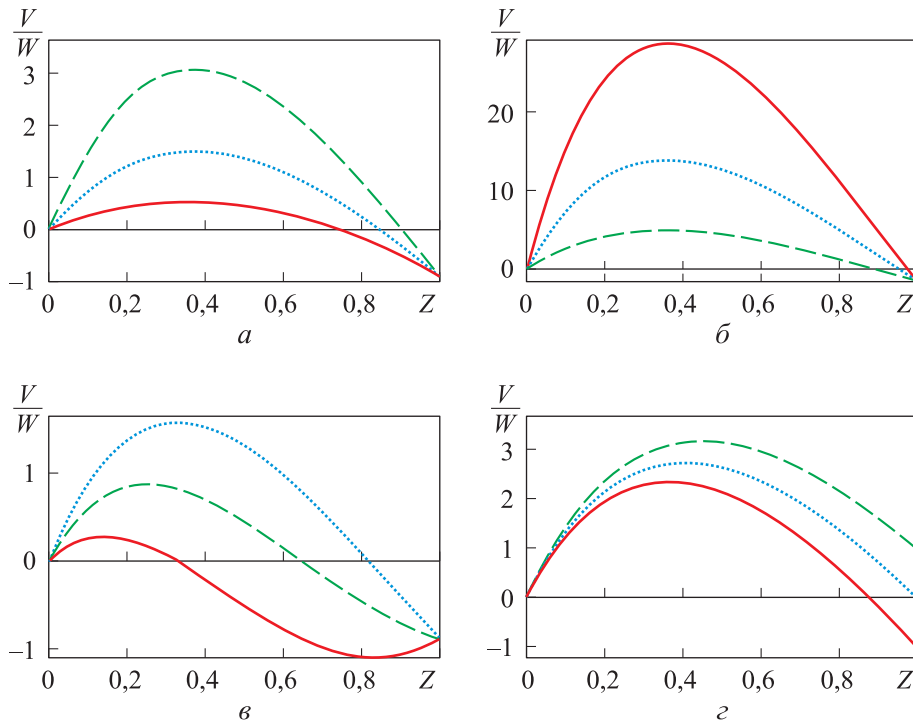
**Рис. 3.** Положение застойной зоны на эпюре распределения скоростей в слое жидкости, находящемся между неподвижной нижней нагреваемой границей и подвижной верхней. Числа подобия:  $Re = 15 \cdot 10^3$ ,  $Eu_2 = 2Eu_1 = -9 \cdot 10^{-4}$ ,  $Gr_A = Gr_B = 15 \cdot 10^5$  и  $\varphi = 7\pi/6$

В работах разных авторов можно встретить исследования числового значения чисел подобия, поиска критических значений, при которых происходит изменение качества движения жидкости. Так, в работах [29, 30] отмечено, что при плоском течении Пуазейля критическое теоретическое число Рейнольдса составляет 5772, экспериментальное 1000. Рассмотрим эти значения в качестве примера. Обратим внимание на то, что в каждом из этих случаев застойная зона



определяется. На рис. 4 показано влияние чисел подобия Грасгофа, Рейнольдса, Эйлера и задаваемого в граничных условиях угла  $\varphi$ , определяющего направление скорости в плоскости верхней границы, на существование застойной зоны на типовом профиле составляющей скорости  $V_x(Z)$ . Иллюстрации для составляющей  $V_y(Z)$  аналогичны.

Если положить в формулах (5)  $Gr_A = Gr_B = 0$ , то получим точное решение уравнений Навье — Стокса, опубликованное в [25]. В этом случае формулы (5) описывают изотермическое установившееся неоднородное течение Куэтта. Если  $Gr_A = 0$  или  $Gr_B = 0$ , то формулы (5) описывают неоднородное конвективное течение Куэтта.



**Рис. 4.** Застойная зона на профиле составляющей скорости  $V_x(Z)$  в масштабном представлении (масштаб  $W$ ) по слою жидкости, находящемуся между неподвижной нижней нагреваемой границей и подвижной верхней, в зависимости от чисел подобия:

Грасгофа:  $Gr_A = Gr_B = 5 \cdot 10^4$  (—);  $Gr_A = Gr_B = 8 \cdot 10^5$  (.....);  $Gr_A = Gr_B = 2 \cdot 10^6$  (---) (а); Рейнольдса:  $Re = 1000$  (—);  $Re = 2040$  (.....);  $Re = 5772$  (---) (б); Эйлера:  $Eu = 0,001$  (—);  $Eu = 5 \cdot 10^{-5}$  (.....);  $Eu = 5 \cdot 10^{-4}$  (---) (в) и задаваемого в граничных условиях угла  $\varphi$ :  $\varphi = \pi$  (—);  $\varphi = \pi/2$  (.....);  $\varphi = 0$  (---) (г). Числа подобия и угол, зависимость от которых на графиках не рассматривается, равны  $Re = 15 \cdot 10^3$ ,  $Eu_2 = 2 \cdot Eu_1 = -9 \cdot 10^{-4}$ ,  $Gr_A = Gr_B = 15 \cdot 10^5$  и  $\varphi = 7 \cdot \pi/6$ .  $Z = z/h$  — безразмерная вертикальная координата

**Исследование поля скорости.** Рассмотрим влияние градиентов температуры и давления при нулевых скоростях жидкости на границах ( $W = 0$ ):

$$V_x(Z) = -Z(Z-1) \left( \frac{g\beta Ah^3}{24\nu} (Z^2 - 3Z + 3) - \frac{S_1 h^2}{2\nu} \right);$$

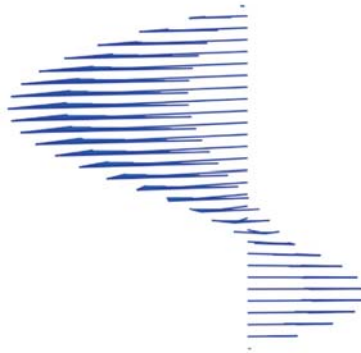
$$V_y(Z) = Z(Z-1) \left( \frac{g\beta Bh^3}{24\nu} (Z^2 - 3Z + 3) - \frac{S_2 h^2}{2\nu} \right);$$

$$g\beta Ah(Z^2 - 3Z + 3) - 12S_1 = 0 \text{ и } g\beta Bh(Z^2 - 3Z + 3) - 12S_2 = 0.$$

Решение этих квадратных уравнений показывает, что кроме очевидных корней многочленов, описывающих проекции скорости,  $Z = 0$  и  $Z = 1$ , в промежутке  $0 < Z < 1$  возможно существование противотечения только при условии, что соблюдаются неравенства:

$$\frac{7}{48} < \frac{S_1}{g\beta Ah} < \frac{1}{4} \text{ и } \frac{7}{48} < \frac{S_2}{g\beta Bh} < \frac{1}{4}.$$

Застойная зона на эпюре распределения скоростей в слое жидкости, находящемся между неподвижными границами при нагреве нижней границы и ненулевом градиенте давления на верхней, показана на рис. 5. Отметим, что при отсутствии градиентов температуры и градиентов давления противотечений в жидкости быть не может.



**Рис. 5.** Застойная зона на эпюре распределения скоростей в слое жидкости, находящемся между неподвижными границами при нагреве нижней границы и ненулевом градиенте давления на верхней

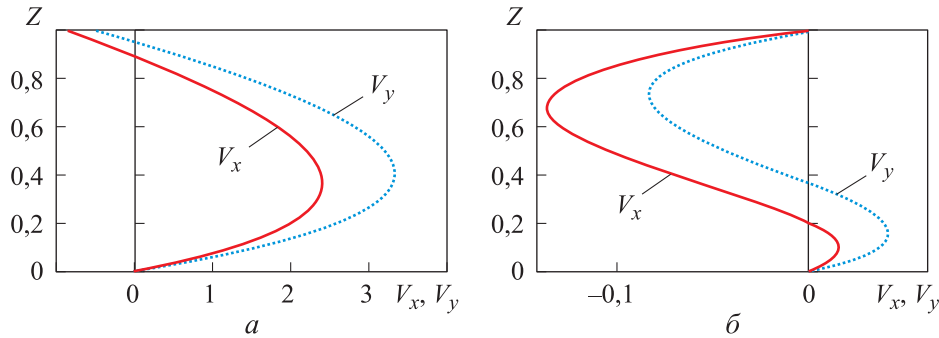
Для исследования существования застойных зон в общем случае воспользуемся графоаналитическим методом. Представим составляющие скорости в виде суммы полиномов:

$$\frac{V_x(Z)}{W} = [f_1(Z) + f_2(Z)]Z, \quad \frac{V_y(Z)}{W} = [f_3(Z) + f_4(Z)]Z;$$

$$f_1(Z) = \cos \varphi + (Z-1) \left( \frac{Eu_1 Re}{2} \right), \quad f_2(Z) = \frac{Gr_A}{24 Re} (Z-1) (Z^2 - 3Z + 3),$$

$$f_3(Z) = \sin \varphi + (Z-1) \left( \frac{Eu_2 Re}{2} \right), \quad f_4(Z) = \frac{Gr_B}{24 Re} (Z-1) (Z^2 - 3Z + 3).$$

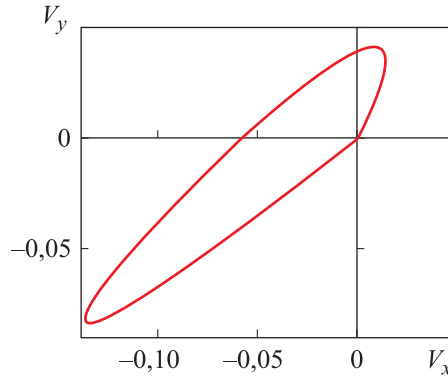
Представляя полиномы графически, можно показать существование одной застойной зоны (рис. 6) при некоторых характеристиках жидкости и определенных граничных условиях.



**Рис. 6.** Застойная зона на профилях составляющих скорости  $V_x(Z)$  и  $V_y(Z)$  в слое жидкости при нагревании нижней границы и ненулевых градиентах давления на верхней границе. Верхняя граница подвижная (а) и неподвижная (б)

Следовательно, скорость в зависимости от чисел подобия, то есть при определенных характеристиках жидкости и граничных условиях, может иметь одну застойную зону. Очевидно, что параметры, входящие в выражения составляющих скорости  $V_x(Z)$  и  $V_y(Z)$  могут принимать значения, при которых не будут существовать застойные зоны. Однако с физической точки зрения этот случай не интересен, если не происходит усиление скорости по толщине слоя.

Для наглядного представления поведения скорости при движении жидкости в плоском канале построим годограф скорости (рис. 7) в пространстве скоростей, точнее в плоскости двух проекций скорости.



**Рис. 7.** Годограф скорости в слое жидкости при нагревании нижней границы и ненулевых градиентах давления на верхней границе; границы неподвижные

**Касательные напряжения на недеформируемой границе.** Касательные напряжения на недеформируемой нижней границе определяются соотношениями

$$\tau_{xz}(z) = \frac{\eta}{2} \left( \frac{\partial V_x}{\partial z} + \frac{\partial V_z}{\partial x} \right) = \frac{\eta}{2} \left( \frac{\partial V_x}{\partial z} \right),$$

$$\tau_{yz}(z) = \frac{\eta}{2} \left( \frac{\partial V_y}{\partial z} + \frac{\partial V_z}{\partial y} \right) = \frac{\eta}{2} \left( \frac{\partial V_y}{\partial z} \right),$$

где  $\eta = \nu\rho$  — динамическая вязкость.

Касательные напряжения в рассматриваемом случае в размерном виде записываются следующим образом:

$$\tau_{xz}(z) = \frac{\eta}{2} \left\{ \frac{W \cos \varphi}{h} + \frac{S_1(2z-h)}{2\nu} - \frac{g\beta A}{24\nu} \left( \frac{4z^3}{h} - 12z^2 + 12hz - 3h^2 \right) \right\},$$

$$\tau_{yz}(z) = \frac{\eta}{2} \left\{ \frac{W \sin \varphi}{h} + \frac{S_2(2z-h)}{2\nu} - \frac{g\beta B}{24\nu} \left( \frac{4z^3}{h} - 12z^2 + 12hz - 3h^2 \right) \right\}.$$

Касательные напряжения на недеформируемой границе при  $z = 0$  имеют вид

$$\tau_{xz}(z) = \frac{\eta}{2} \left\{ \frac{W \cos \varphi}{h} - \frac{S_1 h}{2\nu} + \frac{g\beta A h^2}{8\nu} \right\},$$

$$\tau_{yz}(z) = \frac{\eta}{2} \left\{ \frac{W \sin \varphi}{h} - \frac{S_2 h}{2\nu} + \frac{g\beta B h^2}{8\nu} \right\}.$$

Заметим, что касательные напряжения  $\tau_{xz}(z)$  и  $\tau_{yz}(z)$  обращаются в нуль на нижней границе при значениях толщины слоя жидкости, определяемых из алгебраических уравнений:

$$g\beta Ah^3 - 4S_1 h^2 + 8\nu W \cos \varphi = 0,$$

$$g\beta Bh^3 - 4S_2 h^2 + 8\nu W \sin \varphi = 0.$$

Данные уравнения аналитически не разрешимы в общем виде. Укажем частные случаи, когда можно вычислить толщину слоя жидкости, при которой отсутствует касательное напряжение на нижней недеформируемой границе.

Для начала рассмотрим случай, когда  $W = 0$ . Тогда толщина слоя определяется выражениями

$$h = \frac{4S_1}{g\beta A} \quad \text{или} \quad h = \frac{4S_2}{g\beta B}.$$

Решение накладывает ограничения на задание граничных условий краевой задачи для существования толщин жидкости, при которых либо  $\tau_{xz}(z)$ , либо  $\tau_{yz}(z)$  обращаются в нуль при  $z = 0$ . Одновременно касательные напряжения будут принимать нулевые значения при выполнении условия, связывающего градиенты температуры и давления, заданными на границах слоя жидкости:

$$\frac{A}{B} = \frac{S_1}{S_2}.$$

В общем случае одновременно касательные напряжения будут принимать нулевые значения при выполнении условия, связывающего угол направления скорости с числами подобия:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{4Eu_2 \operatorname{Re}^2 - Gr_B}{4Eu_1 \operatorname{Re}^2 - Gr_A}.$$

**Заключение.** Найдено аналитическое частное решение уравнения Навье — Стокса для описания поля скорости при плоском течении жидкости. В качестве граничных условий принимается нагрев или охлаждение нижней неподвижной границы и ненулевые градиенты давления на верхней как подвижной, так и неподвижной границе. Проведены исследования влияния чисел подобия на составляющие скорости. Графоаналитическим методом найдены условия существования противотечений и наглядно показано положение застойных зон на эпюрах скоростей. Указаны толщины слоя жидкости, при которых принимают нулевые значения касательные напряжения на нижней недеформируемой границе.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Drazin P.G., Riley N. The Navier–Stokes equations: A classification of flows and exact solutions. Cambridge, Cambridge Univ. Press, 2006, 196 p. <https://doi.org/10.1017/CBO9780511526459>
- [2] Ershkov S.V., Prosviryakov E.Yu., Burmasheva N.V., Christianto V. Towards understanding the algorithms for solving the Navier–Stokes equations. *Fluid Dynamics Research*, 2021, vol. 53 (4), p. 044501. <https://doi.org/10.1088/1873-7005/ac10f0>
- [3] Andreev V.K., Bekezhanova V.B. Stability of nonisothermal fluids. *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 2013, vol. 54 (2), pp. 171–184. <https://doi.org/10.1134/S0021894413020016>
- [4] Ershkov S., Burmasheva N.V., Leshchenko D.D., Prosviryakov E.Yu. Exact solutions of the Oberbeck–Boussinesq equations for the description of shear thermal diffusion of Newtonian fluid flows. *Symmetry*, 2023, vol. 15 (9), p. 1730. <https://doi.org/10.3390/sym15091730>
- [5] Nemenyi P.F. Recent developments in inverse and semi-inverse methods in the mechanics of continua. *Advances in Applied Mechanics*, 1951, vol. 2, pp. 123–151.
- [6] Kovalev V.P., Prosviryakov E.Yu. A new class of non-helical exact solutions of the Navier–Stokes equations. *J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.*, 2020, vol. 24 (4), pp. 762–768. <https://doi.org/10.14498/vsgtu1814>
- [7] Ковалёв В.П., Просвиряков Е.Ю., Сизых Г.Б. Получение примеров точных решений уравнений Навье — Стокса для винтовых течений методом суммирования скоростей. *Труды МФТИ*, 2017, т. 9, № 1, с. 71–88.
- [8] Lin C.C. Note on a class of exact solutions in magnetohydrodynamics. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 1958, vol. 1, pp. 391–395. <https://doi.org/10.1007/BF00298016>
- [9] Сидоров А.Ф. О двух классах решений уравнений механики жидкости и газа и их связи с теорией бегущих волн. *Прикл. мех. и техн. физ.*, 1989, № 2, с. 34–40. <https://doi.org/10.1007/BF00852164>
- [10] Аристов С.Н. *Вихревые течения в тонких слоях жидкости: дис. ...д-ра физ.-мат. наук*. Пермь, 1990, 303 с.
- [11] Аристов С.Н., Просвиряков Е.Ю. Новый класс точных решений трехмерных уравнений термодиффузии. *Теоретические основы химической технологии*, 2016, т. 50, № 3, с. 294–301. <https://doi.org/10.1134/S0040579516030027>
- [12] Остроумов Г.А. *Свободная конвекция в условиях внутренней задачи*. Москва, Гос. изд-во технико-теорет. лит-ры, 1952, 256 с.
- [13] Бирих Р.В. О термокапиллярной конвекции в горизонтальном слое жидкости. *ПМТФ*, 1966, № 3, с. 69–72. <https://doi.org/10.1007/BF00914697>
- [14] Ortiz-Pérez A.S., Davalos-Orozco L.A. Convection in a horizontal fluid layer under an inclined temperature gradient. *Phys. Fluids*, 2011, vol. 28 (3), pp. 084107–084111.
- [15] Smith M.K., Davis S.H. Instabilities of dynamic thermocapillary liquid layers. Pt. 1. Convective instabilities. *J. Fluid Mech.*, 1983, vol. 132, pp. 119–144.
- [16] Андреев В.К., Бекежанова В.Б. Устойчивость неизотермических жидкостей. *ПМТФ*, 2013, № 2, с. 3–29.
- [17] Goncharova O., Kabov O. Gas flow and thermocapillary effects of fluid flow dynamics in a horizontal layer. *Microgravity Sci. Technol.*, 2009, vol. 21 (1), pp. 129–137.
- [18] Пухначев В.В. Нестационарные аналоги решения Бириха. *Известия АлтГУ*, 2011, № 1 (23), с. 62–69.

- [19] Burmasheva N.V., Privalova V.V., Prosviryakov E.Yu. Layered Marangoni convection with the Navier slip condition. *Sadhana-Academy Proceedings in Engineering Sciences*, 2021, vol. 46 (1). Article number: 55.
- [20] Aristov S.N., Prosviryakov E.Yu. On laminar flows of planar free convection. *Russ. J. Nonlin. Dyn.*, 2013, vol. 9, pp. 651–657.
- [21] Аристов С.Н., Просвирыков Е.Ю., Спесак Л.Ф. Нестационарная слоистая тепловая и концентрационная конвекция Марангони вязкой несжимаемой жидкости. *Вычислительная механика сплошных сред*, 2015, № 4, с. 445–456. <https://doi.org/10.7242/1999-6691/2015.8.4.38>
- [22] Просвирыков Е.Ю., Спесак Л.Ф. Пространственно неоднородные слоистые течения вязкой несжимаемой жидкости. *Теоретические основы химической технологии*, 2018, т. 52 (5), с. 483–488. <https://doi.org/10.1134/S0040579518050391>
- [23] Shtern V.N. *Counterflows: paradoxical fluid mechanics phenomena*. Cambridge, New York, Cambridge University Press, 2012, 470 p.
- [24] Бурмашева Н.В., Просвирыков Е.Ю. Точное решение для установившихся конвективных концентрационных течений типа Куэтта. *Вычислительная механика сплошных сред*, 2020, т. 13 (3), с. 337–349. <https://doi.org/10.7242/1999-6691/2020.13.3.27>
- [25] Landau L.D., Lifshitz E.M. *Course of Theoretical Physics: In 10 vols.: Vol. 6. Fluid Mechanics*. 2nd ed. Oxford, Butterworth-Heinemann, 2003, 558 p.
- [26] Аристов С.Н., Просвирыков Е.Ю. Неоднородные течения Куэтта. *Нелинейная динамика*, 2014, т. 10 (2), с. 177–182. <https://doi.org/10.20537/nd1402004>
- [27] Berestova S.A., Prosviryakov E.Y. An inhomogeneous steady-state convection of a vertical vortex fluid. *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2023, vol. 19 (2), pp. 167–186. <https://doi.org/10.20537/nd230201>
- [28] Макаров К.А. О физическом смысле числа Рейнольдса и других критериях гидродинамического подобия. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2014, вып. 1, с. 1–8. <https://doi.org/10.18698/2308-6033-2014-1-1185>
- [29] Кондратьев А.С., Огородник К.Ф. Определение критических параметров потока при течениях Пуазейля, Куэтта и Тейлора — Куэтта. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2020, вып. 6, с. 1–17. <https://doi.org/10.18698/2308-6033-2020-6-1985>
- [30] Dou H.S., Khoo B.C., Tsai H.M. Determining the critical condition for flow transition in a full-developed annulus flow. *Journal of Petroleum Science and Engineering*, 2010, vol. 73 (1–2), pp. 41–47. <https://doi.org/10.48550/arXiv.physics/0504193>

Статья поступила в редакцию 25.06.2024

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Берестова С.А., Просвирыков Е.Ю. Точное аналитическое решение для поля скорости сдвигового течения Куэтта — Пуазейля — Бенара. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2024, вып. 9. EDN [MNDEXQ](https://doi.org/10.18698/2308-6033-2024-9-1185)

**Берестова Светлана Александровна** — д-р физ.-мат. наук, доцент, заведующий кафедрой теоретической механики Института фундаментального образования, профессор учебно-научного центра системной инженерии Уральской переловой инженерной школы «Цифровое производство» Уральского федерального университета; Лауреат Премии Правительства РФ в области образования 2019. Область деятельности и научные интересы: точные решения уравнений Навье — Стокса в гидродинамике, анизотропия свойств поликристаллов, композиционных материалов, алгоритмизация инвариантных подходов к геометрическому моделированию реальных конструкций, цифровая образовательная среда. e-mail: [s.a.berestova@urfu.ru](mailto:s.a.berestova@urfu.ru)

**Просвиряков Евгений Юрьевич** — д-р физ.-мат. наук, доцент, профессор кафедры информационных технологий и систем управления Института радиоэлектроники и информационных технологий–РтФ Уральского федерального университета. Область деятельности и научные интересы: поиск классов точных решений уравнений Навье — Стокса и численное интегрирование нелинейных систем дифференциальных уравнений в частных производных в гидродинамике, исследования полиномов. e-mail: e.iu.prosviriakov@urfu.ru



## **Velocity field exact analytical solution for the Couette—Poiseuille—Benard shear flow**

© S.A. Berestova, E.Yu. Prosviryakov

Ural Federal University named after the first President of Russia B.N. Yeltsin,  
Ekaterinburg, 620062, Sverdlovsk region, Russian Federation

*The paper presents a particular analytical solution to the Navier—Stokes equations for describing the stationary Benard convection of the viscous incompressible fluid flow in the infinitely extended horizontal layer. It analyzes velocity field in the vertical vortex flow. The large-scale fluid flow is considered in approximation to a thin layer with the non-deformable boundaries. Two horizontal velocity vector components are taken into account. Shear flow appears when the lower boundary is heated/cooled, and the pressure gradient is at the upper boundary. Temperature and pressure are taken as the linear forms. Linear form coefficients depend on the vertical (transverse) coordinate. The priori unknown functions include polynomials describing the velocity field and are precisely determined from the sixth-order system of ordinary differential equations. The polynomials spectral properties are identified in the solution domain. Analysis of the polynomials zero distribution defining the velocity field makes it possible to determine the fluid layer stratification. The paper provides a detailed study of the stable reverse flows in the convective fluid flow of the Couette—Poiseuille—Benard type.*

**Keywords:** *non-uniform flow, convection, exact solution, vertical vortex, counterflow, stagnation zone*

### REFERENCES

- [1] Drazin P.G., Riley N. *The Navier—Stokes equations: A classification of flows and exact solutions*. Cambridge, Cambridge Univ. Press, 2006, 196 p. <https://doi.org/10.1017/CBO9780511526459>
- [2] Ershkov S.V., Prosviryakov E.Yu., Burmasheva N.V., Christianto V. Towards understanding the algorithms for solving the Navier—Stokes equations. *Fluid Dynamics Research*, 2021, vol. 53 (4), p. 044501. <https://doi.org/10.1088/1873-7005/ac10f0>
- [3] Andreev V.K., Bekezhanova V.B. Stability of nonisothermal fluids. *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 2013, vol. 54 (2), pp. 171–184. <https://10.1134/S0021894413020016>
- [4] Ershkov S., Burmasheva N.V., Leshchenko D.D., Prosviryakov E.Yu. Exact solutions of the Oberbeck—Boussinesq equations for the description of shear thermal diffusion of Newtonian fluid flows. *Symmetry*, 2023, vol. 15 (9), p. 1730. <https://doi.org/10.3390/sym15091730>
- [5] Nemenyi P.F. Recent developments in inverse and semi-inverse methods in the mechanics of continua. *Advances in Applied Mechanics*, 1951, vol. 2, pp. 123–151.
- [6] Kovalev V.P., Prosviryakov E.Yu. A new class of non-helical exact solutions of the Navier—Stokes equations. *J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.*, 2020, vol. 24 (4), pp. 762–768. <https://doi.org/10.14498/vsgtu1814>
- [7] Kovalev V.P., Prosviryakov E.Yu., Sizykh G.B. Poluchenie primerov tochnykh resheniy uravneniy Navye—Stoksa dlya vintovykh techeniy metodom summirovaniya skorostey [Obtaining examples of exact solutions of the Navier—Stokes equations for helical flows by the method of summation of velocities]. *Trudy MFTI — Proceedings of MIPT*, 2017, vol. 9, no. 1, pp. 71–88.

- [8] Lin C.C. Note on a class of exact solutions in magnetohydrodynamics. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 1958, vol. 1, pp. 391–395.  
<https://doi.org/10.1007/BF00298016>
- [9] Sidorov A.F. O dvukh klassakh resheniy uravneniy mekhaniki zhidkosti i gaza i ikh svyazi s teoriey begushchikh voln [Two classes of solutions of the fluid and gas mechanics equations and their connection to traveling wave theory]. *Prikladnaya mekhanika i tekhnicheskaya fizika — Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 1989, vol. 30, no. 2, pp. 197–203.  
<https://doi.org/10.1007/BF00852164>
- [10] Aristov S.N. *Vikhrevye techeniya v tonkikh sloyakh zhidkosti. Dis. ... d-ra fiz.-nat. nauk* [Eddy currents in thin liquid layers. Diss. ... Dr. Sc. (Phys.-Math.)]. Perm, 1990, 303 p.
- [11] Aristov S.N., Prosviryakov E.Yu. Novyi klass tochnykh resheniy trekhmernykh uravneniy termodiffuzii [A new class of exact solutions for three-dimensional thermal diffusion equations]. *Teoreticheskie osnovy khimicheskoy tekhnologii — Theoretical Foundations of Chemical Engineering*, 2016, vol. 50, no. 3, pp. 294–301. <https://doi.org/10.1134/S0040579516030027>
- [12] Ostroumov G.A. *Svobodnaya konvektsiya v usloviyakh vnutrenney zadachi* [Free convection under the conditions of the internal problem]. Moscow, Gos. Izd-vo Tekhniko-Teoret. Lit-ry, 1952, 233 p.
- [13] Birikh R.V. O termokapillyarnoy konveksii v gorizontálnom sloe zhidkosti [Thermocapillary convection in a horizontal layer of liquid]. *PMTF — Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 1966, vol. 3, pp. 69–72.  
<https://doi.org/10.1007/BF00914697>
- [14] Ortiz-Pérez A.S., Davalos-Orozco L.A. Convection in a horizontal fluid layer under an inclined temperature gradient. *Phys. Fluids*, 2011, vol. 28 (3), pp. 084107–084111.
- [15] Smith M.K., Davis S.H. Instabilities of dynamic thermocapillary liquid layers. Pt. 1. Convective instabilities. *J. Fluid Mech.*, 1983, vol. 132, pp. 119–144.
- [16] Andreev V.K., Bekezhanova V.B. Ustoychivost neizotermicheskikh zhidkostey [Stability of non-isothermal fluids (Review)]. *PMTF — Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 2013, vol. 54, pp. 171–184.
- [17] Goncharova O., Kabov O. Gas flow and thermocapillary effects of fluid flow dynamics in a horizontal layer. *Microgravity Sci. Technol.*, 2009, vol. 21 (1), pp. 129–137.
- [18] Pukhnachev V.V. Nestatsionarnye analogi resheniya Birikha [Non-stationary analogues of the Birikh solution]. *Izvestiya AltGU — Izvestiya of Altai State University*, 2011, no. 1 (23), pp. 62–69.
- [19] Burmasheva N.V., Privalova V.V., Prosviryakov E.Yu. Layered Marangoni convection with the Navier slip condition. In: *Sadhana-Academy Proceedings in Engineering Sciences*, 2021, vol. 46 (1). Article number: 55.
- [20] Aristov S.N., Prosviryakov E.Yu. On laminar flows of planar free convection. *Russ. J. Nonlin. Dyn.*, 2013, vol. 9, pp. 651–657.
- [21] Aristov S., Prosviryakov E., Spevak L. Nestatsionarnaya sloistaya teplovaya i kontsentratsionnaya konvektsiya Maragoni vyazkoy neszhimaemoy zhidkosti [Nonstationary laminar thermal and solutal Marangoni convection of a viscous fluid]. *Vychislitel'naya mekhanika sploshnykh sred — Computational Continuum Mechanics*, 2015, vol. 4, pp. 445–456.  
<https://doi.org/10.7242/1999-6691/2015.8.4.38>
- [22] Prosviryakov E., Spevak L. Prostranstvenno neodnorodnye sloistye techeniya vyazkoy neszhimaemoy zhidkosti [Layered three-dimensional nonuniform viscous incompressible flows]. *Teoreticheskie osnovy khimicheskoy tekhnologii —*

- Theoretical Foundations of Chemical Engineering*, 2018, vol. 52 (5), pp. 483–488. <https://doi.org/10.1134/S0040579518050391>
- [23] Shtern V.N. *Counterflows: paradoxical fluid mechanics phenomena*. Cambridge, New York, Cambridge University Press, 2012, 470 p. ISBN 978-1-107-02759-6
- [24] Burmasheva N.V., Prosviryakov E.Yu. Tochnoe reshenie dlya ustanovivshisya konvektivnykh kontsentratsionnykh techeniy tipa Kuetta [Exact solution for stable convective concentration flows of a Couette type]. *Vychislitel'naya mekhanika sploshnykh sred — Computational Continuum Mechanics*, 2020, vol. 13 (3), pp. 337–349. <https://doi.org/10.7242/1999-6691/2020.13.3.27>
- [25] Landau L.D., Lifshitz E.M. *Course of Theoretical Physics: In 10 vols.: Vol. 6. Fluid Mechanics*. 2nd ed. Oxford, Butterworth-Heinemann, 2003, 558 p.
- [26] Aristov S.N., Prosviryakov E.Yu. Neodnorodnye techeniya Kuetta [Inhomogeneous Couette flows]. *Nelineynaya dinamika — Nonlinear Dynamics*, 2014, vol. 10 (2), pp. 177–182. <https://doi.org/10.20537/nd1402004>
- [27] Berestova S.A., Prosviryakov E.Yu. An inhomogeneous steady-state convection of a vertical vortex fluid, *Russ. J. Nonlin. Dyn.*, 2023, vol. 19 (2), pp. 167–186. <https://doi.org/10.20537/nd230201>
- [28] Makarov K.A. O fizicheskom smysle chisla Reynoldsa i drugikh kriteriyakh gidrodinamicheskogo podobiya [On the physical meaning of Reynolds number and other criteria of hydrodynamic similarity]. *Inzhenerny zhurnal: nauka i innovatsii — Engineering Journal: Science and Innovation*, 2014, iss. 1. <https://doi.org/10.18698/2308-6033-2014-1-1185>
- [29] Kondratyev A.S., Ogorodnik K.F. Opredelenie kriticheskikh parametrov potoka pri techeniyakh Puazeylya, Kuetta i Teylora–Kuetta [Determining critical flow parameters for the Poiseuille, Couette and Taylor–Couette flows]. *Inzhenerny zhurnal: nauka i innovatsii — Engineering Journal: Science and Innovation*, 2020, iss. 6. <https://doi.org/10.18698/2308-6033-2020-6-1985>
- [30] Dou H.S., Khoo B.C., Tsai H.M. Determining the critical condition for flow transition in a full-developed annulus flow. *Journal of Petroleum Science and Engineering*, 2010, vol. 73 (1–2), pp. 41–47. <https://doi.org/10.48550/arXiv.physics/0504193>

**Berestova S.A.**, Dr. Sc. (Phys.-Math.), Associate Professor, Head of the Department of Theoretical Mechanics, Institute of Fundamental Education; Professor, Educational and Scientific Center for System Engineering, Ural Advanced Engineering School “Digital Production”, Ural Federal University; Winner of the Prize of the Government of the Russian Federation in the field of education 2019. Activity and scientific interests: exact solutions to the Navier—Stokes equations in hydrodynamics, polycrystal and composite material properties anisotropy, algorithmization of invariant approaches to geometric simulation of real structures, digital educational environment.  
e-mail: [s.a.berestova@urfu.ru](mailto:s.a.berestova@urfu.ru)

**Prosviryakov E.Yu.**, Dr. Sc. (Phys.-Math.), Associate Professor, Professor, Department of Information Technology and Control Systems, Institute of Radioelectronics and Information Technology – RTF, Ural Federal University. Activity and scientific interests: search for classes of exact solutions to the Navier—Stokes equations and numerical integration of the nonlinear systems of partial differential equations in hydrodynamics, polynomials study. e-mail: [e.iu.prosviriakov@urfu.ru](mailto:e.iu.prosviriakov@urfu.ru)