УДК 519.6: 531.19 EDN TDERNS

Анализ устойчивости по Якоби динамической системы Лоренца

© П.М. Шкапов[1], В.Д. Сулимов[1], А.В. Сулимов[1,2]

[1]МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Российская Федерация
[2]Филиал МГУ им. М.В. Ломоносова в г. Севастополе, Севастополь, 299000, Российская Федерация

Рассмотрены задачи анализа устойчивости по Якоби, а также восстановления свободных параметров динамической системы Лоренца по косвенной, приближенно заданной информации. В контексте теории Косамби — Картана — Черна введено геометрическое описание эволюции системы во времени и определены пять геометрических инвариантов. Собственные значения второго инварианта (тензора кривизны отклонения) дают оценку устойчивости системы по Якоби. Подобное исследование представляет интерес в приложениях, где требуется установить области, в которых имеют место одновременно устойчивость по Ляпунову и устойчивость по Якоби. Сформулирована обратная задача восстановления параметров системы по заданным приближенно собственным значениям второго инварианта. Решение регуляризованной обратной задачи определено с использованием оптимизационного подхода. Скалярные критериальные функции предполагаются непрерывными, многомерными, многоэкстремальными, локально липшицевыми, не обязательно всюду дифференцируемыми. При поиске глобальных решений применен новый гибридный алгоритм, интегрирующий стохастический алгоритм сканирования пространства переменных и детерминированный метод локальной минимизации. В фазе локального поиска введены двухпараметрические сглаживающие аппроксимации критериальных функций. Приведен численный пример восстановления параметров системы Лоренца.

Ключевые слова: *устойчивость по Якоби, теория Косамби – Картана – Черна, геометрический инвариант, система Лоренца, восстановление параметров, глобальная оптимизация, гибридный алгоритм*

Введение. Исследования устойчивости динамических систем в общем случае могут включать в себя применение теории Косамби — Картана — Черна (теории ККЧ) [1, 2]. При этом реализуется дифференциально-геометрический подход к вариационным дифференциальным уравнениям, описывающим отклонение целой траектории системы от ближайших траекторий. При геометрическом описании, вводимом теорией ККЧ, могут быть определены пять геометрических инвариантов системы. Второй инвариант (называемый тензором кривизны отклонения) дает оценку устойчивости системы по Якоби: соответствующий критерий устойчивости формулируется с использованием собственных значений указанного инварианта. Анализ устойчивости по Якоби связан с изучением робастности динамической системы как меры нечувствительности и адаптации к изменению параметров как собственно системы, так и окружающей среды [3]. Применение теории ККЧ актуально в практических приложениях, где требуется определить области, в которых имеют место одновременно устойчивость по Ляпунову и устойчивость по Якоби.

Пусть для нелинейной динамической системы с заданной структурой определен тензор кривизны отклонения. Предполагается, что собственные значения указанного тензора не только дают оценку устойчивости системы по Якоби (в соответствии с теорией ККЧ), но также несут и содержательную информацию о самой системе. Некоторые обратные задачи на собственные значения тензоров представлены в работе [4]. Далее рассматривается постановка задачи, в которой требуется определить существенные характеристики системы по заданным собственным значениям ее тензора кривизны отклонения. Необходимые входные данные задачи могут быть получены из эксперимента посредством прямых измерений с последующей компьютерной обработкой. Искомыми являются, например, физические и геометрические характеристики системы и окружающей среды, характеристики управления и др. Формулируется обратная задача восстановления существенных параметров исследуемой динамической системы по косвенной информации, представленной конечным множеством собственных значений тензора кривизны отклонения. Обратные задачи восстановления параметров систем относятся к классу некорректно поставленных задач, при решении которых требуется применение специальных регуляризирующих методов [5].

Одним из основных подходов к решению обратных задач является оптимизационный, связанный с минимизацией некоторой критериальной функции. В приложениях необходимо также учитывать неполноту входной косвенной информации, зашумленность измеряемых данных, возможное наличие кратных собственных значений и др. [6, 7]. Ввиду естественной ограниченности энергии изменений в системе вводится предположение о том, что отношения приращений критериальных функций к приращениям аргументов не превышают некоторого порога, характеризуемого константой Липшица [8]. В общем случае критериальные функции обратных задач являются непрерывными, многомерными, локально липшицевыми, многоэкстремальными, не обязательно всюду дифференцируемыми. Следовательно, для решения обратных задач восстановления параметров системы требуется применение алгоритмов глобальной недифференцируемой оптимизации [9]. В целом, рассматриваемый далее подход основан на разработке и применении математических моделей систем, методов определения геометрических структур и анализа устойчивости систем по Якоби на основе теории ККЧ, методов теории обратных задач, методов глобальной оптимизации.

Геометрические инварианты системы и ее устойчивость по Якоби. Краткий обзор теории ККЧ дан в работах [1, 2]. Уравнения движения n-мерной системы (нелинейные в общем случае) могут быть получены с использованием уравнений Эйлера — Лагранжа и представлены в виде [2]

$$\ddot{x}^i + 2G^i(x^j, \dot{x}^j, t) = 0, \; i = 1, 2, ..., n, \tag{1}$$

где локальная система координат $(x^i, \dot{x}^i, t)$, $i = 1, 2, ..., n$, введена на открытом связном подмножестве Ω евклидова $(2n+1)$-мерного пространства $R^n \times R^n \times R^1$; $x^i = (x^1, x^2, ..., x^n)$, $\dot{x}^i = dx^i / dt$, $\ddot{x}^i = d^2x^i / dt^2$ (t — время); каждая функция $G^i(x^i, \dot{x}^i, t)$ имеет класс гладкости C^∞ в окрестности некоторых начальных условий $((x)_0, (\dot{x})_0, t_0)$ на Ω. В рамках подхода могут быть определены пять геометрических инвариантов системы обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка (1).

Для несингулярных преобразований координат ККЧ-ковариантная производная векторного поля $\xi = \xi^i(x)\dfrac{\partial}{\partial x^i}$ на подмножестве Ω определяется в виде [1]

$$\frac{D\xi^i}{dt} = \frac{d\xi^i}{dt} + N^i_j \xi^j,$$

где локальные коэффициенты нелинейной связности определены как $N^i_j = \dfrac{\partial G^i}{\partial y^j}$, и тогда при $y^i = \xi^i$ получается первый ККЧ-инвариант ε^i:

$$N^i_j y^j - 2G^i = -\varepsilon^i.$$

Варьирование траекторий $x^i(t)$ уравнений (1) относительно ближайших траекторий приводит к уравнениям в ковариантной форме [1, 2]:

$$\frac{D^2\xi^i}{dt^2} = P^i_j \xi^j. \tag{2}$$

Здесь ξ^i — контравариантное векторное поле, определенное на Ω; P^i_j — тензор, определяемый в виде

$$P^i_j = \frac{\partial N^i_j}{\partial x^k}\dot{x}^k - 2G^k G^i_{jk} + N^i_k N^k_j - 2Z^i_j,$$

где G^i_{jk} — локальные коэффициенты связности Бервальда, $G^i_{jk} = \dfrac{\partial^2 G^i}{\partial y^j \partial y^k}$.

Уравнение (2) называется уравнением Якоби, а тензор P_j^i — вторым ККЧ-инвариантом (тензором кривизны отклонения). В рамках рассматриваемой теории могут быть определены пять ККЧ-инвариантов исследуемой системы. Третий, четвертый и пятый инварианты системы определяются согласно [1]:

$$P_{jk}^i = \frac{1}{3}\left(\frac{\partial P_j^i}{\partial y^k} - \frac{\partial P_k^i}{\partial y^j}\right), \quad P_{jkl}^i = \frac{\partial P_{jk}^i}{\partial y^l}, \quad D_{jkl}^i = \frac{\partial G_{jk}^i}{\partial y^l}.$$

Третий инвариант P_{jk}^i интерпретируют как тензор кручения. Четвертый P_{jkl}^i и пятый D_{jkl}^i инварианты называются тензором кривизны Римана — Кристоффеля и тензором Дугласа соответственно. В общем случае они могут быть использованы для описания геометрических свойств систем дифференциальных уравнений второго порядка.

Определение [1]. *Траектории системы дифференциальных уравнений (1) устойчивы по Якоби, если и только если действительные части собственных значений тензора P_j^i всюду строго отрицательны, и неустойчивы по Якоби в противном случае.*

Далее собственные значения тензора P_j^i рассматриваются в качестве входной информации для решения обратной задачи восстановления параметров динамической системы. Сформулированная обратная задача в рамках выбранной математической модели описывается операторным уравнением [6]

$$Ax = y, \ x \in X, \ y \in Y,$$

где X, Y — гильбертовы пространства; A — компактный линейный оператор, действующий из X в Y.

Правая часть возмущенного операторного уравнения представляет приближенные входные данные y^δ, определенные из эксперимента. Предполагается, что погрешность задания входной информации δ известна и имеет место $\| y^\delta - y \| \le \delta.$ Требуется определить устойчивые приближенные решения по заданной приближенно информации y^δ. Существенно, что во многих приложениях обратные задачи являются некорректно поставленными. Далее реализуется подход, основанный на методах регуляризации [5–7]. Приближенное решение обратной задачи восстановления параметров системы предполагает поиск минимума функционала Тихонова $J_\alpha(x)$:

$$x_\alpha^\delta = \arg\min_{x \in X} J_\alpha(x).$$

Здесь x_α^δ — регуляризованное решение уравнения $Ax = y^\delta$ с параметром регуляризации α.

Динамическая система Лоренца. Рассматривается применение теории ККЧ к системе дифференциальных уравнений, связанных с механикой жидкости. Исследуется система Лоренца, описываемая системой трех нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений [10, 11]:

$$\frac{1}{\sigma}\frac{dX}{dt} = -X + Y;$$

$$\frac{dY}{dt} = -XZ + \rho X - Y;$$

$$\frac{dZ}{dt} = XY - \beta Z,$$

где координата X представляет поле скоростей; координаты Y и Z представляют поле температур; σ, ρ, β — некоторые свободные (изменяемые) параметры.

Представленные обыкновенные дифференциальные уравнения аппроксимируют систему дифференциальных уравнений в частных производных, описывающих конвекцию (с конечной амплитудой) в слое жидкости, подогреваемой снизу. С физической точки зрения параметры σ, ρ и β интерпретируются как число Прандтля, нормализованное число Рэлея и геометрический фактор (содержит информацию о геометрии конвективной ячейки) соответственно. Существенно, что система уравнений Лоренца является детерминированной, однако ее решение демонстрирует хаотическое поведение при $\rho > \sigma(\sigma + \beta + 3)/(\sigma - \beta - 1)$ и $\sigma > \beta + 1$. После ввода обозначений $X = X^1$, $\dot{X} = Y^1$, $Z = X^2$, $\dot{Z} = Y^2$, $Y = X^3$ система Лоренца может быть представлена уравнениями вида (1):

$$\frac{d^2X^i}{dt^2} + 2G^i(X^i, Y^i) = 0, \quad i = 1,\ 2.$$

В контексте анализа устойчивости по Якоби в работе [11] указаны следующие точки равновесия динамической системы Лоренца:

$$S_0(0,\ 0), \text{ если } \rho \le 1;$$

$$S_+\left[\sqrt{\beta(\rho-1)},\ \rho-1\right] \text{ и } S_-\left[-\sqrt{\beta(\rho-1)},\ \rho-1\right], \text{ если } \rho > 1.$$

Далее рассматривается точка равновесия S_+, $\rho > 1$: в этом случае компоненты тензора кривизны отклонения определяются в виде

$$P_1^1(S_+) = \frac{1}{4}(1+\sigma)^2,$$

$$P_2^1(S_+) = -\sigma\sqrt{\beta(\rho-1)},$$

$$P_1^2(S_+) = \frac{\sqrt{\beta(\rho-1)}[(-7\sigma+1)\beta-\sigma^2+1)]}{4\sigma},$$

$$P_2^2(S_+) = \beta^2 - \beta(\rho-1).$$

Теорема [11]. *Если свободные параметры* $\beta,\ \rho > 1$ *и* σ *системы Лоренца удовлетворяют одновременно условиям*

$$\beta(\beta-\rho+1)+(\sigma+1)^2/4<0 \text{ и}$$
$$\beta\left\{\beta[-7\rho\sigma+\rho+\sigma(\sigma+9)]-2\sigma(\rho-1)(\sigma+1)\right\}/4>0,$$

то точки равновесия $S_+\left[\sqrt{\beta(\rho-1)},\ \rho-1\right]$ *и* $S_-\left[-\sqrt{\beta(\rho-1)},\ \rho-1\right]$ *системы Лоренца устойчивы по Якоби; в противном случае эти точки равновесия неустойчивы по Якоби.*

Численный пример. Сформулирована обратная задача восстановления параметров динамической системы Лоренца по заданной косвенной входной информации — собственным значениям ее тензора кривизны отклонения. Система рассматривается при следующих стандартных значениях ее параметров [11–13]: $\sigma^* = 10$; $\rho^* = 28$; $\beta^* = 2,(6)$. Косвенная информация (приближенные собственные значения тензора кривизны отклонения), полученная моделированием системы при стандартных значениях параметров для точки равновесия системы $S_+\left[\sqrt{\beta(\rho-1)},\ \rho-1\right]$, представляет входные данные для решения обратной задачи: $\lambda_-^* \approx -102,6$; $\lambda_+^* \approx 69,13$ (система неустойчива по Якоби). Относительная погрешность входных данных в рассматриваемом численном примере не превышает 1 %. Переменными задачи являются относительные величины x_1, x_2, x_3, соответствующие параметрам σ, ρ, β. Критериальная функция определена в виде

$$F(x) = \sum_{i=1}^{2}\gamma_i f_i^2(x) + \alpha\|x\|_2^2,$$

где $\gamma_i, f_i(x)$ — весовой коэффициент и частный критерий, здесь соответствующие i-му собственному значению λ_i: $\lambda_1(x) = \lambda_-(x)$, $\lambda_2(x) = \lambda_+(x)$; $f_i(x) = (\lambda_i^* - \lambda_i(x))$, $i = 1,\ 2$; α — параметр регуляризации; $x \in \mathrm{R}^3$.

Численное решение регуляризованной обратной задачи получено с использованием нового гибридного алгоритма глобальной оптимизации. Предложенный алгоритм интегрирует стохастический алгоритм QOM-PCA сканирования пространства переменных [14] и детерминированную процедуру локального поиска — метод LMSI-линеаризации с построением сглаживающих аппроксимаций и итерационным уточнением [15].

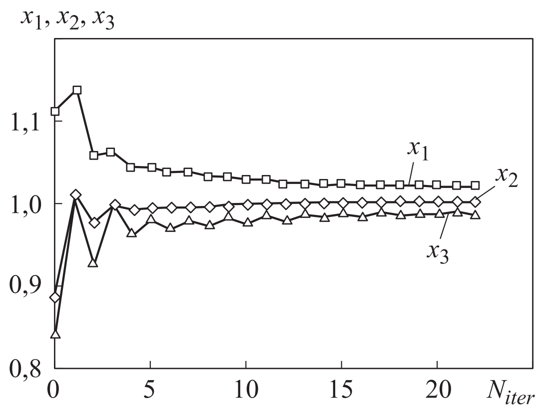

Рис. 1. Изменение значений свободных переменных x_i, $i = \overline{1, 3}$, с ростом числа итераций N_{iter}

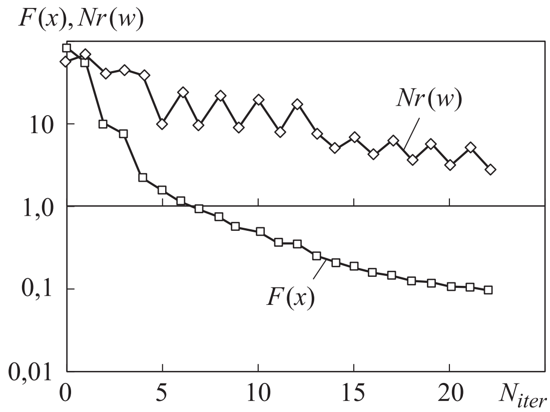

Рис. 2. Изменение значений критериальной функции $F(x)$ и нормы вектора направления поиска $Nr(w)$ с ростом числа итераций N_{iter}

Используется программное обеспечение, реализующее гибридный алгоритм глобальной оптимизации QOM-PCALMSI [16]. Изменение значений переменных x_1, x_2, x_3 с ростом числа итераций N_{iter} в заключительной фазе локального поиска показано на рис. 1; соответствующее изменение значений критериальной функции $F(x)$ и нормы $Nr(w)$ вектора направления поиска w представлено на рис. 2.

Восстановленные приближенные значения параметров системы Лоренца: $\sigma \approx 10{,}143$; $\rho \approx 28{,}001$; $\beta \approx 2{,}637$. Относительная погрешность полученного численного решения обратной задачи не превышает 1,5 %.

Заключение. В контексте теории Косамби — Картана — Черна выполнен анализ устойчивости по Якоби динамической системы Лоренца. Представлена методика восстановления параметров системы по косвенной входной информации, представленной собственными значениями ее тензора кривизны отклонения. При решении обратной задачи восстановления параметров реализован оптимизационный подход. Применен новый гибридный алгоритм глобальной оптимизации, интегрирующий стохастический алгоритм сканирования пространства переменных и детерминированный метод локального поиска. Приведены результаты численного решения задачи восстановления стандартных параметров неустойчивой по Якоби системы Лоренца. Точность приближенного решения согласована с точностью задания входной информации.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Böhmer C.G., Harko T., Sabau S.V. Jacobi stability analysis of dynamical systems – applications in gravitation and cosmology. *Advances in Theoretical and Mathematical Physics*, 2012, vol. 16, no. 4, pp. 1145–1196.

[2] Harko T., Pantaragphong P., Sabau S.V. Kosambi–Cartan–Chern (KCC) theory for higher order dynamical systems. *International Journal of Geometric Methods in Modern Physics*, 2016, vol. 13, no. 2, art. ID 1650014. DOI: 10.1142/S0219887816500146.

[3] Abolghasem H. Liapunov stability versus Jacobi stability. *Journal of Dynamical Systems and Geometric Theories*, 2012, vol. 10, no. 1, pp. 13–32.

[4] Ye K., Hu S. Inverse eigenvalue problem for tensors. *Communications in Mathematical Sciences*, 2017, vol. 15, no. 6, pp. 1627–1649.

[5] Benning M., Burger M. Modern regularization methods for inverse problems. *Acta Numerica*, 2018, vol. 27, pp. 1–111.

[6] Wang Y., Yagola A.G., Yang C. *Optimization and regularization for computational inverse problems and applications*. Berlin; Heidelberg, Springer-Verlag, 2010, XVIII+351 pp.

[7] Hu S., Ye K. Multiplicities of eigenvalues of tensors. *Communications in Mathematical Sciences*, 2016, vol. 14, no. 4, pp. 1049–1071.

[8] Квасов Д.Е., Сергеев Я.Д. Методы липшицевой глобальной оптимизации в задачах управления. *Автоматика и телемеханика*, 2013, т. 74, № 9, с. 1435–1448.

[9] Xu Y.T., Zhang Y., Wang S.-G. A modified tunneling function method for non-smooth global optimization and its applications in artificial neural network. *Applied Mathematical Modelling*, 2015, vol. 39, issue 21, pp. 6438–6450. https://doi.org/10.1016/j.apm.2015.01.059

[10] Lorenz E.I. Deterministic nonperiodic flow. *Journal of the Atmospheric Sciences*, 1963, vol. 20, no. 2, pp. 130–141.
[11] Harko T., Ho C.Y., Leung C.S., Yip S. Jacobi stability analysis of the Lorenz system. *International Journal of Geometric Methods in Modern Physics*, 2015, vol. 12, no. 7, art. ID 1550081. https://doi.org/10.48550/arXiv.1504.02880
[12] Sulimov V.D., Shkapov P.M., Sulimov A.V. Jacobi stability and updating parameters of dynamical systems using hybrid algorithms. *IOP Conference Series: Material Science and Engineering*, 2018, vol. 468, art. ID 012040 DOI: 10.1088/1757-899X/468/1/012040
[13] Chen Y., Yin Z. The Jacobi stability of a Lorenz-type multistable hyperchaotic system with a curve of equilibria. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2019, vol. 29, no. 5, art. ID 1950062. DOI: 10.1142/S0218127419500627
[14] Torres R.H., Campos Velho H.F., da Luz E.F.P. Enhancement of the Multi–Particle Collision Algorithm by mechanisms derived from the opposition-based optimization. *Selecciones Matemáticas*, 2019, vol. 06 (2), pp. 156–177.
[15] Шкапов П.М., Сулимов А.В., Сулимов В.Д. Вычислительная диагностика неустойчивых по Якоби динамических систем с использованием гибридных алгоритмов глобальной оптимизации. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*, 2021, № 4 (97), с. 40–56.
[16] Сулимов В.Д., Сулимов А.В., Шкапов П.М. *Программа для ЭВМ, реализующая гибридный алгоритм глобальной недифференцируемой оптимизации QOM-PCALMSI.* Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2022664841. Заявка № 2022663517. Дата государственной регистрации в Реестре программ для ЭВМ 05 августа 2022.

Статья поступила в редакцию 19.06.2024

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:
Шкапов П.М., Сулимов В.Д., Сулимов А.В. Анализ устойчивости по Якоби динамической системы Лоренца. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2024, вып. 7. EDN TDERNS

Шкапов Павел Михайлович — д-р техн. наук, заведующий кафедрой «Теоретическая механика» имени профессора Н.Е. Жуковского, МГТУ им. Н.Э. Баумана. e-mail: spm@bmstu.ru

Сулимов Валерий Дмитриевич — старший преподаватель кафедры «Теоретическая механика» имени профессора Н.Е. Жуковского, МГТУ им. Н.Э. Баумана. e-mail: fn3svd24@mail.ru

Сулимов Андрей Валерьевич — старший преподаватель, кафедра физики и геофизики, Филиал МГУ имени М.В. Ломоносова в г. Севастополе.
e-mail: avsu7@mail.ru

Jacobi stability analysis in regard to the Lorenz dynamical system

© P.M. Shkapov[1], V.D. Sulimov[1], A.V. Sulimov[1,2]

[1] Bauman Moscow State Technical University,
Moscow, 105005, Russian Federation
[2] Sevastopol Branch, Lomonosov Moscow State University,
Sevastopol, 299000, Russian Federation

The paper considers problems of the Jacobi stability analysis and recovery of the Lorenz dynamic system free parameters according to the indirect approximately specified information. In the context of the Kosambi — Cartan — Chern theory, it presents geometric description of the system evolution in time and defines the five geometric invariants. Eigenvalues of the second invariant (deviation curvature tensor) are assessing the system Jacobi stability. Such a study is of interest in applications, where it is required to establish domains with both the Liapunov and the Jacobi stabilities. The paper formulates the inverse problem on recovering the system parameters according to the approximately specified eigenvalues of the second invariant. The regularized inverse problem is solved using the optimization approach. The scalar criterion functions are assumed to be continuous, multidimensional, multi-extremal, locally Lipschitzian, and not necessarily differentiable anywhere. A new hybrid algorithm is introduced in searching for the global solutions. It integrates the stochastic algorithm scanning the variables space and the local minimization deterministic method. In the local search phase, the two-parameter smoothing approximations of the criterial functions are introduced. Numerical example of the Lorenz system parameters recovery is provided.

Keywords: *Jacobi stability, Kosambi–Cartan–Chern theory, geometric invariant, Lorenz system, parameter recovery, global optimization, hybrid algorithm*

REFERENCES

[1] Böhmer C.G., Harko T., Sabau S.V. Jacobi stability analysis of dynamical systems – applications in gravitation and cosmology. *Advances in Theoretical and Mathematical Physics,* 2012, vol. 16, no. 4, pp. 1145–1196.
[2] Harko T., Pantaragphong P., Sabau S.V. Kosambi–Cartan–Chern (KCC) theory for higher order dynamical systems. *International Journal of Geometric Methods in Modern Physics*, 2016, vol. 13, no. 2, art. ID 1656014. DOI: 10.1142/S0219887816500146
[3] Abolghasem H. Liapunov stability versus Jacobi stability. *Journal of Dynamical Systems and Geometric Theories*, 2012, vol. 10, no. 1, pp. 13–32.
[4] Ye K., Hu S. Inverse eigenvalue problem for tensors. *Communications in Mathematical Sciences*, 2017, vol. 15, no. 6, pp. 1627–1649.
[5] Benning M., Burger M. Modern regularization methods for inverse problems. *Acta Numerica*, 2018, vol. 27, pp. 1–111.
[6] Wang Y., Yagola A.G., Yang C. *Optimization and regularization for computational inverse problems and applications*. Berlin, Heidelberg, Springer Verlag, 2010, XVIII+351 p.
[7] Hu S., Ye K. Multiplicities of eigenvalues of tensors. *Communications in Mathematical Sciences*, 2016, vol. 14, no. 4, pp. 1049–1071.
[8] Kvasov D.E., Sergeev Y.D. Metody lipshitsevoy globalnoy optimizatsii v zadachakh upravleniya [Lipschitz global optimization methods in control problems]. *Avtomatika i Telemekhanika*, 2013, vol. 74, no. 9, pp. 1435–1448.

[9] Xu Y.T., Zhang Y., Wang S.-G. A modified tunneling function method for non-smooth global optimization and its applications in artificial neural network. *Applied Mathematical Modelling*, 2015, vol. 39, issue 21, pp. 6438–6450. https://doi.org/10.1016/j.apm.2015.01.059

[10] Lorenz E.I. Deterministic nonperiodic flow. *Journal of the Atmospheric Sciences*, 1963, vol. 20, no 2, pp. 130–141.

[11] Harko T., Ho C.Y., Leung C.S., Yip S. Jacobi stability analysis of the Lorenz system. *International Journal of Geometric Methods in Modern Physics*, 2015, vol. 12, no. 7, art. ID 1550081. https://doi.org/10.48550/arXiv.1504.02880

[12] Sulimov V.D., Shkapov P.M., Sulimov A.V. Jacobi stability and updating parameters of dynamical systems using hybrid algorithms. *IOP Conference Series: Material Science and Engineering*, 2018, vol. 468, p. 012040. DOI: 10.1088/1757-899X/468/1/012040

[13] Chen Y., Yin Z. The Jacobi stability of a Lorenz-type multistable hyperchaotic system with a curve of equilibria. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2019, vol. 29, no. 5, p. 1950062. DOI: 10.1142/S0218127419500627

[14] Torres R.H., Campos Velho H.F., da Luz E.F.P. Enhancement of the Multi-Particle Collision Algorithm by mechanisms derived from the opposition-based optimization. *Selecciones Matemáticas*, 2019, vol. 06 (2), pp. 156–177.

[15] Shkapov P.M., Sulimov A.V., Sulimov V.D. Vychislitelnaya diagnostika neustoychivykh po Yakobi dinamicheskikh sistem s ispolzovaniem gibridnykh algoritmov globalnoy optimizatsii [Computational diagnostics of Jacobi unstable dynamical systems with the use of hybrid algorithms of global optimization]. *Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Ser. Estestvennye nauki — Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Series Natural Sciences*, 2021, no. 4 (97), pp. 40–56.

[16] Sulimov V.D., Sulimov A.V., Shkapov P.M. *Programma dlya EVM, realizuyushchaya gibridnyi algoritm globalnoy nedifferentsiruemoy optimizatsii QOM-PCALMSI* [Computer program implementing the hybrid algorithm of global non-differentiable optimization QOM-PCALMSI]. Svidetelstvo o gosudarstvennoy registratsii programmy dlya EVM no. 2022664841. Zayavka no. 2022663517. Data gosudarstvennoy registratsii v Reestre program dlya EVM 05 avgusta 2022 [Certificate of state registration of computer program no. 2022664841. Application no. 2022663517. Date of state registration in the Register of computer programs: August 5, 2022].

Shkapov P.M., Dr. Sc. (Eng), Head of the Department of Theoretical Mechanics named after prof. N.E. Zhukovskiy, Bauman Moscow State Technical University.
e-mail: spm@bmstu.ru

Sulimov V.D., Senior Lecturer, Department of Theoretical Mechanics named after prof. N.E. Zhukovskiy, Bauman Moscow State Technical University.
e-mail: fn3svd24@mail.ru

Sulimov A.V., Senior Lecturer, Department of Physics and Geophysics, Sevastopol Branch, Lomonosov Moscow State University, Sevastopol. e-mail: avsu7@mail.ru