

## Определение толщин гладких металлических панелей при ограничениях по устойчивости и статической прочности в случае закритического поведения с учетом мембранных и изгибных напряжений

© О.В. Митрофанов, Е.Ю. Торопылина

Московский авиационный институт (НИУ), Москва, 125993, Российская Федерация

Представлены результаты исследования верхних металлических несущих подкрепленных панелей кессона крыла самолета средней грузоподъемности, которые нагружены сжимающими и касательными усилиями. Принято условие допустимости потери устойчивости обшивок при нагрузках, близких к эксплуатационному уровню. В данном случае обшивки классифицированы как пластины средней толщины, при анализе геометрически нелинейного поведения которых следует учитывать мембранные и изгибные напряжения. Предложены прикладные методики (алгоритмы) определения минимальных толщин обшивок, нагруженных сжимающими, касательными и комбинированными усилиями, при допустимости начального этапа геометрически нелинейного поведения. Указанные методики (алгоритмы) основаны на использовании аналитических решений геометрически нелинейных задач, полученных методом Бубнова — Галеркина. В работе сформулированы пункты общей методики (алгоритма) определения минимальных толщин металлических панелей с учетом мембранных и изгибных напряжений, возникающих при закритическом состоянии. Представлены особенности прикладных методик (алгоритмов) проектирования панелей для двух уровней нагружения: на первом — обеспечивается устойчивость, а на втором — прочность при закритическом состоянии.

**Ключевые слова:** закритическое состояние, устойчивость, металлические прямоугольные панели, сжатие, сдвиг

**Введение.** Обшивками подкрепленных панелей кессона крыла самолета средней грузоподъемности могут служить верхние металлические панели, представленные на рисунке. Будем считать, что они имеют толщину  $\delta$  и геометрические параметры  $a$  и  $b$  ( $a \gg b$ ). Кроме того, пусть допускается потеря устойчивости указанных панелей при

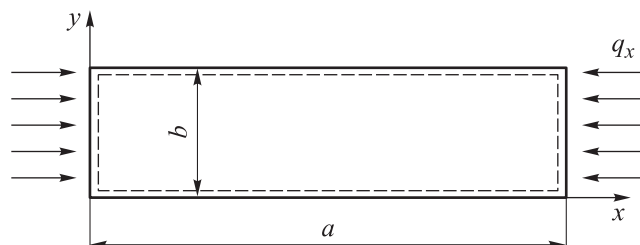


Схема действия продольных сжимающих усилий на прямоугольную панель

нагрузках, близких к эксплуатационному уровню. Поскольку в данном случае панели можно считать пластинами средней толщины [1], для них при анализе закритического состояния следует учитывать мембранные и изгибные напряжения.

Цель данной работы — разработка общей методики (алгоритма) и представление прикладных аналитических методик для определения минимальных толщин металлических панелей с учетом мембранных и изгибных напряжений, возникающих при закритическом состоянии.

Следовательно, необходимо решить три задачи:

во-первых, разработать прикладные методики (алгоритмы) определения минимальных толщин панелей при закритическом состоянии по условиям обеспечения прочности с учетом возникающих мембранных и изгибных напряжений;

во-вторых, формализовать общую методику (алгоритм) определения минимальных толщин для панелей средней толщины при геометрически нелинейном состоянии;

в-третьих, проанализировать особенности методик вычисления толщин с учетом двух уровней нагружения и вычисления двух переменных — толщины и ширины панели с учетом указанных выше мембранных и изгибных напряжений.

В течение уже нескольких десятков лет остается актуальным решение задачи определения оптимальных толщин металлических несущих панелей кессона крыла с различными прочностными ограничениями. К указанным ограничениям формально относятся ограничения по статической прочности, устойчивости и прочности при закритическом состоянии. Следует отметить, что, с одной стороны, существует большое количество аналитических методик поверочного расчета металлических панелей с учетом указанных ограничений, с другой — крайне мало работ, посвященных аналитическим методикам проектировочных расчетов с учетом достаточно сложных ограничений, касающихся закритического поведения. Особенность данной работы заключается в разработке методики проектирования металлических панелей с использованием аналитических решений методом Бубнова — Галеркина и с учетом аналитических соотношений для мембранных и изгибных напряжений. Таким образом, разработка методик (алгоритмов) проектирования панелей средней толщины при закритическом состоянии с учетом мембранных и изгибных напряжений является актуальной.

Расчетам и проектированию несущих панелей с учетом ограничений по устойчивости и по прочности при закритическом состоянии посвящен ряд публикаций. Многочисленные решения прикладных задач поверочного расчета с учетом закритического поведения металлических панелей представлены в монографии А.С. Вольмира [1].

Отметим монографии [2–4] и статьи [5–7], в которых приведены решения задач проектирования подкрепленных панелей при ограничениях по статической прочности и устойчивости. Причем Г.Н. Замула в [7] предложил аналитическую методику редуцирования обшивки подкрепленных авиационных конструкций, основанную на замене реальной выпучившейся клетки обшивки эквивалентной по жесткости невыпучившейся пластиной из нелинейно упругого материала общего вида. Кроме того, в [7] были представлены способы получения и формулы для редуцированных коэффициентов при комбинированном нагружении обшивки двусторонним сжатием — растяжением и сдвигом.

Особенности методологии применения современных расчетных методов к отработке статической прочности авиационных конструкций указаны в работах [8, 9]. Следует также обратить внимание на статью В.В. Чедрика [10], посвященную использованию методов геометрического программирования для получения аналитических решений при оптимизации подкрепленных панелей. Кроме того, интерес представляет работа [11], где приведено решение задачи оптимизации с учетом особенностей конструктивно-технологических схем сварных несущих панелей фюзеляжа. Применению метода параметрической оптимизации в задачах проектирования кессона из композитных материалов посвящена статья [12]. Отметим, что использованию физической нелинейности при проектировании различных авиационных конструкций посвящены работы С.В. Селюгина и В.В. Чехова [13, 14].

Методология проектирования композитных и металлических тонких панелей по закритическому состоянию с учетом аналитических решений геометрически нелинейных задач предложена в [15, 16]. В этом случае использованы условия равенства мембранных напряжений, возникающих при потере устойчивости, предельным по прочности значениям в потенциально критических точках (ПКТ), в которых эти напряжения могут достигать максимальных по модулю значений.

Отметим также работу [17], в которой задача оптимального проектирования тонких гладких металлических панелей в указанной постановке учитывает два уровня нагружения. На первом уровне необходимо обеспечить устойчивость за счет использования равенства для критических потоков  $q_x^{уст}$ , записи выражения  $q_x^{уст}$  относительно квадрата ширины панели из условия минимального запаса по устойчивости, равного  $\eta^{уст} = 1$ . На втором уровне при действии расчетных потоков  $q_x^p$  необходимо удовлетворить выбранный критерий по статической прочности с минимальным запасом  $\eta_{прочн}^p = 1$  для панели при закритическом состоянии после потери устойчивости в потенциально критических точках.

При расчете тонких панелей учитываются только мембранные напряжения, так как толщина панели мала по сравнению с другими ее размерами, и панель рассматривается как двумерная структура. Для шарнирно опертой панели удастся получить компактные выражения для определения ее толщины и ширины [17].

Рассмотрим приведенные в табл. 1 соотношения для сжатых панелей, поясняющие место методологии проектирования по закритическому состоянию в общей теории оптимального проектирования тонкостенных металлических конструкций [16]. Представленные соотношения иллюстрируют возможность определения толщин металлических панелей при ограничениях по статической прочности, устойчивости, а также прочности при закритическом состоянии с учетом мембранных и изгибных напряжений.

Таблица 1

**Расчетные соотношения для определения толщины металлической шарнирно опертой прямоугольной панели при одноосном сжатии [16]**

Условия для проектирования панелей	Соотношения для определения напряжений	Соотношения для определения минимальной толщины панели
Статическая прочность	$\sigma = \frac{P}{\delta b}$	$\delta = \frac{P}{\bar{\sigma} b}$
Устойчивость	$\sigma_{кр} = 3,6E \left( \frac{\delta}{b} \right)^2$	$\delta^2 = b^2 \frac{\bar{\sigma}_{уст}}{3,6}$
Закритическое состояние: мембранные напряжения	$\sigma_x = -\frac{f^2 E \pi^2}{8 b^2} - p_x$	$\delta^3 \frac{\pi^2 E}{3b^4 (1-\mu^2)} + f^2 \delta \frac{\pi^2 E}{8b^4} = q_x^p$
мембранные и изгибные напряжения	$\sigma_{x\Sigma} = -f^2 \Omega_x^{мемб}(x, y) - \delta f \Omega_x^{изгиб}(x, y) - p_x$	$\delta^3 \frac{\pi^2 E}{3b^4 (1-\mu^2)} + f^2 \delta \frac{\pi^2 E}{8b^4} = q_x^p$
<p>Обозначения: <math>\bar{\sigma}</math> — допускаемые (предельные) по условиям прочности нормальные напряжения; <math>\bar{\sigma}_{уст}</math> — допускаемые по условиям устойчивости нормальные напряжения, которые определяет разработчик воздушного судна на начальных этапах проектирования; <math>q_x^p = p_x \delta</math> — действующий на панель сжимающий поток при расчетном уровне нагружения.</p>		

Приведенные в табл. 1 соотношения для определения минимальных толщин панелей при закритическом состоянии соответствуют указанной выше методологии проектирования тонких панелей по

закритическому состоянию [15, 16] и соотношениям для панелей средней толщины, представленным далее.

**Исходные соотношения.** Рассмотрим исходные соотношения геометрически нелинейных задач по определению напряженно-деформированного состояния металлических панелей при закритическом поведении. Нелинейное уравнение совместности деформаций представим в следующем виде:

$$L_1(F) - L_2(W) = 0, \quad (1)$$

где

$$L_1(F) = \frac{1}{E} \left( \frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} \right), \quad L_2(W) = \left( \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \frac{\partial^2 W}{\partial y^2}.$$

Уравнение равновесия имеет вид

$$L_3(F, W) - L_4(W) = 0, \quad (2)$$

где

$$L_3(F, W) = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y},$$

$$L_4(W) = \frac{D}{\delta} \left[ \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 W}{\partial y^4} \right].$$

Здесь  $F$  — функция напряжений Эри;  $W$  — прогиб;  $D$  — изгибная жесткость металлической панели;  $E$  — модуль упругости изотропно-го материала панели.

Для получения аналитических решений геометрически нелинейных задач будем применять метод Бубнова — Галеркина, для реализации которого может быть использовано выражение

$$\int_0^a \int_0^b [L_3(F, W) - L_4(W)] W_k dx dy = 0, \quad (3)$$

где  $W_k$  — функция прогиба.

Из определения функции напряжений Эри можно найти мембранные напряжения для теряющей устойчивость панели:

$$\sigma_x^{\text{мемб}} = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, \quad \sigma_y^{\text{мемб}} = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy}^{\text{мемб}} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}. \quad (4)$$

Изгибные напряжения вычисляются по соотношениям [1]:

$$\sigma_x^{\text{изгиб}} = -z \left[ \bar{E} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \bar{E} \mu \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right], \quad \sigma_y^{\text{изгиб}} = -z \left[ \bar{E} \mu \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \bar{E} \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right], \quad (5)$$

$$\tau_{xy}^{\text{изгиб}} = -2zG \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y},$$

где  $z = \pm \delta/2$ ;  $G$  — модуль сдвига.

Далее рассмотрим некоторые прикладные задачи определения минимальных толщин металлических панелей, а затем сформулируем общую методику (алгоритм) проектирования металлических панелей с учетом мембранных и изгибных напряжений.

**Определение параметров панелей при продольном сжатии. Проектирование панелей при расчетном уровне нагружения.** Для случая шарнирного опирания представим прогиб металлической прямоугольной панели в виде

$$W = f \sin\left(\frac{\pi mx}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right), \quad (6)$$

где  $f$  — амплитуда прогиба;  $m$  — число полуволин в продольном направлении.

Подставив выражение для прогиба (6) в геометрически нелинейное уравнение совместности деформаций (1), можно получить функцию напряжений [1]:

$$F = \frac{E a^2 f^2}{32b^2 m^2} \cos\left(\frac{2\pi mx}{a}\right) + \frac{E b^2 f^2 m^2}{32a^2} \cos\left(\frac{2\pi y}{b}\right) + \frac{p_x y^2}{2}. \quad (7)$$

Мембранные продольные напряжения потерявшей устойчивость панели определяются по формуле

$$\sigma_x^{\text{мемб}} = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = -\frac{E f^2 m^2 \pi^2}{8a^2} \cos\left(\frac{2\pi y}{b}\right) - p_x = -f^2 \Omega_x^{\text{мемб}}(x, y) - p_x. \quad (8)$$

Исходя из равенства (5), можно записать выражение для изгибных напряжений

$$\sigma_x^{\text{изгиб}} = -\delta f \Omega_x^{\text{изгиб}}(x, y), \quad (9)$$

где

$$\Omega_x^{\text{изгиб}}(x, y) = \frac{1}{2} \left[ \bar{E} \left(\frac{\pi m}{a}\right)^2 \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} + \bar{E} \mu_{xy} \left(\frac{\pi}{b}\right)^2 \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} \right],$$

$$\bar{E} = \frac{E}{(1 - \mu^2)}.$$

Тогда суммарные продольные нормальные напряжения можно определить по формуле

$$\sigma_{x\Sigma} = -f^2 \Omega_x^{\text{мемб}}(x, y) - \delta f \Omega_x^{\text{изгиб}}(x, y) - p_x. \quad (10)$$

Следует отметить, что в общем случае ПКТ функций  $\Omega_{\text{мемб}}(x, y)$  и  $\Omega_{\text{изгиб}}(x, y)$  не совпадают.

Аналитическое решение геометрически нелинейной задачи методом Бубнова — Галеркина сводится к решению выражения

$$\delta^2 \bar{D}_{mn} + f^2 E_{mn} = \left(\frac{m}{a}\right)^2 p_x, \quad (11)$$

где с учетом равенства  $m = a/b$  для чисел полувольт в продольном направлении шарнирно опертой панели и равенств

$$E_{mn} = E \left( \frac{m^4}{a^4} + \frac{1}{b^4} \right) \frac{\pi^2}{16} = \frac{\pi^2 E}{8b^4},$$

$$\bar{D}_{mn} = \pi^2 \frac{E}{12(1-\mu^2)} \left[ \left( \frac{m}{a} \right)^2 + \left( \frac{1}{b} \right)^2 \right]^2 = \frac{\pi^2 E}{3b^4(1-\mu^2)},$$

в итоге получается уравнение, связывающее толщину, амплитуду прогиба и действующий сжимающий поток:

$$\delta^3 \frac{\pi^2 E}{3b^4(1-\mu^2)} + f^2 \delta \frac{\pi^2 E}{8b^4} = q_x. \quad (12)$$

Для определения минимальных толщин воспользуемся равенством возникающих при потере устойчивости суммарных продольных напряжений предельным по прочности значениям

$$\sigma_{x\Sigma} = \bar{\sigma}_x \quad (13)$$

в ПКТ с координатами  $(x_{i\Sigma}, y_{i\Sigma})$ , в которых напряжения могут достигать максимальных по модулю значений.

Следует отметить, что в данном случае рассматриваемые точки с координатами  $(x_{i\Sigma}, y_{i\Sigma})$  не совпадают с ПКТ отдельных функций для мембранных  $\Omega_x^{\text{мемб}}(x, y)$  и изгибных  $\Omega_x^{\text{изгиб}}(x, y)$  напряжений, и поэтому требуется численное решение более громоздких соотношений. В этом случае приводим равенства (10)–(13) к квадратному уравнению относительно амплитуды прогиба и получаем решение в виде

$$f = \frac{-\delta \Omega_x^{\text{изгиб}}(x, y) + \sqrt{\delta^2 \left( \Omega_x^{\text{изгиб}} \right)^2 (x, y) - 4 \Omega_x^{\text{мемб}}(x, y) \left( \frac{q_x}{\delta} - \bar{\sigma}_x \right)}}{2 \Omega_x^{\text{мемб}}(x, y)}, \quad (14)$$

а затем подставим его в аналитическое решение геометрически нелинейной задачи (11). В итоге получим уравнение относительно искомой толщины:

$$\delta^3 \frac{\pi^2 E}{6b^2(1-\mu^2)} + \delta \left[ \frac{-\delta \Omega_x^{\text{изгиб}}(x, y) + \sqrt{\delta^2 (\Omega_x^{\text{изгиб}})^2(x, y) - 4\Omega_x^{\text{мемб}}(x, y) \left( \frac{q_x}{\delta} - \bar{\sigma}_x \right)}}{2\Omega_x^{\text{мемб}}(x, y)} \right]^2 \frac{\pi^2 E}{8b^2} = q_x. \quad (15)$$

Таким образом, задача оптимального проектирования в данном наиболее простом случае шарнирно опертой панели сводится к решению нелинейного уравнения относительно толщины панели с учетом влияния параметров  $x$  и  $y$ . Алгоритм определения минимальной толщины панели в данном случае соответствует численному решению уравнения (15) относительно величины  $\delta$  в точках с координатами  $(x_i, y_i)$ . Следует отметить наличие конструктивных ограничений для толщины и геометрических параметров панели для координат  $i$ -й точки:  $x_i \in [0, a]$ ,  $y_i \in [0, b]$ ,  $\delta \in [0, \delta_{\text{конст}}]$ . При получении множества значений толщины в точках  $(x_i, y_i)$  надо выбрать максимальное значение толщины. Также здесь и далее при выборе величины напряжений  $\bar{\sigma}$  для металлических конструкций целесообразно использовать условие  $\bar{\sigma} = \sigma_T$ , где  $\sigma_T$  — предел текучести материала панели.

**Проектирование при сжатии с учетом эквивалентных напряжений.** Рассмотрим вариант методики проектирования металлических панелей при действии сжимающих потоков в случае использования эквивалентных напряжений:

$$\sigma_{\text{эkv}} = \sqrt{\sigma_x^2 - \sigma_x \sigma_y + \sigma_y^2 + 3\tau_{xy}^2}, \quad (16)$$

а также условия достижения предельных напряжений  $\sigma_{\text{эkv}} = \bar{\sigma}$ .

Определим мембранные напряжения, возникающие при потере устойчивости, с учетом критических параметров волнообразования, для чего воспользуемся равенствами (4). Тогда для шарнирно опертой панели получим

$$\sigma_y^{\text{мемб}} = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = -\frac{E f^2 \pi^2}{8b^2} \cos\left(\frac{2\pi x m}{a}\right) = -f^2 \Omega_y^{\text{мемб}}(x, y); \quad (17)$$



$$\tau_{xy}^{\text{мемб}} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = 0. \quad (18)$$

Для изгибных напряжений в дополнение к равенству (9) имеем

$$\sigma_y^{\text{изгиб}} = -\delta f \Omega_y^{\text{изгиб}}(x, y); \quad (19)$$

$$\tau_{xy}^{\text{изгиб}} = -\delta f \Omega_{xy}^{\text{изгиб}}(x, y), \quad (20)$$

где

$$\Omega_y^{\text{изгиб}}(x, y) = \frac{1}{2} \left[ \bar{E} \left( \frac{\pi}{b} \right)^2 \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} + \bar{E} \mu_{xy} \left( \frac{\pi m}{a} \right)^2 \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} \right],$$

$$\Omega_{xy}^{\text{изгиб}}(x, y) = \frac{1}{2} \left[ G \frac{\pi^2}{ab} \cos \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{\pi y}{b} \right].$$

Представим выражения для суммарных напряжений в общем виде:

$$\sigma_x = \sigma_x^{\text{мемб}} + \sigma_x^{\text{изгиб}} = -f^2 \Omega_x^{\text{мемб}}(x, y) - \delta f \Omega_x^{\text{изгиб}}(x, y),$$

$$\sigma_y = \sigma_y^{\text{мемб}} + \sigma_y^{\text{изгиб}} = -f^2 \Omega_y^{\text{мемб}}(x, y) - \delta f \Omega_y^{\text{изгиб}}(x, y), \quad (21)$$

$$\tau_{xy} = \tau_{xy}^{\text{мемб}} + \tau_{xy}^{\text{изгиб}} = -f^2 \Omega_{xy}^{\text{мемб}}(x, y) - \delta f \Omega_{xy}^{\text{изгиб}}(x, y),$$

которые надо подставить в (16), откуда можно получить равенство относительно амплитуды прогиба

$$f^4 \left\{ \left( \Omega_x^{\text{мемб}} \right)^2 - \Omega_x^{\text{мемб}} \Omega_y^{\text{мемб}} + \left( \Omega_y^{\text{мемб}} \right)^2 \right\} +$$

$$+ \delta f^3 \left\{ 2 \Omega_x^{\text{мемб}} \Omega_x^{\text{изгиб}} - \Omega_x^{\text{мемб}} \Omega_y^{\text{изгиб}} - \Omega_y^{\text{мемб}} \Omega_x^{\text{изгиб}} + 2 \Omega_y^{\text{мемб}} \Omega_y^{\text{изгиб}} \right\} +$$

$$+ \delta^2 f^2 \left\{ \left( \Omega_x^{\text{изгиб}} \right)^2 - \Omega_x^{\text{изгиб}} \Omega_y^{\text{изгиб}} + \left( \Omega_y^{\text{изгиб}} \right)^2 + 3 \left( \Omega_{xy}^{\text{изгиб}} \right)^2 \right\} + \quad (22)$$

$$+ 2 f^2 \Omega_x^{\text{мемб}} \frac{q_x}{\delta} + 2 f \delta \Omega_x^{\text{изгиб}} \frac{q_x}{\delta} + \frac{q_x^2}{\delta^2} = \sigma_{\text{экв}}^2.$$

Затем из общего уравнения (12) выразим амплитуду прогиба:

$$f^2 = \left( q_x - \delta^3 \frac{\pi^2 E}{6b^2(1-\mu^2)} \right) / \left( \delta \frac{\pi^2 E}{8b^2} \right) \quad (23)$$

и подставим в выражение (22).

В результате получим одно громоздкое уравнение относительно толщины. В этом случае численный алгоритм определения толщины

панели сводится к решению нелинейного уравнения относительно толщины панели с учетом параметрических исследований по координатам  $x$  и  $y$ . Таким образом, приравнивая эквивалентные напряжения к предельным по условиям прочности напряжениям  $\bar{\sigma}$ , можно получить оптимальную толщину панели.

Изложенный выше вариант методики с использованием эквивалентных напряжений является более общим, чем методика, представленная для проектирования панелей при расчетном уровне нагружения.

**Особенности проектирования панелей с учетом двух уровней сжимающих усилий.** На первом уровне при действии потока  $q_x^{\text{уст}}$  необходимо обеспечить устойчивость, а на втором уровне при действии потока  $q_x^{\text{р}}$  — прочность при расчетном (разрушающем) уровне нагружения. Воспользовавшись предложенной в работе [17] идеологией, будем учитывать два уровня нагружения и, соответственно, две переменные величины — толщину и ширину прямоугольной панели. Для примера рассмотрим металлическую панель с учетом условий шарнирного опирания при продольном сжатии и представим алгоритм проектирования. Из известного выражения для критических напряжений с учетом первого уровня нагружения, на котором необходимо обеспечить устойчивость, выведем формулу

$$b^2 = \frac{3,6E}{q_x^{\text{уст}}} \delta^3. \quad (24)$$

Далее алгоритм определения толщины должен быть следующий: нужно использовать соотношение (15) или равенства (22), (23) при условии действия расчетных потоков  $q_x = q_x^{\text{р}}$  и записать систему уравнений относительно двух неизвестных. В данном случае при учете мембранных и изгибных напряжений можно лишь численно определить минимальную толщину панели, хотя для тонких панелей при использовании только мембранных напряжений для шарнирно опертой панели в [17] была приведена компактная формула для определения минимальной толщины:

$$\delta = \frac{2q_x^{\text{р}} - q_x^{\text{уст}}}{\bar{\sigma}_x}.$$

**Общая методика (алгоритм) проектирования металлических панелей средней толщины по закритическому состоянию при комбинированном нагружении.** Представим формальный алгоритм определения толщины металлических панелей по закритическому состоянию, в котором использован ранее приведенный материал, касающийся обеспечения прочности по эквивалентным напряжениям:

1) задание формы прогиба при возможной потере устойчивости панели известной функцией с точностью до неизвестной величины амплитуды прогиба с учетом рассматриваемых граничных условий;

2) вычисление параметров волнообразования металлической панели при потере устойчивости, которые определяются при заданных длине и ширине панели;

3) аналитическое решение геометрически нелинейной задачи методом Бубнова — Галеркина и запись замкнутого аналитического соотношения типа (23), связывающие толщину, амплитуду прогиба и действующие потоки ( $q_x = p_x \delta$ ,  $q_y = p_y \delta$ ,  $q_{xy} = p_{xy} \delta$ );

4) запись аналитического выражения по п. 3 относительно амплитуды прогиба;

5) запись аналитических выражений для мембранных напряжений из определения функций напряжений

$$\sigma_x^{\text{мемб}} = -f^2 \Omega_x^{\text{мемб}}(x, y) - p_x,$$

$$\sigma_y^{\text{мемб}} = -f^2 \Omega_y^{\text{мемб}}(x, y) - p_y,$$

$$\tau_{xy}^{\text{мемб}} = -f^2 \Omega_{xy}^{\text{мемб}}(x, y) - p_{xy};$$

6) запись аналитических выражений для изгибных напряжений

$$\sigma_x^{\text{изгиб}} = -f \delta \Phi_x^{\text{изгиб}}(x, y),$$

$$\sigma_y^{\text{изгиб}} = -\delta f \Omega_y^{\text{изгиб}}(x, y),$$

$$\tau_{xy}^{\text{изгиб}} = -\delta f \Omega_{xy}^{\text{изгиб}}(x, y);$$

7) запись аналитических соотношений суммарных напряжений:

$$\sigma_{x\Sigma} = \sigma_x^{\text{мемб}} + \sigma_x^{\text{изгиб}}, \quad \sigma_y = \sigma_y^{\text{мемб}} + \sigma_y^{\text{изгиб}}, \quad \tau_{xy} = \tau_{xy}^{\text{мемб}} + \tau_{xy}^{\text{изгиб}};$$

8) запись выражения для эквивалентных напряжений и использование равенства эквивалентных напряжений предельным по прочности значениям:

$$\sigma_{\text{эkv}} = \sqrt{\sigma_{x\Sigma}^2 - \sigma_{x\Sigma} \sigma_{y\Sigma} + \sigma_{y\Sigma}^2 + 3\tau_{xy\Sigma}^2} = \bar{\sigma};$$

9) последовательная подстановка выражений для суммарных напряжений в п. 7 в равенство п. 8 для эквивалентных напряжений и подстановка амплитуды прогиба п. 4; запись итогового нелинейного уравнения 4-го порядка относительно толщины панели;

10) проведение численного решения нелинейного уравнения по п. 9 и определение минимальной толщины металлической панели при варьировании двумя параметрами ( $x$  и  $y$ ). При численном решении должны

учитываться конструктивные ограничения:  $x \in [0, a]$ ,  $y \in [0, b]$ ,  $\delta \in [0, \delta_{\text{конст}}]$ . Параметрические исследования следует проводить в точках с координатами  $(x_i, y_i)$  при решении нелинейного уравнения по п. 9 в случае определения толщин  $\delta(x_i, y_i)$ . Затем необходимо выбрать максимальное значение толщины  $\max\{\delta(x_i, y_i)\}$ .

**Определение параметров гладких металлических панелей при сдвиге. Проектирование панелей при расчетном уровне нагружения.** Проведем также аналогичные рассуждения для задачи проектирования гладких металлических панелей при действии расчетных касательных потоков и учете мембранных и изгибных напряжений при закритическом состоянии. Представим прогиб в виде [18]

$$W = f \sin \frac{\pi y}{b} \sin \frac{\pi(x - \alpha y)}{s}, \quad (25)$$

где  $\alpha$  — тангенс угла наклона волн при выпучивании к оси  $x$ ;  $s$  — длина полуволны.

Из уравнения совместности деформаций (1) с учетом прогиба (25) можно получить функцию напряжений [16]

$$F = E \frac{f^2}{32} \left\{ \frac{1}{J} \left( \frac{s}{b} \right)^2 \cos \frac{2\pi(x - \alpha y)}{s} + \left( \frac{b}{s} \right)^2 \cos \frac{2\pi y}{b} \right\} - \frac{p_x y^2}{2} - \frac{p_y x^2}{2} + p_{xy} xy, \quad (26)$$

где  $J = (1 + \alpha^2)^2$ ;  $q_x = p_x \delta$ ,  $q_y = p_y \delta$ ,  $q_{xy} = p_{xy} \delta$  — потоки.

Будем считать, что разрушение панели по условиям прочности в данном случае реализуется при достижении предельных касательных напряжений  $\bar{\tau}_{xy}$ . Получим выражение для мембранных касательных напряжений в виде

$$\tau_{xy}^{\text{мемб}} = - \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = f^2 \Omega_{xy}^{\text{мемб}} - p_{xy}, \quad (27)$$

где  $\Omega_{xy}^{\text{мемб}} = \frac{\pi^2}{8} \frac{\alpha}{Jb^2} \cos \frac{2\pi(x - \alpha y)}{s}$ .

Касательные напряжения от изгиба при действии сдвиговых потоков определяются так:

$$\tau_{xy}^{\text{изгиб}} = f \delta \Omega_{xy}^{\text{изгиб}}, \quad (28)$$

где  $\Omega_{xy}^{\text{изгиб}} = \frac{\pi^2}{b} \frac{G}{s^2} \left[ s \cos \frac{2\pi(x - \alpha y)}{s} \cos \frac{\pi y}{b} + \alpha b \sin \frac{\pi(x - \alpha y)}{s} \sin \frac{\pi y}{b} \right]$ .

Тогда суммарные касательные напряжения можно определить по формуле

$$\tau_{xy\Sigma} = -f^2 \Omega_{xy}^{\text{мемб}}(x, y) - \delta f \Omega_{xy}^{\text{изгиб}}(x, y) - p_{xy}. \quad (29)$$

Следует также отметить, что ПКТ функций  $\Omega_{xy}^{\text{мемб}}(x, y)$  и  $\Omega_{xy}^{\text{изгиб}}(x, y)$  не совпадают.

Применяя далее процедуру метода Бубнова — Галеркина и учитывая геометрически нелинейное уравнение равновесия (2), в общем виде при  $f \neq 0$  получим

$$\begin{aligned} & \frac{\pi^4}{64} \left[ \frac{1}{Jb^4} + \frac{E}{s^4} \right] f^2 + \frac{E\delta^2}{12(1-\mu^2)} \frac{\pi^4}{4b^2s^2} \left[ \frac{b^2}{s^2} J + \frac{s^2}{b^2} + 2 + 6\alpha^2 \right] - \\ & - p_x \frac{\pi^2}{4s^2} - p_y \frac{\pi^2}{4} \left( \frac{1}{b^2} + \frac{\alpha^2}{s^2} \right) - p_{xy} \frac{\alpha\pi^2}{2s^2} = 0. \end{aligned} \quad (30)$$

При малых прогибах уравнение (30) можно представить в виде

$$q_{xy} = p_{xy}\delta = \frac{E\delta^3}{12(1-\mu^2)} \cdot \frac{\pi^2}{2b^2} \left[ \frac{b^2}{s^2} J + \frac{s^2}{b^2} + 2 + 6\alpha^2 \right]. \quad (31)$$

При минимизации выражения (31) по  $\alpha$  и по  $s$  можно получить критические параметры волнообразования  $\alpha^2 = 1/2$  и  $(s/b)^2 = 3/2$  [1].

Для определения минимальных толщин воспользуемся равенством суммарных касательных напряжений предельным по прочности значениям  $\tau_{xy\Sigma} = \bar{\tau}_{xy}$ . В данном случае алгоритм определения минимальной толщины панели такой же, как и в случае сжатия: надо решить квадратное уравнение (29) относительно амплитуды прогиба, подставить в равенство (30) и записать уравнение относительно искомой толщины панели.

**Особенности алгоритма проектирования панелей с учетом двух уровней касательных усилий.** Приведем дополнение к методике для определения толщины панели, нагруженной касательными потоками. В этом случае к соотношениям (29)–(31) следует добавить выражение для определения ширины панели при действии такой нагрузки, при которой необходимо обеспечить устойчивость. Для шарнирно опертой панели имеем

$$b^2 = \frac{5,1E}{q_{xy}^{\text{уст}}} \delta^3. \quad (32)$$

Алгоритм численных вычислений в данном случае предполагает представление системы уравнений относительно неизвестных  $\delta$  и  $b$  с учетом известных величин параметров волнообразования, указанных выше.

**Особенности проектирования панелей с учетом двух уровней нагружения при продольном сжатии и сдвиге.** Далее в дополнение к представленной выше методике рассмотрим задачу проектирования с учетом двух уровней нагружения. Для того чтобы получить выражение для определения ширины панели из условий обеспечения устойчивости при комбинированном нагружении, можно использовать аналитическое решение задачи устойчивости из работы Л.И. Балабуха [18] для ортотропных панелей. Приведем указанное выражение в виде

$$\sigma_x^{\text{эксп}} \delta + \frac{(\tau_{xy}^{\text{эксп}} \delta)^2}{\frac{2\pi^2}{b^2} \left( 2D_y + D_3 \sqrt{\frac{D_y}{D_x}} \right)} = \frac{2\pi^2}{b^2} (D_3 + \sqrt{D_x D_y}). \quad (37)$$

Перепишав уравнение (37) для металлических панелей через действующие потоки для первого уровня нагружения, при которых необходимо обеспечить устойчивость, имеем квадратное уравнение относительно ширины панели  $b$  в зависимости от толщины  $\delta$  и потоков  $q$  первого уровня нагружения:

$$q_x^{\text{уст}} b^2 + \frac{2(q_{xy}^{\text{уст}})^2 b^4 (1 - \mu^2)}{\pi^2 E \delta^3} - \frac{\pi^2 \delta^3 E}{3(1 - \mu^2)} = 0. \quad (38)$$

Далее, для того чтобы реализовать алгоритм проектирования и получить уравнение для определения толщины, необходимо следовать рассуждению, приведенному в ранее описанном случае при комбинированном нагружении, к которому надо добавить аналитическое решение квадратного уравнения (38) относительно величины  $b^2$ .

**Заключение.** Предложена общая методика (алгоритм) проектирования плоских металлических панелей средней толщины по закритическому состоянию в общем случае при сжатии, сдвиге и при комбинированном нагружении. Учтены мембранные и изгибные напряжения, возникающие при геометрически нелинейном состоянии. Приведены прикладные методики определения толщин металлических панелей при закритическом состоянии с учетом наряду с прочим использования равенства эквивалентных напряжений предельным по статической прочности напряжениям. Указанное условие обеспечивает минимальный запас по прочности  $n = 1$ . Предложена методика (алгоритм) определения

параметров (толщины и ширины) металлических панелей средней толщины с учетом рассмотрения двух уровней нагружения с учетом соответственно обеспечения устойчивости и прочности при закритическом состоянии с минимальными запасами  $n = 1$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Вольмир А.С. *Гибкие пластины и оболочки*. Москва, Гостехиздат, 1956, 419 с.
- [2] Баничук Н.В., Бирюк В.И., Сейранян А.П. *Методы оптимизации авиационных конструкций*. Москва, Машиностроение, 1989, 296 с.
- [3] Авдонин А.С., Фигуровский В.И. *Расчет на прочность летательных аппаратов*. Москва, Машиностроение, 1985, 440 с.
- [4] Лизин В.Т., Пяткин В.А. *Проектирование тонкостенных конструкций*. Москва, Машиностроение, 1994, 384 с.
- [5] Белоус А.А., Поспелов И.И. Метод расчета на устойчивость панели крыла малого удлинения. *Труды ЦАГИ. Вып. 1783*. Москва, 1976, 36 с.
- [6] Андриенко В.М., Поспелов И.И. Оптимальное проектирование панелей кессона крыла по условиям прочности и устойчивости. *Проектирование и расчет на прочность авиационных конструкций. Вып. 2623*. Москва, ЦАГИ, 1996, с. 68–75.
- [7] Замула Г.Н., Иерусалимский К.М. Методика редуцирования потерявшей устойчивость обшивки при комбинированном нагружении. *Ученые записки ЦАГИ*, 1989, т. 20, № 6, С. 71–82.
- [8] Дзюба А.С., Дударьков Ю.И., Левченко Е.А., Лимонин М.В., Цой С.В., Яшутин А.Г. Методология применения современных расчетных методов к отработке статической прочности авиаконструкций. *Прочность конструкций летательных аппаратов (труды конференции «Прочность конструкций летательных аппаратов» 31 мая – 1 июня 2018 г., г. Жуковский)*. Труды ЦАГИ. Вып. 2782. Москва, 2018, с. 7.
- [9] Зиченков М.Ч., Дзюба А.С., Дубинский С.В., Лимонин М.В., Парышев С.Э., Панков А.В. Развитие методов анализа и исследования прочности авиационных конструкций. *Общероссийский научно-технический журнал «Полет»*, 2018, № 11, с. 87–105.
- [10] Никифоров А.К., Чедрик В.В. Применение метода нелинейного программирования в задаче оптимизации подкрепленных панелей по условиям прочности и устойчивости. *Проектирование и расчет на прочность авиационных конструкций. Вып. 2628*. Москва, ЦАГИ, 1997, с. 47–53.
- [11] Меркулов И.Е., Ендогур А.И. Оптимизация сварных конструкций сверхзвуковых самолетов с учетом конструктивно-технологических схем. *Авиация и космонавтика — 2017: Тезисы. Москва, 20–24 ноября 2017 года*. Москва, МАИ (НИУ). 2017, с. 48–49.
- [12] Больших А. А., Еремин В.П. Применение метода параметрической оптимизации в задачах проектирования пассажирских авиалайнеров. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2020, вып. 10 (106), с. 3. DOI: 10.18698/2308-6033-2020-10-2022
- [13] Селюгин С.В., Чехов В.В. Расчет рациональных параметров физически нелинейных конструкций. *Проектирование и расчет на прочность авиационных конструкций. Вып. 2632*. Москва, ЦАГИ, 1998, с. 85–95.
- [14] Чехов В.В. Теоретическая оценка влияния пластичности и больших деформаций на свойства оптимального проекта на примере нагружения трехстержневой фермы. *Прочность конструкций летательных аппаратов (труды конференции «Прочность конструкций летательных аппаратов»*

- 31 мая – 1 июня 2018 г., г. Жуковский). Труды ЦАГИ. Вып. 2782. Москва, 2018, с. 212–213.
- [15] Митрофанов О.В. Прикладное проектирование панелей крыла минимального веса из композитных материалов с учетом закритического поведения обшивки. *Вестник МАИ*, 2002, т. 9, № 1, с. 34–41.
- [16] Митрофанов О.В. *Проектирование несущих панелей авиационных конструкций по закритическому состоянию*. Москва, Изд-во МАИ, 2020, 160 с.
- [17] Митрофанов О.В., Осман Мазен. Проектирование гладких металлических панелей при обеспечении устойчивости и прочности при закритическом поведении. *Вестник Московского авиационного института*, 2022, т. 29, № 1, с. 36–47. DOI: 10.34759/vst-2022-1-36-47
- [18] Балабух Л.И. Устойчивость фанерных пластинок. *Техника воздушного флота*, 1937, № 9, с. 19–38.

Статья поступила в редакцию 21.02.2024

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Митрофанов О.В., Торопылина Е.Ю. Определение толщин гладких металлических панелей при ограничениях по устойчивости и статической прочности в случае закритического поведения с учетом мембранных и изгибных напряжений. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2024, вып. 6. EDN [UHNVND](#)

**Митрофанов Олег Владимирович** — д-р техн. наук, доцент, профессор кафедры «Проектирование и сертификация авиационной техники», Московский авиационный институт (НИУ). e-mail: oleg1mitrofanov@yandex.ru

**Торопылина Екатерина Юрьевна** — аспирант кафедры «Проектирование и сертификация авиационной техники» Московский авиационный институт (НИУ). e-mail: toropylina.ekaterina@yandex.ru



## **Determination of thickness of the smooth metal panels with limitations in stability and static strength at the postbuckling behaviour taking into account the membrane and bending stresses**

© O.V. Mitrofanov, E.Yu. Toropylina

Moscow Aviation Institute (National Research University),  
Moscow, 125080, Russian Federation

*Research objects in the paper include the upper metal load-bearing reinforced panels of the medium-duty aircraft wing caisson, which are loaded with the compressive and tangential forces. Stability loss in the skins exposed to loads close to the operational level is considered acceptable. In this case, the skins are classified as the medium-thick plates. Analysis of their geometrically nonlinear behavior should take into account the membrane and bending stresses. The paper proposes applied methods (algorithms) in determining the minimum thickness of skins loaded with compressive, tangential and combined forces with the acceptable initial stage of the geometrically nonlinear behavior. These methods (algorithms) are based on introducing analytical solutions to the geometrically nonlinear problems obtained by the Bubnov — Galerkin method. The paper formulates issues of the general methodology (algorithm) to determine the metal panel minimum thickness taking into account the membrane and bending stresses arising in the postbuckling state. Besides, it presents specifics of the applied methods (algorithms) in the panels' design taking into consideration the two loading levels. In this case, it becomes necessary in the postbuckling state to ensure stability at the first loading level and strength at the second.*

**Keywords:** *postbuckling behaviour, stability, metal square panels, pressure, shear*

### REFERENCES

- [1] Volmir A.S. *Gibkie plastiny i obolochki* [Flexible plates and shells]. Moscow, Gostekhizdat Publ., 1956, 419 p.
- [2] Banichuk N.V., Biryuk V.I., Seyranyan A.P. *Metody optimizatsii aviatsionnykh konstruktсий* [Methods of optimizing the aircraft structures]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1989, 296 p.
- [3] Avdonin A.S., Figurovsky V.I. *Raschet na prochnost letatelnykh apparatov* [Calculation of the aircraft strength]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1985, 440 p.
- [4] Lizin V.T., Pyatkin V.A. *Proektirovanie tonkostennykh konstruktсий* [Design of the thin-walled structures]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1994, 384 p.
- [5] Belous A.A., Pospelov I.I. Metod rascheta na ustoychivost paneli kryla malogo udlineniya [Calculation method for stability of the small elongation wing panel]. *Trudy TsAGI, iss. 1783*. Moscow, 1976, 36 p.
- [6] Andrienko V.M., Pospelov I.I. Optimalnoe proektirovanie paneley kessona kryla po usloviyam prochnosti i zhestkosti [Optimal design of the wing caisson panels according to strength and stability conditions]. *Proektirovanie i raschet na prochnost aviatsionnykh konstruktсий* [Design and calculation of strength of the aircraft structures]. *Iss. 2623*. Moscow, 1996, TsAGI Publ., pp. 68–75.
- [7] Zamula G.N., Ierusalimskiy K.M. Metodika redutsirovaniya poteryavshey ustoychivost obshivki pri kombinirovannom nagruzhении [Methodology of reducing

- a shell with lost stability under combined loading]. *Uchenye zapiski TsAGI — TsAGI Science Journal*, 1989, vol. 20, no. 6, pp. 71–82.
- [8] Dzyuba A.S., Dudakov Yu.I., Levchenko E.A., Limonin M.V., Tsoi S.V., Yashutin A.G. Metodologiya primeniya sovremennykh raschetnykh metodov k otrabotke staticheskoy prochnosti aviakonstruktsiy [Methodology of applying modern computational methods to testing the static strength of the aircraft structures]. *Prochnost konstruktsiy letatelnykh apparatov (trudy konferentsii “Prochnost konstruktsiy letatelnykh apparatov” 31 maya – 1 iyunya 2018 g., g. Zhukovsky)* [Structural strength of the aircraft (proceedings of the conference “Structural strength of the aircraft”, May 31 – June 1, 2018, Zhukovsky)]. *Trudy TsAGI, iss. 2782*. Moscow, 2018, p. 7.
- [9] Zichenkov M.Ch., Dzyuba A.S., Dubinsky S.V., Timonin M.V., Paryshev S.E., Pankov A.V. Razvitie metodov analiza i issledovaniya prochnosti aviatsionnykh konstruktsiy [Development of methods of analysis and research of the aircraft structures strength]. *Obshcherossiyskiy nauchno-tekhnicheskii zhurnal “Polet” — All-Russian Scientific-Technical Journal “Polyot” (“Flight”)*, 2018, no. 11, pp. 87–105.
- [10] Nikiforov A.K., Chedrik V.V. Primenenie metoda nelineynogo programmirovaniya v zadache optimizatsii podkreplennykh paneley po usloviyam prochnosti i ustoychivosti [Application of the nonlinear programming method in the problem of optimizing the reinforced panels according to strength and stability conditions]. *Proektirovanie i raschet na prochnost aviatsionnykh konstruktsiy* [Design and calculation of strength of the aircraft structures]. *Iss. 2628*. Moscow, TsAGI Publ., 1997, pp. 47–53.
- [11] Merkulov I.E., Endogur A.I. Optimizatsiya svarnykh konstruktsiy sverkhzvukovykh samoletov s uchetom konstruktivno-tekhnologicheskikh skhem [Optimization of welded structures of the supersonic aircraft taking into account the structural and technological schemes]. *Aviatsiya i kosmonavtika – 2017: Tezisy. Moskva, 20–24 noyabrya 2017 g.* [Aviation and Cosmonautics – 2017: Abstracts, Moscow, November 20–24, 2017]. Moscow, 2017, MAI Publ., pp. 48–49.
- [12] Bolshykh A.A., Eremin V.P. Primenenie metoda parametricheskoy optimizatsii v zadachyakh proektirovaniya passazhirskikh avialaynerov [Method of parametric optimization in the problems of passenger airliner design]. *Inzhenerny zhurnal: nauka i innovatsii — Engineering Journal: Science and Innovation*, 2020, iss. 10 (106), p. 3. <https://doi.org/10.18698/2308-6033-2020-10-2022>
- [13] Selyugin S.V., Chekhov V.V. Raschet ratsionalnykh parametrov fizicheskii nelineynykh konstruktsiy [Calculation of rational parameters of the physically nonlinear structures]. *Proektirovanie i raschet na prochnost aviatsionnykh konstruktsiy* [Design and calculation of strength of the aircraft structures]. *Iss. 2632*. Moscow, 1998, TsAGI Publ., pp. 85–95.
- [14] Chekhov V.V. Teoreticheskaya otsenka vliyaniya plastichnosti i bolshikh deformatsii na svoystva optimalnogo poleta na primere nagruzheniya trekhsterzhnevoy fermy [Theoretical assessment of the plasticity and large deformations influence on the properties of optimal design using the example of loading a three-rod truss]. *Prochnost konstruktsiy letatelnykh apparatov (trudy konferentsii “Prochnost konstruktsiy letatelnykh apparatov” 31 maya – 1 iyunya 2018 g., g. Zhukovsky)* [Structural strength of the aircraft (proceedings of the conference “Structural strength of the aircraft”, May 31 – June 1, 2018, Zhukovsky)]. *Trudy TsAGI, iss. 2782*. Moscow, 2018, pp. 212–213.
- [15] Mitrofanov O.V. Proektirovanie paneley kryla minimalnoy massy iz kompozitnykh materialov s uchetom zakriticheskogo povedeniya obshivki [Composite material wing panel of minimum mass design considering supercritical skin response]. *Vestnik MAI — Aerospace MAI Journal*, 2022, vol. 9, no. 1, pp. 34–41.

- [16] Mitrofanov O.V. *Proektirovanie nesushchikh paneley aviatsionnykh konstruksiy po zakriticheskomu sostoyaniyu* [Designing load-bearing panels of the aircraft structures for postbuckling state]. Moscow, MAI Publ., 2020, 160 p.
- [17] Mitrofanov O.V., Osman Mazen. Proektirovanie gladkikh metallicheskih paneley pri obespechenii ustoychivosti i prochnosti pri zakriticheskomu povedenii [Designing of smooth composite panels providing stability and strength at postbuckling behavior]. *Vestnik Moskovskogo aviatsionnogo instituta — Aerospace MAI Journal*, 2022, vol. 29, no. 1, pp. 36–47. <https://doi.org/10.34759/vst-2022-1-36-47>
- [18] Balabukh L.I. Ustoychivost fanernykh plastinok [Stability of plywood plates]. *Tekhnika vozdushnogo flota — Air Fleet Technology*, 1937, no. 9, pp. 19–38.

**Mitrofanov O.V.**, Dr. Sc. (Eng.), Associate Professor, Professor of Department 101 “Aircraft Design and Certification”, Moscow Aviation Institute (National Research University). e-mail: oleg1mitrofanov@yandex.ru

**Toropylina E.Yu.**, Postgraduate, Department 101 “Aircraft Design and Certification”, Moscow Aviation Institute (National Research University). e-mail: toropylina.ekaterina@yandex.ru