

Некорректные обратные задачи статистической динамики механических систем

© А.С. Гусев¹, Л.В. Зинченко¹, С.А. Стародубцева²

¹ МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Российская Федерация

² Национальный исследовательский университет "МЭИ",
Москва, 111250, Российская Федерация

Предложено новое решение некорректных обратных задач статистической динамики механических систем с помощью регуляризации случайных процессов различными методами сглаживания их траекторий. Рассмотрены случаи, в которых на выходе динамических систем регистрируется либо сглаженный белый шум, либо стационарный процесс со скрытой периодичностью. В обоих случаях на входе системы имеем недифференцируемые случайные процессы, траектории которых сглаживаются путем их усреднения на малых интервалах времени либо устранения особенностей их амплитудных спектров на бесконечности. В качестве основного примера рассмотрена механическая система прибора, предназначенная для определения вероятностных характеристик входного на него кинематического воздействия по регистрируемому перемещению объекта виброзащиты или по деформации упругого элемента.

Ключевые слова: некорректные обратные задачи, вероятность, случайные процессы, надежность, механические системы, машиностроение

Введение. Исходная информация, необходимая для решения ряда задач статистической динамики и разработки конструкций, часто состоит в задании вероятностных характеристик непрерывных, но недифференцируемых случайных процессов [1].

Возможность дифференцирования таких процессов связана не с их физическими особенностями, а с особенностями их математического описания на бесконечности, после устранения которых решение задач статистической динамики и прогнозирование надежности и ресурса конструкций оказывается относительно несложным. В рассматриваемых случаях получить информацию о производных случайных процессов проблематично, и поэтому необходимо сглаживать их траектории тем или иным способом, один из которых состоит в усреднении их значений на малых интервалах времени $\Delta t = a$ [2].

Сглаженную траекторию $\tilde{x}(t)$ исходного случайного процесса $x(t)$ можно представить в виде

$$\tilde{x}(t) = \frac{1}{a} \int_{t-a}^t x(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^t \alpha(t, \tau) x(\tau) d\tau, \quad (1)$$

$$\alpha(t, \tau) = \frac{1}{a} \exp\left(-\frac{t - \tau}{a}\right),$$

где «~» — знак сглаживания траектории.

Продифференцировав интеграл (1) по параметру t , для определения сглаженной траектории $\tilde{x}(t)$ процесса $x(t)$ получим дифференциальное уравнение

$$a\tilde{x}'(t) + \tilde{x}(t) = x(t)$$

с передаточной функцией

$$H(i\omega) = \frac{1}{1 + ai\omega}. \quad (2)$$

При $a = 0$ сглаживания траектории исходного случайного процесса $x(t)$ не происходит.

Спектральная плотность $S_{\tilde{x}}(\omega)$ процесса $\tilde{x}(t)$ будет определена по формуле Винера — Хинчина

$$S_{\tilde{x}}(\omega) = |H(i\omega)|^2 S_x(\omega) = \frac{S_x(\omega)}{1 + a^2\omega^2}.$$

Для сглаженной траектории белого шума $x(t)$ с интенсивностью k_0 имеем

$$S_x(\omega) = \frac{k_0}{2\pi}; \quad S_{\tilde{x}}(\omega) = \frac{k_0/(2\pi)}{1 + a^2\omega^2}, \quad (3)$$

а дисперсия

$$s_{\tilde{x}}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} S_{\tilde{x}}(\omega) d\omega = \frac{k_0}{2a}. \quad (4)$$

Отметим, что сглаженный белый шум непрерывен, имеет ограниченную дисперсию, но он не имеет производных.

Процесс сглаживания траектории можно усилить, если принять

$$|H(i\omega)|^2 = \frac{1}{1 + a^2\omega^2 + a^4\omega^4 + \dots} = \exp(-a^2\omega^2). \quad (5)$$

В этом случае получаем полностью дифференцируемый случайный процесс со следующими спектром, дисперсией и дисперсиями его производных:

$$S_{\tilde{x}}(\omega) = \frac{k_0}{2\pi} \exp(-a^2\omega^2);$$

$$s_{\tilde{x}}^2(\omega) = \frac{k_0}{2a\sqrt{\pi}};$$

$$s_{\ddot{x}(n)}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \omega^{2n} e^{-a^2 \omega^2} d\omega = a^{-(2n+1)} \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right),$$

где $\Gamma(\cdot)$ — гамма функция; $n = 1, 2, 3, \dots$.

В соответствии с известными формулами Райса, частота сглаженного на интервале времени $\Delta t = a$ белого шума и частоты его первых двух производных будут вычисляться по формулам

$$\omega_{\dot{x}} = \frac{1}{a\sqrt{2}}; \quad \omega_{\ddot{x}} = \frac{1}{a}\sqrt{\frac{3}{2}}; \quad \omega_{\ddot{\ddot{x}}} = \frac{1}{a}\sqrt{\frac{5}{2}}.$$

Первые два параметра сложности структуры сглаженного белого шума $\ddot{x}(t)$ как отношение числа экстремумов к числу нулей и числа точек перегиба траектории к числу экстремумов будут определяться по формулам:

$$k_1 = \frac{\omega_{\ddot{x}}}{\omega_{\dot{x}}} = \sqrt{3} \approx 1,73; \quad k_2 = \frac{\omega_{\ddot{\ddot{x}}}}{\omega_{\ddot{x}}} = \sqrt{\frac{5}{3}} \approx 1,29.$$

Аналогично можно выполнить сглаживания траекторий для любых случайных процессов.

Постановка задачи. Рассматриваются механические системы, функционирование которых описывается дифференциальным уравнением n -го порядка вида

$$L\{q(t)\} = f(t), \quad (6)$$

где $L(p) = a_n p^n + \dots + a_1 p + a_0$ — линейный дифференциальный оператор; a_n, \dots, a_1, a_0 — параметры системы ($n = 1, 2, 3, \dots, p = d/dt$); $q(t)$ — обобщенная координата Лагранжа системы для момента времени t ; $f(t)$ — случайная стационарная функция времени t ; $L(i\omega) = a_n (i\omega)^n + \dots + a_1 (i\omega) + a_0$ — импеданс системы (6); $H(i\omega) = 1/L(i\omega)$ — ее передаточная функция (усилитель амплитуд *amplify*); $i = \sqrt{-1}$ — мнимая единица.

Решение прямой задачи статистической динамики по определению вероятностных характеристик процессов на выходе системы $q(t)$ по заданным (экспериментально установленным) вероятностным характеристикам процессов на входе $f(t)$ сводится к решению корректной математической задачи по интегрированию заданных с возможно малыми погрешностями функций $f(t)$ [3–5].

При этом стационарное решение уравнения (6) имеем в виде интеграла Дюамеля

$$q(t) = \int_{-\infty}^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau,$$

где $g(t-\tau)$ — функция Грина — реакция системы при $t > \tau$ на единичное дельта-воздействие в момент времени $t = \tau$. Эту функцию определяем из решения уравнения

$$L\{g(t-\tau)\} = \delta(t-\tau), \quad (7)$$

где дельта-функцию Дирака представляем в виде следующего интеграла Фурье:

$$\delta(t-\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(t-\tau)} d\omega. \quad (8)$$

Из (7), (8) получаем

$$g(t-\tau) = \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{1}{L'(\lambda_k)} e^{\lambda_k(t-\tau)},$$

где λ_k — отрицательные корни алгебраического уравнения $L(\lambda_k) = 0$, штрих сверху означает производную по λ .

Решение обратной задачи по определению вероятностных характеристик процесса на входе $f(t)$ по вероятностным характеристикам, зарегистрированным в эксперименте с неизбежными при этом погрешностями процесса на выходе $q(t)$, сводится (в соответствии с уравнением (6)) к некорректной математической задаче многократного дифференцирования приближенно заданных функций [6].

При этом спектральная плотность процесса $f(t)$ и дисперсии его производных будут вычисляться по формулам Винера — Хинчина:

$$S_f(\omega) = |L(i\omega)|^2 S_q(\omega);$$

$$s_n^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \omega^{2n} S_f(\omega) d\omega, \quad (9)$$

где s_n^2 — дисперсия n -й производной от $f(t)$.

Однако из-за множителя ω^{2n} интегралы в (9), как правило, расходятся, и дисперсий s_n^2 не существует.

Так, случайный стационарный непрерывный процесс $q(t)$ с корреляционной функцией

$$K_q(\tau) = s_q^2 e^{-\alpha|\tau|} \cos \beta\tau$$

и спектральной плотностью

$$S_q(\omega) = \frac{\alpha s_q^2}{\pi} \frac{\omega^2 + \alpha^2 + \beta^2}{(\omega^2 - \alpha^2 - \beta^2)^2 + 4\alpha^2\omega^2} \quad (10)$$

оказывается недифференцируемым.

Решение обратной задачи статистической динамики. Вначале рассмотрим решение обратной задачи для случая, когда регистрируемый в эксперименте процесс $\tilde{q}(t)$ описывается моделью сглаженного белого шума интенсивностью k_0 , из которого устранены малозначимые высокочастотные составляющие путем сглаживания его траектории на малом интервале времени $\Delta t = a$ и который получаем из решения уравнения

$$a\ddot{\tilde{q}}(t) + \dot{\tilde{q}}(t) = q(t)$$

с передаточной функцией, спектральной плотностью и дисперсией, определяемыми по формулам (2)–(4) [7].

Интенсивность сглаживания траектории процесса зависит от интервала его усреднения $\Delta t = a$, и при $a = 0$ сглаживания не происходит, его дисперсия $s_{\tilde{q}}^2 \rightarrow \infty$. Далее знак сглаживания « \sim » будем опускать.

Для примера рассмотрим уравнение

$$\dot{q}(t) = f(t).$$

Спектральные плотности процессов $\dot{q}(t)$ и $f(t)$ получим в виде

$$S_{\dot{q}}(\omega) = S_f(\omega) = \frac{\omega^2 k_0 / (2\pi)}{1 + a^2 \omega^2}. \quad (11)$$

Эти процессы оказываются недифференцируемыми в том смысле, что их дисперсий и дисперсий их производных не существует.

Для перехода к дифференцируемым процессам вместо описанного во введении метода сглаживания траекторий путем усреднения их на малых интервалах времени здесь будем использовать метод устранения математических особенностей спектров при $\omega \rightarrow \infty$.

Для этого представим выражение (11) в виде произведения следующих двух квазиспектров:

$$S_f(\omega) = \frac{k_0}{2\pi} \Phi(\omega) \Phi^*(\omega). \quad (12)$$

Здесь $\Phi(\omega) = \frac{i\omega}{1 + ai\omega}$; $\Phi^*(\omega) = -\frac{i\omega}{1 - ai\omega}$ при $\omega \rightarrow \infty$ стремятся к единице.

Для того чтобы устранить особенности этих спектров при $\omega \rightarrow \infty$, представим их в сглаженном виде:

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}(\omega) &= \Phi(\omega) - 1 = -\frac{1}{a(1 + ai\omega)}; \\ \tilde{\Phi}^*(\omega) &= \Phi^*(\omega) - 1 = -\frac{1}{a(1 - ai\omega)}. \end{aligned} \quad (13)$$

Тогда при $\omega \rightarrow \infty$ имеем $\tilde{\Phi}(\omega) \rightarrow 0$, $\tilde{\Phi}^*(\omega) \rightarrow 0$.

Подставив выражения (13) в формулу (12), получим спектральные плотности для сглаженных процессов $\tilde{q}(t)$ и $\tilde{f}(t)$ в виде

$$\tilde{S}_{\tilde{q}}(\omega) = S_{\tilde{f}}(\omega) = \frac{k_0}{2\pi} \frac{a^{-2}}{1+a^2\omega^2} \quad (14)$$

с дисперсиями

$$s_{\tilde{q}}^2 = s_{\tilde{f}}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{S}_f(\omega) d\omega = \frac{k_0}{2a^3}$$

и при $\omega \rightarrow \infty$ будем иметь $\tilde{S}_{\tilde{q}}(\omega) = \tilde{S}_{\tilde{f}}(\omega) \rightarrow 0$.

Эффективную (среднюю) частоту этих процессов получим по формуле Райса

$$\omega_e = \frac{S_{\dot{q}}}{S_q} = \frac{1}{a},$$

и при $a \rightarrow 0$ (для несглаженных процессов) $\omega_e \rightarrow \infty$.

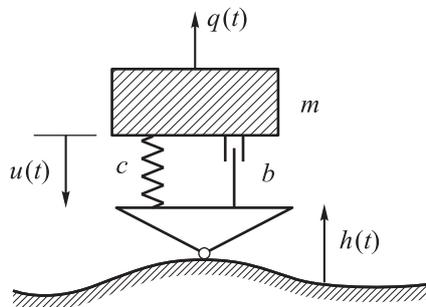
Из (2) и (14) выводим формулы для дифференцирования сглаженных случайных процессов:

$$\tilde{S}_{\dot{q}}(\omega) = \omega^2 S_q(\omega); \quad \tilde{S}_{\ddot{q}}(\omega) = \omega^4 S_q(\omega), \dots$$

Применим полученные выше результаты к анализу формально недифференцируемого процесса со спектральной плотностью (10), тогда

$$S_{\dot{q}}(\omega) = (\alpha^2 + \beta^2) S_q(\omega); \quad S_{\ddot{q}}(\omega) = (\alpha^2 + \beta^2)^2 S_q(\omega), \quad \omega_e = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}.$$

Рассмотрим теперь механическую систему [8], с помощью которой можно определить спектральную плотность на ее входе $S_h(\omega)$ кинематического воздействия $h(t)$ по экспериментально определенной спектральной плотности $S_q(\omega)$ на ее выходе перемещения $q(t)$ или измеренной деформации пружины $u(t) = q(t) - h(t)$ (см. рисунок).



Расчетная схема измерителя неровностей пути

В соответствии со вторым законом динамики имеем равенство

$$m\ddot{q} = b(\dot{h} - \dot{q}) + c(h - q),$$

где c — жесткость упругого элемента; b — коэффициент демпфирования; m — масса,

или

$$\ddot{q} + 2n\dot{q} + \omega_0^2 q = 2n\dot{h} + \omega_0^2 h, \quad (15)$$

или

$$\ddot{u} + 2n\dot{u} + \omega_0^2 u = -\ddot{h}(t), \quad (16)$$

где $2n = b/m$; $\omega_0^2 = c/m$.

Из (14) следует

$$S_h(\omega) = (\omega_q^4 + 4n^2\omega_q^2 + \omega_0^4) \cdot \frac{k_0/(2\pi)}{(1+a^2\omega^2)(\omega_0^4 + 4n^2\omega^2)}, \quad (17)$$

где ω_q — ожидаемая частота процесса $q(t)$ [9].

Из (17) получаем дисперсию процесса $h(t)$, дисперсию его скорости и ожидаемую частоту:

$$s_h^2 = \int_{-\infty}^{\infty} S_h(\omega) d\omega = \frac{k_0}{2\omega_0^2(a\omega_0^2 + 2n)} (\omega_q^4 + 4n^2\omega_q^2 + \omega_0^4);$$

$$s_{\dot{h}}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 S_h(\omega) d\omega = \frac{k_0}{4an(a\omega_0^2 + 2n)} (\omega_q^4 + 4n^2\omega_q^2 + \omega_0^4);$$

$$\omega_h = \frac{S_{\dot{h}}}{S_h} = \frac{\omega_0}{2\sqrt{an}}.$$

Заметим, что последующих производных от $h(t)$ ($\ddot{h}(t)$, $\ddot{\dot{h}}(t)$ и т. д.) не существует, т. е. регуляризации случайного процесса с помощью функции (2) оказалось недостаточно. Эффект сглаживания случайных процессов можно усилить, если использовать регуляризующую функцию в виде (5).

Тогда выражение (17) принимает вид

$$S_h(\omega) = (\omega_q^4 + 4n^2\omega_q^2 + \omega_0^4) \cdot \frac{k_0/(2\pi)}{\omega_0^4 + 4n^2\omega^2} \exp(-a^2\omega^2),$$

и интегралы вида

$$\int_{-\infty}^{\infty} \omega^n S_h(\omega) d\omega$$

существуют и вычисляются стандартными методами [10].

Из (16) получаем спектральную плотность процесса $\ddot{h}(t)$, которая чаще всего используется при решении задач статистической динамики механических систем,

$$S_{\ddot{h}}(\omega) = (\omega_u^4 + 4n^2\omega_u^2 + \omega_0^4) \frac{k_0/(2\pi)}{1 + a^2\omega^2},$$

где ω_u — ожидаемая частота процесса $u(t)$.

Последующие производные $\ddot{h}(t)$ и т. д. также легко вычисляются, однако стационарных функций $h(t)$ и $\dot{h}(t)$ не существует, что связано с проблемой интегрирования случайных функций [5].

Заключение. В ходе исследований предложено решение некорректных обратных задач статистической динамики механических систем с помощью регуляризации процессов двумя различными методами — путем сглаживания их траекторий на малых интервалах времени функционирования и путем устранения математических особенностей спектром при частотах, стремящихся в бесконечность.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Гусев А.С., Найденов С.О. Анализ траекторий недифференцируемых случайных процессов. *Известия вузов. Машиностроение*, 2014, № 9, с. 3–8.
- [2] Гусев А.С. *Вероятностные методы в механике машин и конструкций*. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2009, 224 с.
- [3] Гусев А.С. *Курс лекций по вероятностным методам в механике*. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2020, 102 с.
- [4] Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. *Методы решения некорректных задач*. Москва, Наука, 1979, 285 с.
- [5] Тихонов А.Н., Гончарский А.В. *Некорректные задачи естествознания*. Москва, МГУ, 1987, 303 с.
- [6] Хазов П.А. *Динамика строительных конструкций при экстремальных природных воздействиях: колебания, прочность, ресурс*. Н. Новгород, ННГАСУ, 2022, 96 с.
- [7] Гусев А.С., Щербаков В.И., Чуканин Ю.П., Стародубцева С.А. Метод статистической линеаризации в динамике нелинейных систем мобильных машин. *Известия МГТУ МАМИ*, 2014, т. 1 (19), с. 84–86.
- [8] Яблонский А.А., Никифорова В.М. *Курс теоретической механики. Т. 1: Статика. Кинематика. Т. 2: Динамика*. Москва, КноРус, 2010, 608 с.
- [9] Пановко Я.Г., Губанова И.И. *Устойчивость и колебания упругих систем. Современные концепции, парадоксы и ошибки*. 7-е изд. Москва, Ленанд, 2015, 350 с.
- [10] Окопный Ю.А., Радин В.П., Чирков В.П. *Колебания линейных систем*. Москва, Спектр, 2014, 432 с.

Статья поступила в редакцию 04.05.2024

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Гусев А.С., Зинченко Л.В., Стародубцева С.А. Некорректные обратные задачи статистической динамики механических систем. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2024, вып. 6. EDN PEJIGZ

Гусев Александр Сергеевич — д-р техн. наук, профессор кафедры «Прикладная механика», МГТУ им. Н.Э. Баумана. e-mail: dcb@bmstu.ru

Зинченко Лариса Витальевна — канд. техн. наук, доцент кафедры «Прикладная механика», МГТУ им. Н.Э. Баумана. e-mail: zinlar@bmstu.ru

Стародубцева Светлана Александровна — канд. техн. наук, доцент кафедры «Инновационные технологии наукоемких отраслей», Национальный исследовательский университет «МЭИ». e-mail: starodubtseva_sa@mail.ru

Ill-positioned inverse problems in the mechanical system statistical dynamics

© A.S. Gusev¹, L.V. Zinchenko¹, S.A. Starodubtseva²

¹ Bauman Moscow State Technical University,
Moscow, 105005, Russian Federation

² National Research University “Moscow Power Engineering Institute”,
Moscow, 111250, Russian Federation

The paper proposes a new solution to the ill-positioned inverse problems in the mechanical system statistical dynamics using regularization of the random processes by various methods of smoothing their trajectories. It considers cases, where either smoothed white noise or a stationary process with the hidden periodicity is registered at the dynamic system output. In both cases, non-differentiable random processes are present at the system input; their trajectories are smoothed by averaging over the minor intervals or by eliminating features of their amplitude spectra at infinity. As a main example, the paper considers a mechanical system of a device designed to determine probabilistic characteristics of the input kinematic effect on it, it is based on the oscillation protection object registered displacement or on the elastic element deformation.

Keywords: *ill-positioned inverse problems, probability, random processes, reliability, mechanical systems, mechanical engineering*

REFERENCES

- [1] Gusev A.S., Naydenov S.O. Analiz traektoriy nedifferentsiruemykh sluchaynykh protsessov [Analysis of trajectories of non-differentiable random processes]. *Izvestia vuzov. Mashinostroenie — BMSTU Journal of Mechanical Engineering*, 2014, no. 9, pp. 3–8.
- [2] Gusev A.S. *Veroyatnostnye metody v mekhanike mashin i konstruktsiy* [Probabilistic methods in mechanics of machines and structures]. Moscow, BMSTU Publ., 2009, 224 p.
- [3] Gusev A.S. *Kurs lektsiy po veroyatnostnym metodam v mekhanike* [Course of lectures on probabilistic methods in mechanics]. Moscow, BMSTU Publ., 2020, 102 p.
- [4] Tikhonov A.N., Arsenin V.Ya. *Metody resheniya nekorrektnykh zadach* [Methods of solving the ill-positioned problems]. Moscow, Nauka Publ., 1979, 285 p.
- [5] Tikhonov A.N., Goncharov A.V. *Nekorrektnye zadachi estestvoznaniya* [Ill-positioned problems in natural science]. Moscow, MGU Publ., 1987, 303 p.
- [6] Khazov P.A. *Dinamika stroitelnykh konstruktsiy pri ekstremalnykh prirodnykh vozdeystviyakh: kolebaniya, prochnost, resurs* [Dynamics of building structures under extreme natural influences: fluctuations, strength, resource]. Nizhny Novgorod, NNGASU Publ., 2022, 96 p.
- [7] Gusev A.S., Scherbakov V.I., Chukanin Y.P., Starodubtseva S.A. Metod statisticheskoy linearizatsii v dinamike nelineynykh sistem mobilnykh mashin [Method of statistical linearization of nonlinear dynamics in system of mobile machines]. *Izvestiya MGTU MAMI*, 2014, vol. 1, no. 19, pp. 84–86.
- [8] Yablonskiy A.A., Nikiforova V.M. *Kurs teoreticheskoy mekhaniki. T. 1: Statika. Kinematika. T. 2: Dinamika* [Course of theoretical mechanics Vol. 1: Statics. Kinematics. Vol. 2: Dynamics]. Moscow, KnoRus Publ., 2010, 608 p.

- [9] Panovko Ya.G., Gubanova I.I. *Ustoychivost i kolebaniya uprugikh sistem. Sovremennye kontseptsii, paradoksy i oshibki* [Stability and vibrations of elastic systems. Modern concepts, paradoxes and errors]. Moscow, Lenand Publ., 2015, 350 p.
- [10] Okopny Yu.A., Radin V.P., Chirkov V.P. *Kolebaniya lineynykh sistem* [Fluctuations of linear systems]. Moscow, "Spektr" Publ., 2014, 432 p.

Gusev A.S., Dr. Sc. (Eng.), Professor, Department of Applied Mechanics, Bauman Moscow State Technical University. e-mail: dcb@bmstu.ru

Zinchenko L.V., Cand. Sc. (Eng.), Associate Professor, Department of Applied Mechanics, Bauman Moscow State Technical University. e-mail: zinlar@bmstu.ru

Starodubtseva S.A., Cand. Sc. (Eng.), Associate Professor, Department of Innovative Technologies in Science Intensive Sectors, National Research University "MPEI". e-mail: starodubtseva_sa@mail.ru