

Численное исследование явления затягивания в резонанс разгоняемого ротора

© А.А. Кирюхин

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Российская Федерация

Ротор — обязательный элемент большинства турбомашин. Поэтому с развитием технологий в области машиностроения обозначилась необходимость количественной и качественной оценки поведения роторных систем при разгоне, что сопровождается прохождением через резонанс системы. Рассмотрены методы описания больших поворотов с использованием вектора Эйлера и тензора Жилина. Приведена апробация «роторного» способа описания больших поворотов на примере задачи разгона ротора под действием внешнего момента. Представлена роторная система, включающая жесткий невесомый вал, диск, установленный с эксцентриситетом, комбинированную опору со сферическим шарниром и угловыми пружинами. Показано, что при прохождении резонанса во время разгона ротора часть энергии вращения переходит в энергию поперечных колебаний, что приводит к снижению скорости его вращения и к увеличению амплитуды поперечных колебаний. Отмечено, что эффект затягивания ротора в резонанс наиболее опасен при малых вращающих моментах ротора, так как для прохождения резонанса требуется значительно больше времени и возрастает риск его поломки при увеличении амплитуды колебаний. Предложенный способ расчета динамики роторной системы рекомендуется для составления алгоритмов разгона роторов, которые используются при написании программ систем автоматизированного управления.

Ключевые слова: разгон ротора, резонанс, поперечные колебания, вектор Эйлера, большой поворот, диск, эксцентриситет

Введение. Ротор — неотъемлемый элемент современных турбомашин [1, 2], к которым относятся центробежные насосы, авиационные газотурбинные двигатели, судовые энергетические установки и т. п. На ротор воздействует множество факторов, определяющих его ресурс, и один из них — повышенная вибрация. При прохождении ротором резонансных частот [2] при разгоне и торможении [3–6] в нем возникают вибрации. Однако на их появление также влияет эксцентриситет расположения центра масс в роторе. Причиной его возникновения может стать дефект как производственный, так и приобретенный в ходе эксплуатации. Например, во время работы авиационного двигателя может произойти отрыв лопатки, из-за чего центр масс ротора значительно переместится [7]. В таком случае требуется безопасно остановить двигатель, в обычных условиях работающий на зарезонансной частоте вращения. А это означает, что в процессе остановки ротор должен пройти как минимум через один резонанс. В этот момент могут возникнуть значительные поперечные

колебания всего ротора или его отдельных компонентов и существенно возрасти нагрузка на опоры [7]. В задачах разгона ротора немаловажно правильно выбрать систему управления этим процессом [4, 8]. Грамотно составленная программа позволит свести к минимуму энергетические затраты и не допустить возникновения больших вибраций ротора, которые могут привести к выходу из строя его опор вследствие продолжительных повышенных нагрузок, а также поломке элементов, расположенных в непосредственной близости от ротора, вроде гребешков лабиринтного уплотнения [1] и росту трещин в элементах конструкции, прилегающих к статору, который находится в непосредственном контакте с ротором.

В задачах роторной динамики подразумевается, что поворот вокруг оси продольного направления гораздо больше поворотов вокруг осей, расположенных в поперечных направлениях. В задачах роторной динамики существует множество способов описания больших поворотов. Как показано в [9–12], основной недостаток способов описания таких поворотов — особые точки. Для его исправления при использовании вектора Эйлера были разработаны следующие способы: инкрементный — для описания больших поворотов [9, 10]; «отката» на 2π [10]; комбинирующий повороты вокруг продольной и поперечной осей [11, 12].

Цель данной работы — исследование вызванных геометрической нелинейностью физических явлений, которые возникают при прохождении ротора через резонансные частоты в процессе его разгона. Для этого будут использованы уравнения, представленные в [11, 12], которые описывают полный поворот с вектором Эйлера \mathfrak{R} посредством разделения сложного движения на повороты вокруг двух осей — продольной и поперечной (рис. 1).

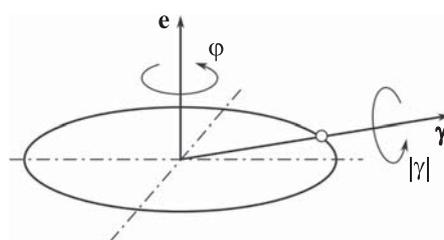


Рис. 1. Осевой (угол φ) и поперечный (вектор Эйлера γ) повороты вокруг осей e и γ

Метод представления больших поворотов. В случае малых поворотов разделение полного поворота на части сводится к проецированию на ось ротора и на перпендикулярную оси плоскость. В случае больших поворотов необходимо привлекать тензоры поворота [11, 12]:

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_{\mathfrak{g}} &= \mathbf{L}_{\gamma} \cdot \mathbf{L}_{\varphi}; \\ \mathbf{L}_{\mathfrak{g}} &= \mathbf{L}(\mathfrak{g}), \mathbf{L}_{\gamma} = \mathbf{L}(\gamma), \mathbf{L}_{\varphi} = \mathbf{L}(\varphi \mathbf{e}); \\ \mathbf{L}(\mathfrak{g}) &= \mathbf{E} \cos \theta + \frac{1 - \cos \theta}{\theta^2} \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} + \frac{\sin \theta}{\theta} \mathfrak{g} \times \mathbf{E}, \end{aligned} \quad (1)$$

где $\mathbf{L}(\mathfrak{g})$ — тензорная функция векторного аргумента, позволяющая вычислить тензор поворота по заданному вектору Эйлера [12]; \mathbf{e} — единичный орт; θ — длина вектора Эйлера (рис. 2); \mathbf{E} — единичный тензор; \times — знак векторного произведения; \otimes — знак диадного произведения.

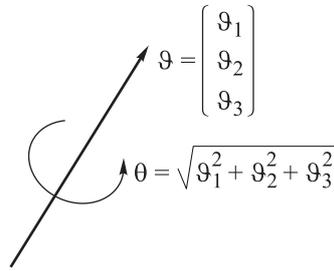


Рис. 2. Вектор Эйлера [12]

Из формул (1) получено правило комбинирования угловых скоростей при наложении двух последовательных поворотов [13]:

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_{\gamma} + \mathbf{L}_{\gamma} \cdot \boldsymbol{\omega}_{\varphi}. \quad (2)$$

Данный подход позволяет точно определить полный поворот с использованием разделенных векторов Эйлера $\varphi \mathbf{e}$ и γ : первый поворот вокруг неподвижного орта \mathbf{e} на угол φ , второй — вокруг поперечной оси, проходящей через вектор γ на угол $|\gamma|$ [11, 12].

Поскольку один из поворотов является плоским, можно воспользоваться формулами кинематики плоского движения:

$$\boldsymbol{\omega}_{\varphi} = \omega_{\varphi} \mathbf{e}; \quad \omega_{\varphi} = \frac{d\varphi}{dt}. \quad (3)$$

С помощью тензора Жилина определяется угловая скорость второго поворота:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega}_{\gamma} &= \mathbf{B}_{\gamma} \cdot \frac{d\gamma}{dt}, \mathbf{B}_{\gamma} = \mathbf{B}(\gamma), \\ \mathbf{B}(\mathfrak{g}) &= \mathbf{E} \frac{\sin \theta}{\theta} + \frac{\theta - \sin \theta}{\theta^3} \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} + \frac{1 - \cos \theta}{\theta^2} \mathfrak{g} \times \mathbf{E}, \end{aligned} \quad (4)$$

где $\mathbf{B}(\mathbf{9})$ — тензорная функция векторного аргумента, позволяющая вычислить тензор Жилина по заданному вектору Эйлера [12].

Подстановка уравнения (2) в выражения (4) с учетом выражений (3) позволяет выразить производную вектора $\boldsymbol{\gamma}$ через угловые скорости [11, 12]:

$$\frac{d\boldsymbol{\gamma}}{dt} = \mathbf{B}_{\boldsymbol{\gamma}}^{-1} \cdot (\boldsymbol{\omega} - \omega_{\varphi} \mathbf{L}_{\boldsymbol{\gamma}} \cdot \mathbf{e}). \quad (5)$$

Проецирование соотношения (5) на продольную ось ротора с учетом условия ортогональности векторов \mathbf{e} и $\boldsymbol{\gamma}$ приводит к тождеству [11, 12]

$$\mathbf{e} \cdot \mathbf{B}_{\boldsymbol{\gamma}}^{-1} \cdot (\boldsymbol{\omega} - \omega_{\varphi} \mathbf{L}_{\boldsymbol{\gamma}} \cdot \mathbf{e}) \equiv 0, \quad (6)$$

из которого можно представить ω_{φ} через полную угловую скорость:

$$\omega_{\varphi} = \frac{\mathbf{e} \cdot \mathbf{B}_{\boldsymbol{\gamma}}^{-1} \cdot \boldsymbol{\omega}}{\mathbf{e} \cdot \mathbf{B}_{\boldsymbol{\gamma}}^{-1} \cdot \mathbf{L}_{\boldsymbol{\gamma}} \cdot \mathbf{e}}. \quad (7)$$

Выражения (3) и (5) с учетом (7) являются искомыми дифференциальными уравнениями кинематики вращательного движения, представленного композицией двух поворотов — φ и $\boldsymbol{\gamma}$.

Расчетная схема. В качестве объекта исследования (рис. 3) выступает жесткий невесомый ротор, у которого на одном конце расположен диск, установленный с эксцентриситетом δ , а на другом — комбинированная опора, позволяющая ротору беспрепятственно вращаться вокруг всех осей. Комбинированная опора состоит из сферического шарнира и двух пружин с угловой жесткостью k , работающих при поперечных перемещениях ротора. В начальный момент времени ($t = 0$) ротор отпускают и начинают разгонять внешним моментом M_z , сохраняющим значение и направление в пространстве независимо от положения ротора.

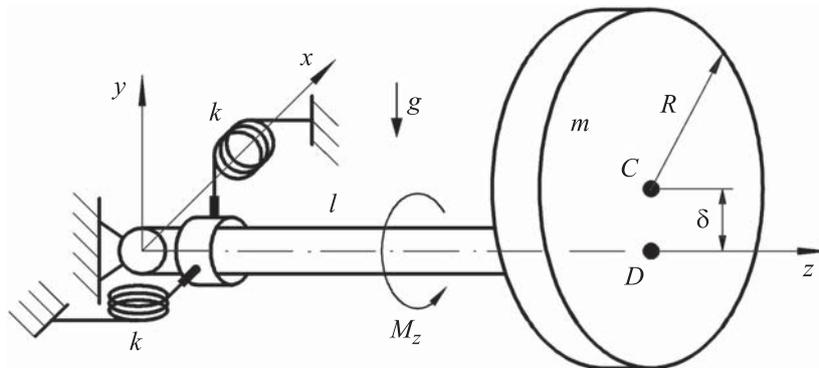


Рис. 3. Расчетная схема жесткого невесомого ротора

Численный расчет проводится при следующих данных: длина вала $l = 0,5$ м; угловая жесткость пружин $k = 2000$ Н·м/рад; масса диска $m = 5$ кг; радиус диска $R = 0,25$ м; эксцентриситет $\delta = 0,005$ м; ускорение свободного падения $g = 9,81$ м/с²; внешний момент для первого варианта $M_z = 1,5$ Н·м, для второго — $M_z = 3,2$ Н·м; интервал времени для первого варианта $t_{\max} = 10$ с, для второго — $t_{\max} = 5$ с.

Полная система уравнений для рассматриваемой задачи включает дифференциальные и алгебраические уравнения. Дифференциальные уравнения содержат уравнение динамики вращательного движения, «роторные» уравнения кинематики больших поворотов и уравнение для вычисления работы внешнего момента:

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{K}}{dt} &= -k\boldsymbol{\gamma} + \mathbf{r}_c \times m\mathbf{g} + M_z\mathbf{e}_z, \\ \frac{d\boldsymbol{\gamma}}{dt} &= \mathbf{B}_\gamma^{-1} \cdot (\boldsymbol{\omega} - \omega_\varphi \mathbf{L}_\gamma \cdot \mathbf{e}), \quad \frac{d\varphi}{dt} = \omega_\varphi, \\ \frac{dA}{dt} &= \boldsymbol{\omega} \cdot (M_z\mathbf{e}_z),\end{aligned}\quad (8)$$

где \mathbf{K} — кинетический момент; \mathbf{r}_c — радиус-вектор центра масс ротора; A — работа, совершаемая моментом M_z ; \mathbf{e}_z — орт координатной оси вращения z (при этом $\mathbf{e} = \mathbf{e}_z$).

Алгебраические уравнения имеют вид

$$\begin{aligned}\mathbf{L}_\gamma &= \mathbf{L}(\boldsymbol{\gamma}), \quad \mathbf{L}_\varphi = \mathbf{L}(\varphi\mathbf{e}), \quad \mathbf{L}_\vartheta = \mathbf{L}_\gamma \cdot \mathbf{L}_\varphi; \\ \mathbf{J}_c &= \frac{mR^2}{4} (\mathbf{e}_x \otimes \mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y \otimes \mathbf{e}_y) + \frac{mR^2}{2} \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_z, \\ [\mathbf{J}_c] &= \frac{mR^2}{4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix};\end{aligned}\quad (9)$$

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_{c0} &= l\mathbf{e}_z + \delta\mathbf{e}_y, \quad \mathbf{r}_c = \mathbf{L}_\vartheta \cdot \mathbf{r}_{c0}, \quad \mathbf{r} = \mathbf{L}_\vartheta \cdot (l\mathbf{e}); \\ \mathbf{J}_0 &= \mathbf{J}_c + m\mathbf{E} \times \times (\mathbf{r}_{c0} \otimes \mathbf{r}_{c0}), \quad \mathbf{J}^{-1} = \mathbf{L}_\vartheta \cdot \mathbf{J}_0^{-1} \cdot \mathbf{L}_\vartheta^T; \\ \boldsymbol{\omega} &= \mathbf{J}^{-1} \cdot \mathbf{K}, \quad \mathbf{B}_\gamma = \mathbf{B}(\boldsymbol{\gamma}), \quad \omega_\varphi = \frac{\mathbf{e} \cdot \mathbf{B}_\gamma^{-1} \cdot \boldsymbol{\omega}}{\mathbf{e} \cdot \mathbf{B}_\gamma^{-1} \cdot \mathbf{L}_\gamma \cdot \mathbf{e}},\end{aligned}$$

где $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y$ — орты координатных осей x и y ; \mathbf{J} — тензор инерции ротора; \mathbf{J}_0 — тензор инерции диска с учетом эксцентриситета при расположении оси ротора строго в направлении оси z (вычисляется по теореме Штейнера); \mathbf{J}_c — тензор инерции диска; \mathbf{r}_{c0} — положение центра масс ротора при $t = 0$.

Для численного решения построенной системы применяют начальные условия вида

$$\begin{aligned} \mathbf{K}(0) = 0, \gamma(0) = 0, \\ \varphi(0) = 0, A(0) = 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Медленный разгон ротора с затягиванием в критический режим движения. При разгоне ротора (рис. 4) модуль угловой скорости сначала растет по линейному закону, а затем в районе критической частоты ($|\omega| \approx 38,8$ рад/с) перестает плавно возрастать. Параллельно наблюдается увеличение амплитуды поперечных колебаний (рис. 5).

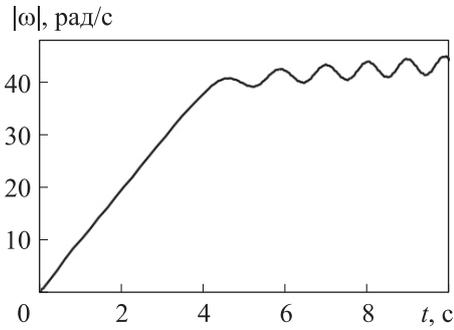


Рис. 4. Разгон ротора при $M_z = 1,5 \text{ Н} \cdot \text{м}$

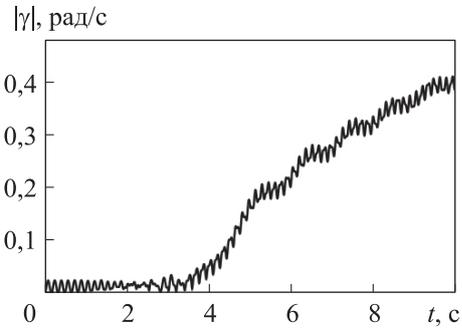


Рис. 5. Поперечные отклонения ротора во время разгона при $M_z = 1,5 \text{ Н} \cdot \text{м}$

Оценка погрешности численного расчета. Правильность численного решения подтверждается в случае выполнения закона сохранения полной энергии системы:

$$E_n = U + T - A(t), \quad (12)$$

где U — потенциальная энергия системы; T — кинетическая энергия системы.

Для вычисления полной энергии системы запишем уравнения потенциальной и кинетической энергии

$$U = \frac{k}{2} \boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\gamma} - \mathbf{r}_c \cdot m\mathbf{g}, \quad T = \frac{\mathbf{K} \cdot \boldsymbol{\omega}}{2}. \quad (13)$$

Закон сохранения энергии выполняется (рис. 6), так как

$$\frac{\Delta E_n}{T(t_{\max})} = 8,61 \cdot 10^{-5}. \quad (14)$$

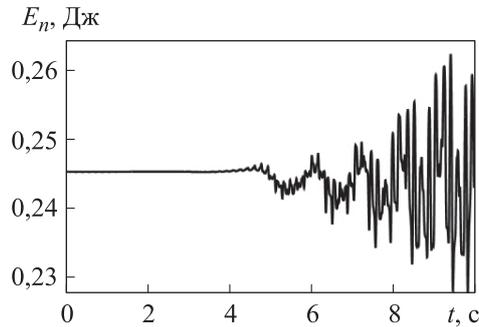


Рис. 6. Полная энергия во время разгона при $M_z = 1,5 \text{ Н} \cdot \text{м}$

Быстрый разгон ротора с проскоком критического режима движения. Как показал предыдущий расчет, ротор действительно может быть затянут в критический режим и не выходить из него. Внешний момент просто накачивает энергию в систему, но не разгоняет ротор. Очевидно, что можно бороться с этим нежелательным явлением, разгоняя ротор более интенсивно. Для этого рассмотрим случай разгона ротора моментом, величина которого намного больше. При интенсивном разгоне ротора (рис. 7) модуль угловой скорости сначала возрастает по линейному закону, затем ненадолго отклоняется от него, а потом снова выходит на линейный закон. Следовательно, при прохождении резонанса энергия системы начинает расходоваться на увеличение поперечных колебаний (рис. 8), а при отдалении от него работа внешнего момента перестает тратиться на возрастание поперечных колебаний.

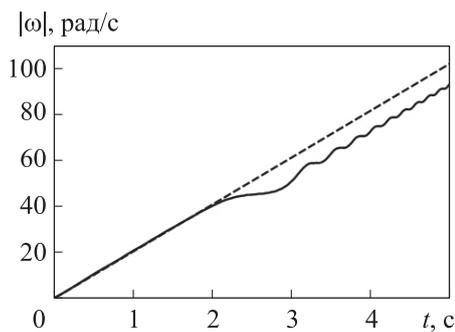


Рис. 7. Разгон ротора при $M_z = 3,2 \text{ Н} \cdot \text{м}$

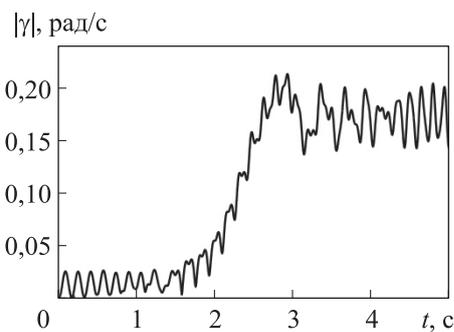


Рис. 8. Поперечные отклонения ротора во время разгона при $M_z = 3,2 \text{ Н} \cdot \text{м}$

Закключение. На основе уравнений «роторного» способа описания больших поворотов были получены результаты, свидетельствующие о перетекании энергии вращения ротора в энергию поперечных колебаний при прохождении резонанса. Было проведено исследование, при

котором стало видно, что при уменьшении внешнего вращающего момента на прохождение резонанса ротора требуется затрачивать больше энергии, т. е. возникает имеющий нелинейную природу эффект «затягивания» ротора в резонанс.

Полученные данные позволяют рекомендовать описанный метод с использованием «роторного» способа описания больших поворотов для разработки алгоритмов разгона роторов.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Аль Мандхари Н. *Влияние элементов системы центробежного компрессора на его обихие ротородинамические характеристики*. Заключительный отчет о дипломной работе школы аэрокосмической промышленности. Кранфилд, университет Кранфилда, 2015, 181 с.
URL: <https://dspace.lib.cranfield.ac.uk/handle/1826/12326?show=full> (дата обращения: 11.03.2024).
- [2] Вьюнов С.А., Хронин Д.В., ред. *Конструкция и проектирование авиационных газотурбинных двигателей*. Москва, Машиностроение, 1989, 368 с.
- [3] Беляев Е.Н., Воробьев А.Г. Ускоренный разгон бустерного насосного агрегата жидкостного ракетного двигателя при его запуске. *Вестник СибГАУ*, 2016, т. 17, № 3. с. 665–672. URL: <https://vestnik.sibsau.ru/arhiv/> (дата обращения: 11.03.2024).
- [4] Чечулин А.Ю., Кривошеев И.А. Методика учета мощности, затрачиваемой на вращение ротора авиационного двигателя, в нелинейной динамической модели запуска авиационного газотурбинного двигателя. *Вестник ПНИПУ. Аэрокосмическая техника*, 2017, № 49, с. 81–94.
DOI: 10.15593/2224-9982/2017.49.08
- [5] Никаноров В.Б., Антаненков А.А., Лискин А.С. и др. Анализ физических явлений, возникающих при разгоне ротора электромеханического преобразователя энергии в магнитных опорах. *Электромагнитное поле и материалы (фундаментальные физические исследования). XXIX Международная конференция: материалы*. Москва, Изд-во МЭИ, 2021, с. 194–200.
- [6] Останин С.Ю., Антаненков А.А., Лискин А.С. и др. Формирование математической модели и метода расчета процессов при разгоне ротора электромеханического преобразователя в магнитных опорах. *Электромагнитное поле и материалы (фундаментальные физические исследования). XXIX Международная конференция: материалы*. Москва, Изд-во МЭИ, 2021, с. 201–207.
- [7] Мясников В.Ю. Исследование динамики авиационного двигателя при обрыве лопатки вентилятора. *Авиационные двигатели*, 2022, № 2 (15), с. 13–26.
URL: https://ciam.ru/journal/archive/nomera-zhurnalov/?SECTION_ID=141 (дата обращения: 19.03.2024).
- [8] Томчин Д.А. *Алгоритмы управления прохождением через зону резонанса в мехатронных вибрационных установках. Автореф. дис. ... канд. техн. наук*. 05.11.16. Санкт-Петербург, Институт проблем машиностроения РАН, 2006, 23 с.
- [9] Попов В.В., Сорокин Ф.Д., Иванников В.В. Разработка конечного элемента гибкого стержня с отдельным хранением накопленных и дополнительных поворотов для моделирования больших перемещений элементов конструкций летательных аппаратов. *Труды МАИ*, 2017, № 92, 28 с. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=76832> (дата обращения: 11.03.2024).

- [10] Низаметдинов Ф.Р., Сорокин Ф.Д. Особенности применения вектора Эйлера для описания больших поворотов при моделировании элементов конструкций летательных аппаратов на примере стержневого конечного элемента. *Труды МАИ*, 2018, № 102, 27 с. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=98753> (дата обращения: 11.03.2024).
- [11] Сорокин Ф.Д., Чжан Х. Кинематически точное разделение большого поворота на осевой и поперечный в задачах роторной динамики. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2018, вып. 10, 14 с. <http://dx.doi.org/10.18698/2308-6033-2018-10-1815>
- [12] Сорокин Ф.Д. Новый способ описания больших поворотов для задач роторной динамики. *Проблемы машиностроения*, 2019, вып. 7, с. 30–37. URL: <https://sciencejournals.ru/view-article/?j=pminm&y=2019&v=0&n=7&a=PMiNM1907013Sorokin>
- [13] Жилин П.А. Векторы и тензоры второго ранга в трехмерном пространстве. Санкт-Петербург, Изд-во СПбГТУ, 1992, 88 с.

Статья поступила в редакцию 26.03.2024

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Кириухин А.А. Численное исследование явления затягивания в резонанс разгоняемого ротора. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2024, вып. 4. <http://dx.doi.org/10.18698/2308-6033-2024-4-2348>

Кириухин Артем Александрович — магистрант кафедры «Прикладная механика», МГТУ им. Н.Э. Баумана. e-mail: arkiryukhin1999@gmail.com

Numerical study of the phenomenon of the accelerated rotor drag into the accelerated rotor resonance

© A.A. Kiryukhin

Bauman Moscow State Technical University,
Moscow, 105005, Russian Federation

Rotor is a mandatory element of most turbomachines. With development of technologies in the mechanical engineering, a need arose for quantitative and qualitative assessment of the rotor system behavior during acceleration, which in turn is accompanied by passing through the system resonance. This paper considers methods for describing large turns using the Euler vector and the Zhilin tensor. The rotor method of describing large turns was tested using the example of a problem involving a rotor accelerating under the external torque influence. The considered system included rigid and weightless shaft, disk installed with the eccentricity and combined support with spherical joint and corner springs. It is shown that when resonance appears during the rotor acceleration, part of the rotational energy is converted into the transverse vibration energy, which leads to a decrease in the rotor rotation speed and an increase in the transverse vibration amplitude. This effect of dragging the rotor into resonance is most dangerous at the low rotor torques, since it takes much more time to pass the resonance, and the risk of rotor failure also increases as a result of the growing vibration amplitude. The proposed method for calculating the rotor system dynamics is recommended in developing the rotor acceleration algorithms, which are used when writing programs for the automated control systems.

Keywords: rotor acceleration, resonance, transverse vibration, Euler vector, large rotation, disk, eccentricity

REFERENCES

- [1] Al Mandhari N. *Influence of Centrifugal Compressor System Components on its General Rotordynamic Characteristics*. School of aerospace, final thesis report. Cranfield, Cranfield University, 2015, 181 p. Available at: <https://dspace.lib.cranfield.ac.uk/handle/1826/12326?show=full> (accessed March 11, 2024).
- [2] Vyunov S.A., Khronin D.V., edit. *Konstruktsiya i proektirovanie aviatsionnykh gazoturbinnnykh dvigateley* [Design and engineering of aviation gas turbine engines]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1989, 368 p.
- [3] Belyaev E.N., Vorobyov A.G. Uskorenniy razgon busternogo nasosnogo agregata zhidkostnogo raketnogo dvigatelya pri ego zapuske [Accelerated unwinding of the rotor booster pump of liquid rocket engines under start-up conditions]. *Vestnik SibGAU — The Siberian Aerospace Journal*, 2016, vol. 17, no. 3, pp. 665–672. Available at: <https://vestnik.sibsau.ru/arhiv/> (accessed March 11, 2024).
- [4] Chechulin A.Y., Krivosheev I.A. Metodika ucheta moshchnosti, zatrachivaemoy na vrashchenie rotora aviatsionnogo dvigatelya, v nelineynoy dinamicheskoy modeli zapuska aviatsionnogo gazoturbinnnogo dvigatelya [Methodology of accounting power expended on the rotation of a rotor of aircraft engine in nonlinear dynamic models of start of the aviation engine]. *Vestnik PNIPU, Aero-kosmicheskaya tekhnika — PNRPU Aerospace Engineering Bulletin*, 2017, vol. 49, pp. 81–94. <https://10.15593/2224-9982/2017.49.08>

- [5] Nikanorov V.B., Antanenkov A.A., Liskin A.S. et al. Analiz fizicheskikh yavleniy, voznikayushchikh pri razgone rotora elektromekhanicheskogo preobrazovatelya energii v magnitnykh oporakh [Analysis of physical phenomena occurring during acceleration of the rotor of an electromechanical energy converter in magnetic supports]. In: *Elektromagnitnoe pole i materialy (fundamentalnye fizicheskie issledovaniya). XXIX Mezhdunarodnaya konferentsiya: materialy* [Electromagnetic field and materials (fundamental physical research). XXIX International Conference: materials]. Moscow, MEI Publ., 2021, pp. 194–200.
- [6] Ostanin S.Y., Antanenkov A.A., Liskin A.S., et al. Formirovanie matematicheskoy modeli i metoda rascheta protsessov pri razgone rotora elektromekhanicheskogo preobrazovatelya v magnitnykh oporakh [Formation of a mathematical model and a method for calculating processes during acceleration of the rotor of an electromechanical converter in magnetic supports]. In: *Elektromagnitnoe pole i materialy (fundamentalnye fizicheskie issledovaniya). XXIX Mezhdunarodnaya konferentsiya: materialy* [Electromagnetic field and materials (fundamental physical research). XXIX International Conference: materials]. Moscow, MEI Publ., 2021, pp. 201–207.
- [7] Myasnikov V.Y. Issledovanie dinamiki aviatsionnogo dvigatelya pri obryve lopatki ventilyatora [Investigation of the aircraft engine dynamics in case of fan blade-out]. *Aviatsionnye dvigateli — Aviation Engines*, 2022, no. 2 (15), pp. 13–26. Available at: https://ciam.ru/journal/archive/nomera-zhurnalov/?SECTION_ID=141 (accessed March 19, 2024).
- [8] Tomchin D.A. *Algoritmy upravleniya prokhozhdeniem cherez zonu rezonansa v mekhatronnykh vibratsionnykh ustanovkakh. Avtoref. dis. ... kand. tekhn. nauk. 05.11.16* [Algorithms for controlling the passage through the resonance zone in mechatronic vibration installations. Author's abstract, Diss. ... Cand. Sc. (Eng.), 05.11.16]. St. Petersburg, Institut Problem Mashinostroeniya RAN Publ., 2006, 23 p.
- [9] Popov V.V., Sorokin F.D., Ivannikov V.V. Razrabotka konechnogo elementa gibkogo sterzhnya s razdelnym khraneniem nakoplenykh i dopolnitelnykh povorotov dlya modelirovaniya peremeshcheniy elementov konstruktsiy letatelnykh apparatov [A flexible rod finite element with separate storage of cumulated and extra rotations for large displacements of aircraft structural parts modeling]. *Trudy MAI*, 2017, iss. 92. Available at: <https://trudymai.ru/published.php?ID=76832> (accessed March 11, 2024).
- [10] Nizametdinov F.R., Sorokin F.D. Osobennosti primeneniya vektora Eylera dlya opisaniya bolshikh povorotov pri modelirovanii elementov konstruktsiy letatelnykh apparatov na primere sterzhnevogo konechnogo elementa [Euler vector application specifics for large turns description while flying vehicles structural elements modeling on the example of a rod finite element]. *Trudy MAI*, 2018, iss. 102. Available at: <https://trudymai.ru/published.php?ID=98753> (accessed March 11, 2024).
- [11] Sorokin F.D., Zhang H. Kinematicheski tochnoe razdelenie bolshogo povorota na osevoy i poperechnyi v zadachakh rotornoy mekhaniki [Kinematically accurate separation of the large rotation into axial and transverse in problems of rotor dynamics]. *Inzhenerny zhurnal: nauka I innovatsii — Engineering Journal: Science and Innovation*, 2018, iss. 10. <https://doi.org/10.18698/2308-6033-2018-10-1815>
- [12] Sorokin F.D. Novyi sposob opisaniya bolshikh povorotov dlya zadach rotornoy dinamiki [A new way to describe large turns for rotary dynamics problems]. *Problemy mashinostroeniya — Engineering and Automation Problems*, 2019, iss. 7, pp. 30–37. Available at: <https://sciencejournals.ru/view-article/?j=pminm&y=2019&v=0&n=7&a=PMiNM1907013Sorokin>

- [13] Zhilin P.A. *Vektory i tenzory vtorogo ranga v trekhmernom prostranstve* [Vectors and tensors of the second rank in three-dimensional space]. St. Petersburg, SPbGTU Publ., 1992, 88 p.

Kiryukhin A.A., Master's Program Student, Department of Applied Mechanics, Bauman Moscow State Technical University. e-mail: arkiryukhin1999@gmail.com