

К задаче анализа динамического поведения линейной механической системы при комплексном высокочастотном воздействии

© О.Н. Тушев, Е.К. Кондратьев

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Российская Федерация

Рассмотрена задача анализа динамики линейной многомерной системы при воздействии на нее аддитивной и параметрической синусоидальных высокочастотных составляющих с некрatными частотами. В соответствии с методом Н.Н. Боголюбова решение представлено в виде суперпозиции медленной и быстрой составляющих с частотами внешних воздействий; исследованы два приближения. Поскольку в целом внешнее воздействие из-за некрatности частот является практически аperiодическим, осреднение высокочастотных гармоник на периоде во втором приближении заменяется повторной сегрегацией движения на медленное и быстрое. Показано, что параметрическая составляющая вызывает повышение жесткости системы, что несколько трансформирует собственные частоты. В силу некрatности частот в системе возникают низкочастотные колебания на комбинационной частоте, равной разнице частот аддитивной и параметрической составляющих. Таким образом, в системе возможны резонансные режимы. В случае равенства частот в решении появляется постоянная составляющая. Решение получено в аналитическом векторном виде, удобном для анализа. Результаты иллюстрируются примером.

Ключевые слова: линейная система, параметрическое и аддитивное воздействия, медленное и быстрое движения, сегрегация, резонанс, постоянная составляющая

Введение. Анализ динамики линейных механических систем при параметрическом и комбинированном параметрическом и аддитивном воздействиях является далеко не новой задачей, опубликованной достаточно широко в различных вариантах. Очень часто эта проблема рассматривается на основе наиболее простой модели в виде физического маятника с подвижным основанием или переменными параметрами.

С одной стороны, это связано с простотой системы, позволяющей применить наглядные аналитические методы решения, а с другой — с ее характерными динамическими свойствами, присущими в той или иной степени всем параметрически возбуждаемым системам. Как правило, математическое описание движения системы осуществляется с использованием уравнений типа уравнения Матье или уравнения Хилла. При этом с определенной степенью условности обозначились два направления исследований: первое — потеря устойчивости и динамика системы при «низкочастотных» воздействиях (параметрический резонанс); второе — динамические эффекты типа повышения

устойчивости при «высокочастотных» вибрациях, следствием которых является вибрационный момент. Влияние момента заметно проявляется при достаточно высокочастотных вибрациях (по отношению к собственной частоте колебаний маятника).

Во многих работах по теории колебаний и динамике конструкций приведены разные задачи с параметрическими воздействиями; наиболее распространенный результат — диаграмма Айнса — Стретта, определяющая границы области неустойчивости для маятника при синусоидальном вертикальном воздействии [1]. Эта задача в [2–4] рассмотрена с более общих позиций.

Задачи анализа динамики линейных и нелинейных систем при наличии двух периодических и двух параметрических синусоидальных воздействий представлены в [5, 6]. Показано, что при этом могут возникать множественные параметрические резонансы на комбинационных частотах.

Противоположный эффект достигается, если вертикальная гармоническая вибрация является высокочастотной. Тогда положение «перевернутого» на 180° маятника, соответствующее максимальной потенциальной энергии, при определенных условиях становится устойчивым. Эту задачу впервые решил П.Л. Капица [7]. Фундаментальные результаты общего характера по повышению устойчивости механических систем при воздействии высокочастотной вибрации получены В.Н. Челомеем [8, 9] на основе асимптотических методов, разработанных Н.Н. Боголюбовым и развитых Ю.Л. Митропольским [10, 11]. Эти результаты распространены на многостепенный маятник [12, 13]. Трехстепенный маятник, убедительно подтверждающий их, исследован в [14].

Представляет самостоятельный интерес родственная задача анализа динамики маятника при высокочастотном перемещении точки подвеса под углом ϑ к вертикальному направлению: $0 < \vartheta < \pi/2$ («косая» вибрация). В результате действия вибрационного момента возникает отклонение («уход») маятника от вертикали. Практически этот эффект наблюдается, например, в виде ложного сигнала (погрешности) стрелочных приборов (стрелка-маятник) и вращения незатянутых гаек [10, 15].

Аналогичный результат в виде постоянной составляющей в решении, а также колебания на комбинационной частоте, как показано в настоящей статье, свойственны и линейным системам общего вида.

За исключением работы [16], результаты в перечисленных исследованиях (и не только в них) получены для гармонических или хотя бы периодических воздействий, которые могут быть разложены в ряд Фурье. Если они представляют собой полигармонику, то частоты ее элементов должны быть кратными. Это условие необходимо,

поскольку для выделения медленной части используется осреднение решения на периоде быстрых колебаний. В данном случае в таком допущении нет необходимости.

Реальные объекты, находящиеся в динамических режимах, очень часто моделируются линейными моделями.

Цель настоящей работы — анализ влияния высокочастотных воздействий с некратными частотами на линейную механическую систему, а также определение эффектов, которые могут возникнуть в результате этого.

Решение задачи. Полагаем, что комплексное воздействие приложено к i -му элементу. Тогда считаем, что динамика системы определяется уравнением

$$M\ddot{X} + (C + \mu I_{ii} c_{ii} \cos p_1 t) X = I_i a \cos p_2 t,$$

или в другом виде,

$$\ddot{X} + R(E + B_i \cos p_1 t) X = F_i \cos p_2 t. \quad (1)$$

Здесь M, C — симметричные и положительно определенные матрицы масс и жесткости; X — вектор обобщенных координат; μ — малый параметр; I_{ii}, I_i — квадратная матрица и вектор со всеми нулевыми элементами, за исключением элементов с номерами « ii » и « i », равными единице, которые названы в работе матричной и векторной единицами (их использование позволяет формально представить аддитивное и параметрическое воздействия в виде скалярных сомножителей, что существенно упрощает преобразования и отчетливо выявляет суть изучаемых явлений); c_{ii} — диагональный элемент матрицы C ; p_1, p_2 — частоты внешнего воздействия; t — время; a — амплитуда аддитивного воздействия; $R = M^{-1}C$; E — единичная матрица; $B_i = \mu c_{ii} C^{-1} I_{ii}$; $F_i = M^{-1} I_i a$.

Заметим, что векторное уравнение (1) структурно полностью совпадает со скалярным линеаризованным уравнением для маятника с «косой» вибрацией точки подвеса [16], которое является уравнением Матве с аддитивным воздействием.

Считается, что $\omega_k \ll p_1, p_2$, где $\omega_k, k = \overline{1, n}$ — собственные частоты системы.

Задавать начальные условия для уравнения (1) нет необходимости, поскольку общее решение определяет только переходные процессы, затухающие из-за диссипации энергии в реальных системах и не оказывающие влияния на эффекты, которые свойственны параметрически возбуждаемым системам.

В соответствии с методом Н.Н. Боголюбова представим частное решение в виде суммы медленного и быстрого движений:

$$X = X_0 + \Delta X. \quad (2)$$

Подставим решение (2) в уравнение (1):

$$\ddot{X}_0 + \Delta \ddot{X} + RX_0 + RB_i X_0 \cos p_1 t + R\Delta X + RB_i \Delta X \cos p_1 t = F_i \cos p_2 t. \quad (3)$$

В первом приближении считаем, что $\Delta X = 0$, и потребуем, чтобы равенство (3) выполнялось для медленных и быстрых членов раздельно, тогда

$$\ddot{X}_0 + RX_0 = 0,$$

$$\Delta \ddot{X} = F_i \cos p_2 t - RB_i X_0 \cos p_1 t. \quad (4)$$

Проинтегрируем соотношение (4) дважды, считая при этом, что $X_0 \cong \text{const}$:

$$\Delta X = \frac{1}{p_1^2} RB_i X_0 \cos p_1 t - \frac{1}{p_2^2} F_i \cos p_2 t. \quad (5)$$

Во втором приближении подставим ΔX и $\Delta \ddot{X}$ из (4), (5) в (3):

$$\begin{aligned} & \ddot{X}_0 + F_i \cos p_2 t - RB_i X_0 \cos p_1 t + RX_0 + RB_i X_0 \cos p_1 t + \\ & + R \left(\frac{1}{p_1^2} RB_i X_0 \cos p_1 t - \frac{1}{p_2^2} F_i \cos p_2 t \right) + \\ & + RB_i \left(\frac{1}{p_1^2} RB_i X_0 \cos p_1 t - \frac{1}{p_2^2} F_i \cos p_2 t \right) \cos p_1 t = F_i \cos p_2 t. \end{aligned} \quad (6)$$

В результате выделения в уравнении (6) «медленных» членов и простых преобразований получим уравнение медленного движения

$$\ddot{X}_0 + R \left[E + \frac{1}{2p_1^2} B_i R B_i \right] X_0 = \frac{1}{2p_2^2} RB_i F_i \cos(p_2 - p_1)t. \quad (7)$$

Не представляет сложности получить вынужденное медленное движение в виде

$$X_0 = \frac{1}{2p_2^2} \left\{ R \left[E + \frac{1}{2p_1^2} B_i R B_i \right] - (p_2 - p_1)^2 E \right\}^{-1} \cdot RB_i F_i \cos(p_2 - p_1)t.$$

Из (7) следует, что в системе возникают колебания с комбинационной частотой $p_2 - p_1$; при ее совпадении с какой-либо собственной частотой возникает резонансный режим. Вибрационная составляющая

в левой части уравнения повышает жесткость системы, что приводит к некоторой трансформации собственного спектра системы. При совпадении частот $p_1 = p_2 = p$ вместо низкочастотных колебаний возникает постоянная составляющая в перемещении \tilde{X}_0 :

$$\tilde{X}_0 = \frac{1}{2p^2} \left[E + \frac{1}{2p^2} B_i R B_i \right]^{-1} \cdot B_i F_i. \quad (8)$$

Распространим результаты на систему с диссипацией энергии. Для этого в уравнение (1) необходимо добавить член $Q\dot{X}$, где матрица коэффициентов Q также симметрична и положительно определена, поскольку условно выбирается обычно пропорциональной матрице масс или жесткости.

Схема решения остается прежней, но при этом соотношение для быстрого движения в первом приближении (4) преобразуется к виду

$$\Delta\ddot{X} + Q\Delta\dot{X} = F_i \cos p_2 t - R B_i X_0 \cos p_1 t. \quad (9)$$

Понизив порядок уравнения (9) и проделав известные необходимые преобразования, получим решение для вынужденного быстрого движения в виде

$$\Delta X = \frac{1}{p_1} L_1 \cos p_1 t X_0 - \frac{1}{p_1} H_1 \sin p_1 t X_0 - \frac{1}{p_2} L_2 \cos p_2 t + \frac{1}{p_2} H_2 \sin p_2 t,$$

где

$$\begin{aligned} L_1 &= \left(p_1 E + \frac{1}{p_1} Q^2 \right)^{-1} \cdot R I_{ii}, \\ L_2 &= \left(p_2 E + \frac{1}{p_2} Q^2 \right)^{-1} \cdot F_i, \\ H_1 &= \frac{1}{p_1} Q \left(p_1 E + \frac{1}{p_1} Q^2 \right)^{-1} \cdot R I_{ii}, \\ H_2 &= \frac{1}{p_2} Q \left(p_2 E + \frac{1}{p_2} Q^2 \right)^{-1} \cdot F_i. \end{aligned}$$

Теперь, выполнив аналогичные предыдущему варианту операции, получим уравнение для медленного движения во втором приближении:

$$\begin{aligned} \ddot{X}_0 + Q\dot{X}_0 + R \left[E + \frac{1}{2p_1} B_i L_1 \right] X_0 &= \frac{1}{2p_2} R B_i [H_2 \sin(p_2 - p_1)t - \\ &- L_2 \cos(p_2 - p_1)t]. \end{aligned} \quad (10)$$

Из уравнения (10) при $p_1 = p_2 = p$ получается постоянное решение

$$\tilde{X}_0 = -\frac{1}{2p} \left[E + \frac{1}{2p} B_i L_1 \right]^{-1} \cdot B_i L_2. \quad (11)$$

При численной реализации использование таких векторов и матриц, как I_{ii}, I_i с «почти нулевыми» элементами, порождает очень много «паразитных» операций умножения на ноль. Этот недостаток легко исправить, если модифицировать матричную алгебру с учетом такой особенности. Например, несложно показать, что

$$I_{ii} A I_{jj} = a_{ij} I_{ij}, \quad A I_{ii} B = A_i B_j,$$

где $A = [a_{ij}]_1^n$, $B = [b_{ij}]_1^n$; A_i — i -й столбец; B_j — j -я строка.

Получение и сопоставление результатов. В качестве примера рассмотрим модель системы с двумя степенями свободы (рис. 1).

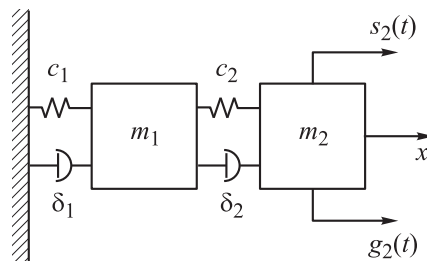


Рис. 1. Модель системы с двумя степенями свободы

Ко второй массе приложены аддитивное и параметрическое воздействия, которые заданы следующими функциями:

$$g_2(t) = \mu x_2(t) \cos p_1 t;$$

$$s_2(t) = A \cos p_2 t.$$

Выбраны численные значения следующих параметров системы: жесткость первой и второй пружины $c_1 = 20$ Н/м, $c_2 = 10$ Н/м соответственно; масса первого и второго тела $m_1 = 3$ кг, $m_2 = 5$ кг; амплитуда аддитивного воздействия $\nu = 1000$; малый параметр $\mu = 0,2$; коэффициенты диссипации $\delta_1 = \delta_2 = 2,5$.

Полученное приближенное решение $x_{0i}(t)$ ($i = 1, 2$) сопоставлялось с результатами численного моделирования $x_i(t)$ исходного уравнения движения. Расчеты осуществлялись на основе программного пакета Wolfram Mathematica. Приведенные на рис. 2 и 3 графики движения $x_{0i}(t)$ изображены сплошной линией, а $x_i(t)$ — пунктирной.

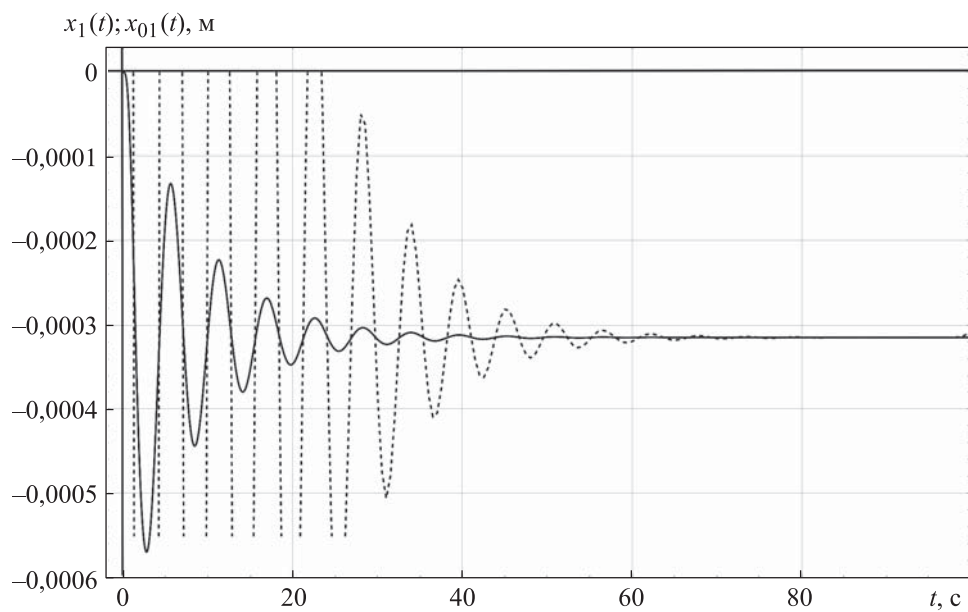


Рис. 2. Графики движения первого тела

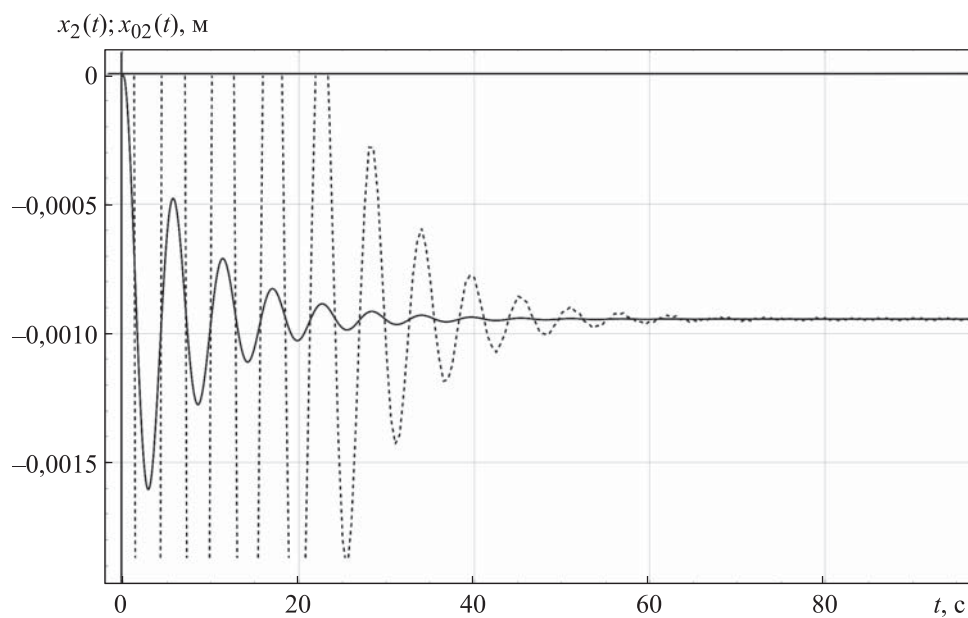


Рис. 3. Графики движения второго тела

Анализ проводился для следующих вариантов.

1. *Режим совпадения частот* $p_1 = p_2 = 11$ Гц (см. рис. 2, 3). После затухания переходных процессов получены постоянные составляющие решения \tilde{x}_1, \tilde{x}_2 :

$$\begin{aligned} \tilde{x}_{01} &= -3,139 \cdot 10^{-4} \text{ м}; \quad \tilde{x}_{02} = -9,419 \cdot 10^{-4} \text{ м}; \\ \tilde{x}_1 &= -3,074 \cdot 10^{-4} \text{ м}; \quad \tilde{x}_2 = -9,334 \cdot 10^{-4} \text{ м} \end{aligned}$$

с ошибками $\Delta_1 = 2,12 \%$, $\Delta_2 = 0,91 \%$.

2. *Резонансный режим*. С учетом того, что внешнее параметрическое воздействие трансформирует собственный спектр системы, собственные частоты

$$\omega_0 = \sqrt{R \left[E + \frac{1}{2p_1^2} B_i R B_i \right]} = \begin{bmatrix} 0,225 \\ 0,503 \end{bmatrix} \text{ Гц.}$$

В данном случае частотам внешнего воздействия задаются следующие значения: $p_1 = 11$ Гц, $p_2 = p_1 + (\omega_0)_{21}$. Рассмотрение режима на частоте $(\omega_0)_{11}$ приводит к схожим результатам, приведенным в виде графиков движения на рис. 4, 5, где $x_{01}(t)$ представлен сплошной линией, $x_1(t)$ — пунктирной.

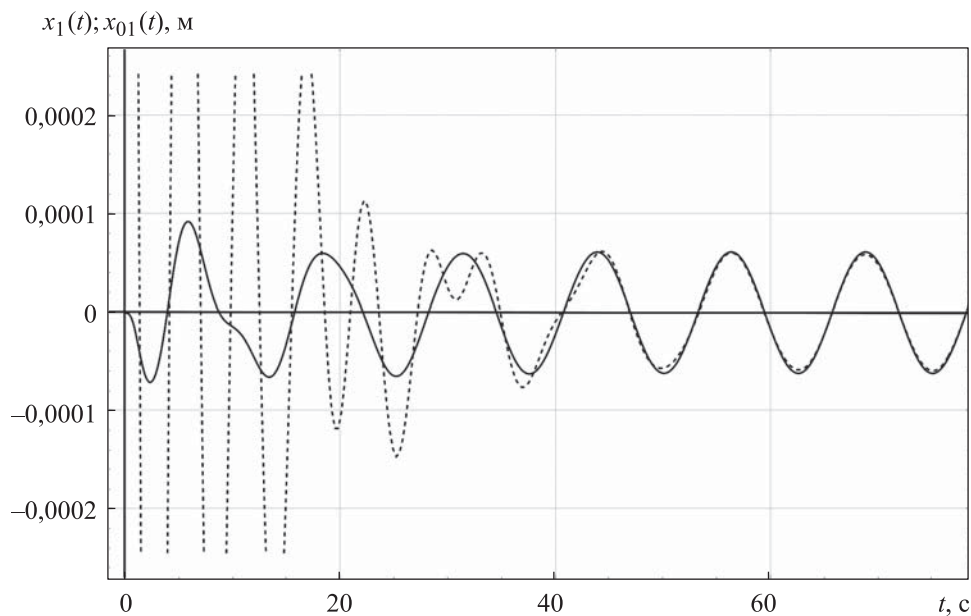


Рис. 4. Графики движения первого тела

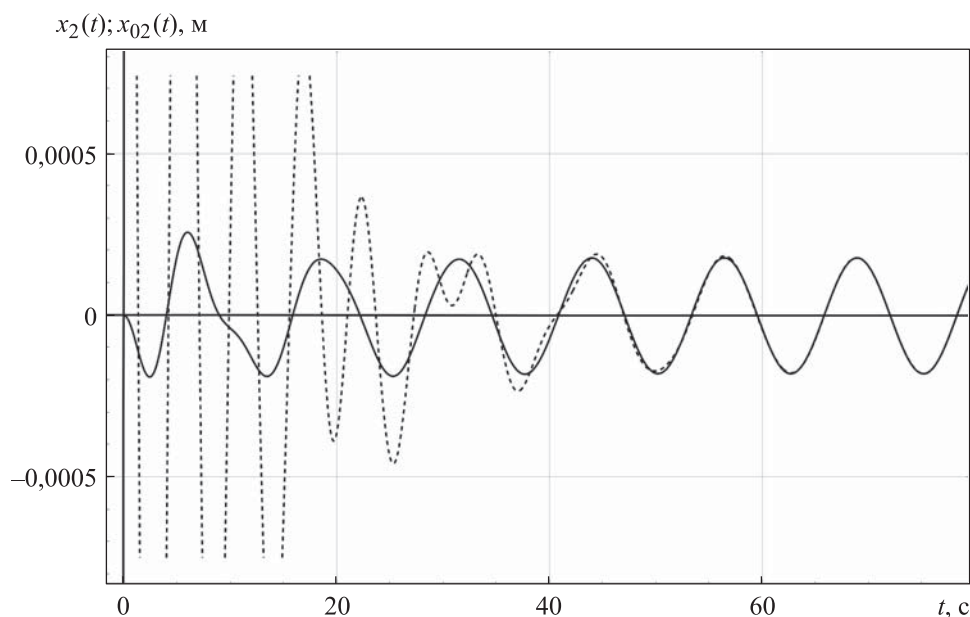


Рис. 5. Графики движения второго тела

После затухания переходных процессов средние ошибки по амплитудным значениям составляют: $\Delta_1 = 3,2\%$, $\Delta_2 = 1,2\%$.

Заключение. При реализации метода Н.Н. Боголюбова во втором приближении осреднение по периоду быстрых колебаний можно заменить повторной сегрегацией по частотам. Введение в рассмотрение матричной и векторной единиц позволило получить решение в явной и удобной для вычисления форме. При некратных частотах воздействий в системе возникают колебания на комбинационной частоте и возможны резонансные явления; при равенстве частот решение вырождается в постоянное во времени.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Ильин М.М., Колесников К.С., Саратов Ю.С. *Теория колебаний*. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2003, 272 с.
- [2] Сейранян А.П., Ябуно Х., Цумото К. Неустойчивость и периодические движения физического маятника с колеблющейся точкой подвеса. *Доклады Академии наук*, 2005, т. 404, № 2, с. 192–197.
- [3] Seyranian A.P., Mailybaev A.A. *Multiparameter Stability with Mechanical Applications*. Singapore, etc. World Scientific, 2004, 420 p.
- [4] Yaluno H., Miura M., Aoshima N.J. *Sound and Vibration*, 2004, vol. 273, pp. 293–513.
- [5] Челомей С.В. Нелинейные колебания с параметрическим возбуждением. *Изв. АН СССР. Механика твердого тела*, 1977, № 3, с. 44–53.
- [6] Челомей С.В. О динамической устойчивости прямого трубопровода, нагруженного переменной осевой силой при протекании через него пульсирующей жидкости. *Изв. АН РФ. Механика твердого тела*, 1998, № 6, с. 175–184.

- [7] Капица П.Л. Динамическая устойчивость маятника при колеблющейся точке подвеса. *Журнал эксперим. и теор. физики*, 1951, т. 21, вып. 5, с. 588–597.
- [8] Челомей В.Н. О возможности повышения устойчивости упругих систем при помощи вибраций. *Докл. АН СССР*, 1956, т. 110, № 3, с. 345–347.
- [9] Челомей В.Н. *Избранные труды*. Москва, Машиностроение, 1989, 335 с.
- [10] Боголюбов Н.Н., Садовников Б.И. Об одном варианте метода усреднения. *Вестник МГУ. Сер. 3, физика, астрономия*, 1961, № 3, с. 24–34.
- [11] Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. *Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний*. Москва, Наука, 1975, 412 с.
- [12] Стрижак Т.Г. *Методы исследования динамических систем типа «маятник»*. Алма-Ата, Наука, 1981, с. 13.
- [13] Челомей С.В. О двух задачах динамической устойчивости колебательных систем, поставленных академиками П.Л. Капицей и В.Н. Челомеем. *Изв. РАН. Механика твердого тела*, 1999, № 6, с. 159–166.
- [14] Челомей В.Н. Парадоксы в механике, вызываемые вибрацией. *Докл. АН СССР (ДАН СССР)*, 1983, т. 270, № 1, с. 62–67.
- [15] Иориш Ю.И. *Виброметрия*. Москва, Наука, 1963, 753 с.
- [16] Тушев О.Н., Чернов Д.С. Квазистатический «уход» маятника при возмущении точки подвеса высокочастотной полигармонической вибрацией с некрратными частотами. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*, 2021, № 5, с. 4–16.

Статья поступила в редакцию 28.02.2024

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Тушев О.Н., Кондратьев Е.К. К задаче анализа динамического поведения линейной механической системы при комплексном высокочастотном воздействии. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2024, вып. 4.
<http://dx.doi.org/10.18698/2308-6033-2024-4-2347>

Тушев Олег Николаевич — д-р техн. наук, профессор кафедры «Аэрокосмические системы» МГТУ им. Н.Э. Баумана. e-mail: sm2aerospace@yandex.ru

Кондратьев Евгений Константинович — студент 5-го курса кафедры «Аэрокосмические системы» МГТУ им. Н.Э. Баумана. e-mail: kondratyev@eugenek.ru

On the problem of analyzing the linear mechanical system dynamic behavior exposed to the high-frequency action

© O.N. Tushev, E.K. Kondratyev

Bauman Moscow State Technical University,
Moscow, 105005, Russian Federation

The paper considers a problem of analyzing the linear multidimensional system dynamics exposed to action of the additive and parametric sinusoidal high-frequency components with the aliquant frequencies. In accordance with the N.N. Bogolyubov method, solution is presented as superposition of the slow and fast components with the external influence frequencies; two approximations are studied. Since external influence is practically aperiodic in general due to the frequencies non-multiplicity, the high-frequency harmonics averaging over a period in the second approximation is replaced by the motion repeated segregation into the slow and fast. It is shown that parametric component causes an increase in the system rigidity, which somewhat transforms the natural frequencies. Due to the aliquant frequencies in the system, low-frequency oscillations arise at the combination frequency equal to the difference in additive and parametric component frequencies. Thus, resonant modes are possible in the system. If the frequencies are equal, a constant component appears in the solution. Solution is obtained in the analytical vector form, which is convenient in the analysis. The results are illustrated with an example.

Keywords: linear system, parametric and additive action, slow and fast motion, segregation, resonance, constant component

REFERENCES

- [1] Ilyin M.M., Kolesnikov K.S., Saratov Yu.S. *Teoriya kolebaniya* [Theory of oscillations]. Moscow, BMSTU Publ., 2003, 272 p.
- [2] Seyranian A.P., Yabuno H., Tsumoto K. Neustoychivost i periodicheskie dvizheniya fizicheskogo mayatnika s koleblyuyushcheysya tochkoj podvesa [Instability and periodic motion of a physical pendulum with the oscillating suspension point]. *Doklady Akademii nauk — Proceedings of the Russian Academy of Sciences (RAS)*, 2005, vol. 404, no. 2, pp. 192–197.
- [3] Seyranian A.P., Mailybaev A.A. *Multiparameter Stability with Mechanical Applications*. Singapore, etc., World Scientific, 2004, 420 p.
- [4] Yaluno H., Miura M., Aoshima N.J. *Sound and Vibration*, 2004, vol. 273, pp. 293–513.
- [5] Chelomey S.V. Nelineynye kolebaniya s parametricheskim vozbuzhdeniem [Non-linear oscillations with parametric excitation]. *Izv. AN SSSR. Mekhanika tverdogo tela — Mechanics of Solids. A Journal of the USSR Academy of Sciences*, 1977, no. 3, pp. 44–53.
- [6] Chelomey S.V. O dinamicheskoy ustoychivosti pryamogo truboprovoda, nagruzhennogo peremennoy osevoj siloy pri protekanii cherez nego pulsiruyushchey zhidkosti [On dynamic stability of straight pipeline with pulsing liquid inside under effect of variable axial force]. *Izv. RAN. Mekhanika tverdogo tela — Mechanics of Solids. A Journal of the Russian Academy of Sciences*, 1998, no. 6, pp. 175–184.
- [7] Kapitsa P.L. Dinamicheskaya ustoychivost mayatnika pri koleblyushcheysya tochke podvesa [Dynamic stability of a pendulum with oscillating suspension point]. *Zhurnal eksper. i teor. fiziki — Journal of Experimental and Theoretical Physics*, 1951, vol. 21, iss. 5, pp. 588–597.

- [8] Chelomey V.N. O vozmozhnosti povysheniya ustoychivosti uprugikh sistem pri pomoshchi vibratsiy [On possibility of raising elastic system stability by means of vibrations]. *Doklady Akademii nauk — Proceedings of the Russian Academy of Sciences (RAS)*, 1956, vol. 110, no. 3, pp. 345–347.
- [9] Chelomey V.N. *Izbrannye trudy* [Selected works]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1989, 335 p.
- [10] Bogolyubov N.N., Sadovnikov B.I. Ob odnom variante metoda usredneniya [On one version of averaging method]. *Vestnik MGU. Ser. 3, fizika, astronomiya — Moscow University Physics Bulletin*, 1961, no. 3, pp. 24–34.
- [11] Bogolyubov N.N., Mitropolskiy Yu.A. *Asimptoticheskie metody v teorii nelineynykh kolebaniy* [Asymptotic method in nonlinear oscillations theory]. Moscow, Nauka Publ., 1975, 412 p.
- [12] Strizhak T.G. *Metody issledovaniya dinamicheskikh sistem tipa “mayatnika”* [Research technique for dynamic systems of pendulum type]. Alma-Ata, Nauka Publ., 1981, p. 13.
- [13] Chelomey S.V. O dvukh zadachyakh dinamicheskoy ustoychivosti kolebatelnykh sistem, postavlennykh akademikami P.L. Kapitsey i V.N. Chelomeyem [On two problems of dynamic stability of oscillating systems, put on by P.L. Kapitsa and V.N. Chelomey academicians]. *Izv. RAN. Mekhanika tverdogo tela — Mechanics of Solids. A Journal of the Russian Academy of Sciences*, 1999, no. 6, pp. 159–166.
- [14] Chelomey V.N. Paradoksy v mekhanike, vzyvaemye vibratsiy [Paradoxes in mechanics caused by vibration]. *Doklady Akademii nauk — Proceedings of the Russian Academy of Sciences (RAS)*, 1983, vol. 270, no. 1, pp. 62–67.
- [15] Iorish Yu.I. *Vibrometriya* [Vibrometry]. Moscow, Nauka Publ., 1963, 753 p.
- [16] Tushev O.N., Chernov D.S. Kvizisticheskiy “ukhod” mayatnika pri vozmushchenii tochki podvesa vysokochastotnoy poligarmonicheskoy vibratsiy s nekratnymi chastotami [Pendulum quasi-static drift effect at suspension point excitation by high-frequency polyharmonic multiple frequency vibration]. *Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Ser. Estestvennye nauki — Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Series Natural Sciences*, 2021, no. 5, pp. 4–16.

Tushev O.N., Dr. Sc. (Eng.), Professor, Department of Aerospace Systems, Bauman Moscow State Technical University. e-mail: sm2aerospace@yandex.ru

Kondratyev E.K., 5th year Student, Department of Aerospace Systems, Bauman Moscow State Technical University. e-mail: kondratyev@eugenek.ru