

Методика определения расположения межпанельных кронштейнов корпуса космического аппарата с использованием модифицированного метода SIMP топологической оптимизации

© А.А. Боровиков, О.Н. Тушев

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Российская Федерация

При проектировании космических аппаратов (КА) одним из важнейших требований является выполнение условия, обеспечивающего динамическую совместимость КА с ракетой-носителем, которое заключается в ограничении первых основных тонов собственных колебаний КА. Одним из способов удовлетворения этого ограничения может быть выбор оптимальных мест установки межпанельных кронштейнов, соединяющих тепловые сотовые панели корпуса КА, и их количество. «Ручной» подбор местоположения межпанельных кронштейнов крайне неэффективен и может занять много времени, поэтому авторами ранее была предложена методика, в которой используется метод SIMP топологической оптимизации. Суть методики — моделирование области возможной установки межпанельных кронштейнов конечными элементами шестигранной формы и дальнейшее проведение топологической оптимизации. Однако применение стандартной формулировки метода SIMP значительно увеличивает число требуемых проектных переменных (не менее трех на один кронштейн), а следовательно, и время расчета. Предложена модификация метода SIMP, позволяющая использовать минимальное число проектных переменных (одна переменная на один кронштейн). Для иллюстрации эффективности данной разработки на примере тестовой задачи проводится сравнение результатов, полученных с помощью стандартного и модифицированного вариантов метода SIMP.

Ключевые слова: метод SIMP, топологическая оптимизация, оптимизация конструкции, требования динамической совместимости

Введение. При создании автоматических космических аппаратов (КА) одной из важнейших задач является разработка конструктивно-силовой схемы (КСС) корпуса КА с учетом требований динамической совместимости КА с ракетой-носителем (РН) [1], которые заключаются в ограничении основных (с наибольшей модальной массой) частот собственных колебаний для закрепленного КА по штатным узлам крепления к адаптеру [2, 3]. Невыполнение данных требований приводит к необходимости дополнительного моделирования системы управления РН с учетом упругости КА, результатом которого может стать изменение штатных настроек системы управления РН. Это увеличивает время проектирования и может снизить надежность запуска.

В настоящей работе рассматривается типовой корпус КА, состоящий из тепловых сотовых панелей (ТСП), соединенных между собой

межпанельными кронштейнами. В качестве определяемых параметров КСС корпуса КА выбраны количество и места установки межпанельных кронштейнов. Исключение из рассмотрения характеристик ТСП обусловлено следующими причинами:

1) в большинстве случаев толщина ТСП определяется размером тепловых труб, характеристики сечения которых получают в результате теплового расчета системы обеспечения теплового режима (СОТР) и выбирают из сортамента производителя ТСП, при этом если толщина ТСП все же недостаточная, выбирают следующую из размерного ряда, предлагаемого производителем ТСП;

2) как правило, варьировать характеристики сот (форму и размеры ячейки) не имеет смысла ввиду ограниченности выбора сот у поставщика ТСП, а также дешевизны стандартных сот.

Особенностью разработки КА на ранних стадиях проектирования является высокая степень неопределенности и изменчивости исходных данных (как правило, изменяются компоновка, конструкция и состав приборов), что приводит к необходимости использования методик, позволяющих оперативно получать решения по КСС КА.

Один из способов сокращения времени разработки КСС КА — применение методов конечно-элементной оптимизации, в частности топологической оптимизации, которые дают возможность в короткий срок создать КСС КА на базе достаточно строгой и обоснованной формализации.

Авторами уже была представлена методика определения мест установки межпанельных кронштейнов с использованием топологической оптимизации, реализованная в программном комплексе MSC.Nastran [4]. Однако из-за особенностей метода SIMP [5], при котором каждому конечному элементу (КЭ) из проектной области соответствует своя проектная переменная (рис. 1, а), каждый межпанельный кронштейн моделируется минимум тремя проектными переменными. Это приводит к повышению размерности задачи оптимизации и, как следствие, к увеличению времени расчета. Кроме того, возникают некоторые трудности интерпретации результатов, поскольку проектные переменные для одного кронштейна могут иметь разные значения.

Цель данной статьи — разработка модификации метода SIMP топологической оптимизации для повышения эффективности методики [4], предназначенной для определения расположения межпанельных кронштейнов корпуса КА.

Научная новизна работы заключается в модификации метода SIMP, которая позволяет сократить количество проектных переменных в рассматриваемой задаче и, как следствие, ускорить процесс получения решения по КСС корпуса КА.

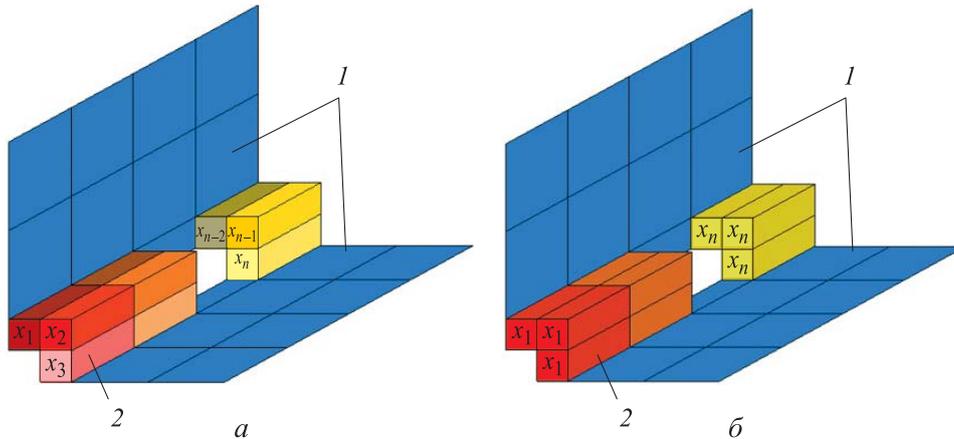


Рис. 1. Схема моделирования кронштейнов при использовании стандартной (а) и модифицированной (б) формулировки метода SIMP: 1 — ТСП; 2 — места установки межпанельных кронштейнов

Описание методики. Методика построена таким образом, чтобы при изменении исходных данных корректировка конечно-элементной модели (КЭМ) была минимальной, что дает возможность значительно ускорить выдачу рекомендаций по КСС корпуса КА в условиях высокой неопределенности на начальных этапах проектирования. Получаемые результаты используются для определения нагрузок и дальнейшей разработки конструкции межпанельных кронштейнов.

Области возможной установки межпанельных кронштейнов моделируются КЭ типа HEX [6], где каждый кронштейн описывается простой геометрией и состоит из минимального числа КЭ. Далее проводится топологическая оптимизация этой области, результатом которой являются места установки межпанельных кронштейнов.

Как уже отмечалось, отличие данной методики от описанной в работе [4] заключается в том, что каждый межпанельный кронштейн моделируется не несколькими проектными переменными (см. рис. 1, а), а одной (рис. 1, б), что позволяет существенно сократить размерность задачи оптимизации. Это достигается путем модификации метода SIMP.

Согласно методу SIMP, проектные переменные топологической оптимизации связаны со свойствами материала КЭ из проектной области следующими зависимостями:

$$\begin{aligned} \rho_i &= x_i \rho_{mat}; \quad i = 1, 2, \dots, n, \\ E_i &= x_i^p E_{mat}, \end{aligned} \tag{1}$$

где ρ_i — плотность материала КЭ; i — индекс, обозначающий номер проектной переменной; x_i — i -я проектная переменная; ρ_{mat} —

плотность материала кронштейнов; n — число проектных переменных; E_i — модуль упругости КЭ; p — параметр штрафа; E_{mat} — модуль упругости материала кронштейнов.

Задача заключается в минимизации целевой функции, которая для модифицируемой формулировки SIMP записывается в виде

$$m(X) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{s_i} \rho_i V_{ij} = \rho_{mat} \sum_{i=1}^n \left(x_i \sum_{j=1}^{s_i} V_{ij} \right), \quad (2)$$

где m — масса проектной области; $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}^T$ — вектор проектных переменных; s_i — число КЭ в i -й группе КЭ; V_{ij} — объем j -го КЭ в i -й группе КЭ, соответствующих i -й проектной переменной.

Для удовлетворения требований по частотам основных тонов собственных колебаний КА ограничения задаются по следующим формулам:

$$g_{kl}(X) = \bar{\xi}_t^{kl} - \xi_t^{kl}(X) \leq 0, \quad kl = 1, 2, \dots, ql, \quad t \leq N; \quad (3)$$

$$g_{ku}(X) = \xi_t^{ku}(X) - \bar{\xi}_t^{ku} \leq 0, \quad ku = 1, 2, \dots, qu, \quad t \leq N, \quad (4)$$

где индексы kl, ku — номера ограничений на частоты собственных колебаний снизу и сверху соответственно; t — номер тона, на который накладываемся ограничение; $\bar{\xi}_t^{kl}, \bar{\xi}_t^{ku}$ — ограничения на собственное значение t -го тона, соответствующего kl -му и ku -му ограничению соответственно; ξ_t^{kl}, ξ_t^{ku} — собственные значения t -го тона, на которые накладываются kl -е и ku -е ограничения соответственно; ql, qu — число нижних и верхних ограничений соответственно; N — число степеней свободы КЭМ.

Для решения поставленной задачи оптимизации воспользуемся методами нелинейного программирования [7–9]. Функцию Лагранжа запишем в виде

$$L(X) = m(X) + \sum_{kl=1}^{ql} \lambda_{kl} g_{kl}(X) + \sum_{ku=1}^{qu} \lambda_{ku} g_{ku}(X), \quad (5)$$

где $\lambda_{kl}, \lambda_{ku}$ — неопределенные множители Лагранжа.

Для задачи (5) необходимые условия Каруша — Куна — Таккера [10–12] запишем в следующем виде:

$$\frac{\partial L(X^*)}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad (6)$$

$$\lambda_{kl} g_{kl} (X^*) = 0, \quad kl = 1, 2, \dots, ql; \quad (7)$$

$$\lambda_{ku} g_{ku} (X^*) = 0, \quad ku = 1, 2, \dots, qu; \quad (8)$$

$$\lambda_{kl} \geq 0, \quad kl = 1, 2, \dots, ql; \quad (9)$$

$$\lambda_{ku} \geq 0, \quad ku = 1, 2, \dots, qu, \quad (10)$$

где X^* — оптимальная точка в пространстве проектных переменных.

Подставив в формулу (6) выражение (5), получим

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = \frac{\partial m}{\partial x_i} + \sum_{kl=1}^{ql} \lambda_{kl} \frac{\partial g_{kl}}{\partial x_i} + \sum_{ku=1}^{qu} \lambda_{ku} \frac{\partial g_{ku}}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (11)$$

В выражении (11) перенесем первое слагаемое в правую часть и поделим обе части равенства на него с обратным знаком. Тогда получим критерий оптимальности в виде

$$A = -\frac{1}{\frac{\partial m}{\partial x_i}} \left(\sum_{kl=1}^{ql} \lambda_{kl} \frac{\partial g_{kl}}{\partial x_i} + \sum_{ku=1}^{qu} \lambda_{ku} \frac{\partial g_{ku}}{\partial x_i} \right) = 1. \quad (12)$$

Определим производные, входящие в уравнение (12). Вначале продифференцируем выражение (2) по проектным переменным и получим

$$\frac{\partial m}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\rho_{mat} \sum_{i=1}^n \left(x_i \sum_{j=1}^{s_i} V_{ij} \right) \right) = \rho_{mat} \sum_{j=1}^{s_i} V_{ij}. \quad (13)$$

Для того чтобы определить производные ограничений, продифференцируем выражения (3) и (4):

$$\frac{\partial g_{kl}}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\bar{\xi}_t^{kl} - \xi_t^{kl} (X) \right) = -\frac{\partial \xi_t^{kl}}{\partial x_i}; \quad (14)$$

$$\frac{\partial g_{ku}}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\xi_t^{ku} (X) - \bar{\xi}_t^{ku} \right) = \frac{\partial \xi_t^{ku}}{\partial x_i}. \quad (15)$$

Для определения производной по собственному значению рассмотрим обобщенную задачу на собственные значения [13–15]:

$$[K] \{W_t\} = \xi_t [M] \{W_t\}, \quad \{W_t\} \neq 0, \quad (16)$$

где K — матрица жесткости системы; W_t — собственный вектор t -го тона; M — матрица масс системы.

Умножив слева левую и правую часть уравнения (16) на $\{W_t\}^T$, получим

$$\{W_t\}^T [K] \{W_t\} = \xi_t \{W_t\}^T [M] \{W_t\}. \quad (17)$$

Дифференцируя левую и правую части выражения (17) по проектным переменным, а также группируя слагаемые по производным, получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi_t}{\partial x_i} \{W_t\}^T [M] \{W_t\} &= \frac{\partial \{W_t\}^T}{\partial x_i} ([K] - \xi_t [M]) \{W_t\} + \{W_t\}^T \frac{\partial [K]}{\partial x_i} \{W_t\} + \\ &+ \{W_t\}^T ([K] - \xi_t [M]) \frac{\partial \{W_t\}}{\partial x_i} - \xi_t \{W_t\}^T \frac{\partial [M]}{\partial x_i} \{W_t\}. \end{aligned} \quad (18)$$

Проведем нормировку собственных векторов относительно матрицы масс таким образом, чтобы выполнялось следующее соотношение [16]:

$$\{\bar{W}_t\}^T [M] \{\bar{W}_t\} = E, \quad (19)$$

где \bar{W}_t — нормированный собственный вектор t -го тона относительно матрицы масс; E — единичная матрица.

Тогда, учитывая формулы (19) и (16), упростим выражение (18):

$$\frac{\partial \xi_t}{\partial x_i} = \{\bar{W}_t\}^T \frac{\partial [K]}{\partial x_i} \{\bar{W}_t\} - \xi_t \{\bar{W}_t\}^T \frac{\partial [M]}{\partial x_i} \{\bar{W}_t\}. \quad (20)$$

Матрица жесткости системы [17, 18] определяется как

$$[K] = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{s_i} \left([B_{ij}]^T [K_e^{ij}] [B_{ij}] \right), \quad (21)$$

где B_{ij} — булева матрица ij -го КЭ для включения его матрицы жесткости и матрицы масс в матрицу жесткости и матрицу масс системы; K_e^{ij} — матрица жесткости ij -го КЭ.

Матрица масс системы [17, 18] определяется так:

$$[M] = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{s_i} \left([B_{ij}]^T [M_e^{ij}] [B_{ij}] \right), \quad (22)$$

где M_e^{ij} — матрица масс ij -го КЭ.

Используя известные соотношения матрицы масс и матрицы жесткости для КЭ шестигранной формы с изотропным материалом [19]

и подставляя в них вместо плотности и модуля упругости зависимости (1), дифференцируем выражения (21), (22) и получаем

$$\frac{\partial [K]}{\partial x_i} = \frac{p}{x_i} \sum_{j=1}^{s_i} [B_{ij}]^T [K_e^{ij}] [B_{ij}]; \quad (23)$$

$$\frac{\partial [M]}{\partial x_i} = \frac{1}{x_i} \sum_{j=1}^{s_i} [B_{ij}]^T [M_e^{ij}] [B_{ij}]. \quad (24)$$

Тогда коэффициенты чувствительности для критерия оптимальности (12) определяются по следующим формулам:

$$\frac{\partial m}{\partial x_i} = \rho_{mat} \sum_{j=1}^{s_i} V_{ij}; \quad (25)$$

$$\frac{\partial g_{kl}}{\partial x_i} = \frac{1}{x_i} \xi_t \{\bar{W}_t\}^T \sum_{j=1}^{s_i} [B_{ij}]^T [M_e^{ij}] [B_{ij}] \{\bar{W}_t\} - \quad (26)$$

$$- \frac{p}{x_i} \{\bar{W}_t\}^T \sum_{j=1}^{s_i} [B_{ij}]^T [K_e^{ij}] [B_{ij}] \{\bar{W}_t\};$$

$$\frac{\partial g_{ku}}{\partial x_i} = \frac{p}{x_i} \{\bar{W}_t\}^T \sum_{j=1}^{s_i} [B_{ij}]^T [K_e^{ij}] [B_{ij}] \{\bar{W}_t\} - \quad (27)$$

$$- \frac{1}{x_i} \xi_t \{\bar{W}_t\}^T \sum_{j=1}^{s_i} [B_{ij}]^T [M_e^{ij}] [B_{ij}] \{\bar{W}_t\}.$$

Примечание. Полученные уравнения справедливы и для стандартной формулировки SIMP, однако в этом случае число КЭ в i -й группе КЭ s_i равно единице.

Тестовая задача. Для иллюстрации корректности полученных результатов рассмотрим тестовую задачу и определим места установки межпанельных кронштейнов с помощью стандартного и модифицированного методов SIMP, а также проведем сравнение полученных результатов. На рис. 2 представлена КЭМ тестовой задачи.

По условию задачи требуется определить места установки межпанельных кронштейнов для КА массой 320 кг таким образом, чтобы первая частота собственных колебаний была не ниже 30 Гц. Кронштейны должны быть расположены симметрично относительно плоскостей XOY и XOZ .

Результаты расчета для двух вариантов методики при использовании разных формулировок представлены на рис. 3. Как видно из рисунка, характер распределения плотности по проектной области для них практически один и тот же. Заметим, что в первом варианте

получаемые кронштейны имеют неоднородную плотность — это следствие использования трех проектных переменных на один кронштейн.

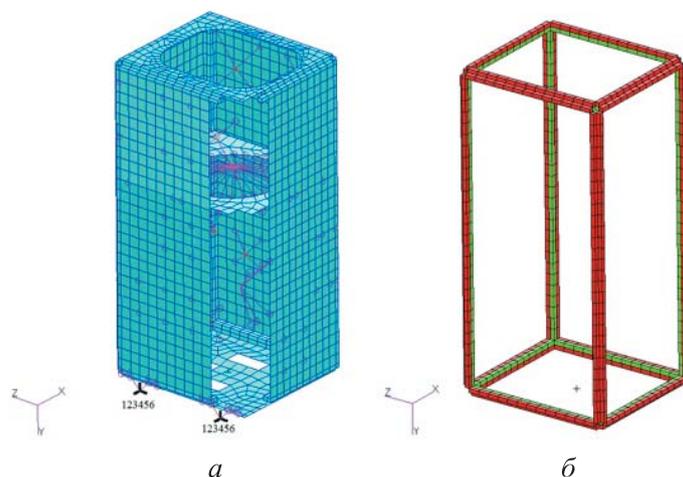


Рис. 2. Конечно-элементная модель тестовой задачи: *a* — космического аппарата (часть КЭМ не показана); *б* — проектной области

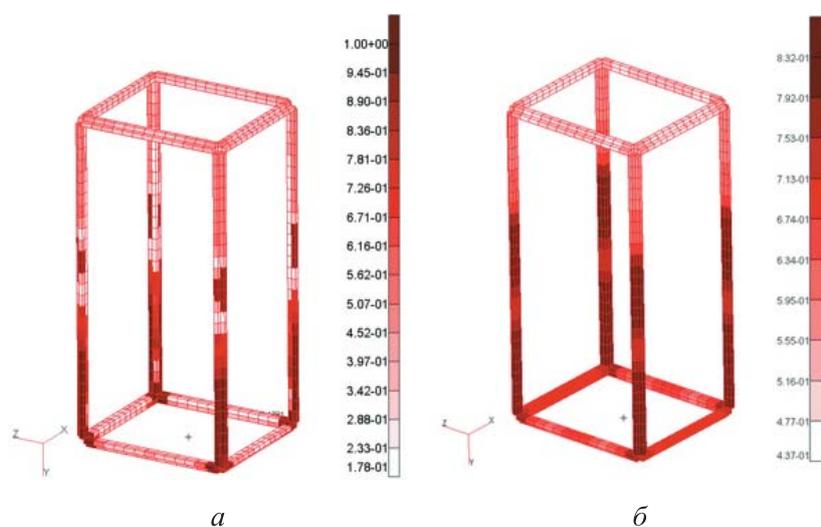


Рис. 3. Результаты расчета тестовой задачи с применением стандартной (*a*) и модифицированной (*б*) формулировок метода SIMP

Анализируя полученные результаты, определили места установки межпанельных кронштейнов (рис. 4).

Поверочный расчет показал, что первая частота собственных колебаний КА относительно жесткого основания составляет 31,7 Гц. Форма колебаний представлена на рис. 5.

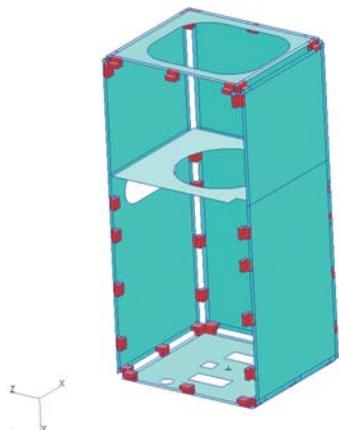


Рис. 4. Места установки межпанельных кронштейнов

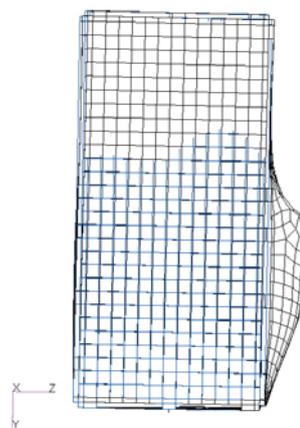


Рис. 5. Первый изгибный тон собственных колебаний КА

Заключение. Разработанная модификация метода SIMP топологической оптимизации позволяет значительно сократить число проектных переменных, используемых для определения мест установки межпанельных кронштейнов корпуса космического аппарата, что снижает время расчета и повышает эффективность ранее предложенной методики, представленной в работе [4]. Достоверность результатов подтверждена решением тестовой задачи.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Wijkер J.J. *Spacecraft Structures*. Springer Science & Business Media, 2008, 504 p.
- [2] *Soyuz CSG User's Manual*. Iss. 2.1. Washington, Arianspace, May 2018. URL: <https://www.arianespace.com/wp-content/uploads/2015/10/Soyuz-UsersManuel-issue2-Revision1-May18.pdf>
- [3] *Falcon User's Guide*. September 2021. URL: <https://www.spacex.com/media/falcon-users-guide-2021-09.pdf>
- [4] Боровиков А.А., Леонов А.Г., Тушев О.Н. Методика определения расположения межпанельных кронштейнов корпуса космического аппарата с использованием топологической оптимизации. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Машиностроение*, 2019, № 4, с. 4–19. DOI: 10.18698/0236-3941-2019-4-4-19
- [5] Bendsoe M.P., Sigmund O. *Topology optimization. Theory, methods, and application*. Berlin, New York, Springer, 2004, 370 p.
- [6] *MSC Nastran 2018*. Quick reference guide. URL: <https://simcompanion.hexagon.com/customers/s/article/msc-nastran-2018-quick-reference-guide-doc11515>
- [7] Аттетков А.В., Галкин С.В., Зарубин В.С. *Методы оптимизации*. В.С. Зарубин В.С., Крищенко А.П., ред. 2-е изд., Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2003, 440 с.
- [8] Бородакий Ю.В., Загребав А.М., Крицына Н.А., Кулябичев Ю.П., Шумилов Ю.Ю. *Нелинейное программирование в современных задачах оптимизации*. Москва, НИЯУ МИФИ, 2011, 244 с.

- [9] Хог Э., Арора Я. *Прикладное оптимальное проектирование: механические системы и конструкции*. Пер. с англ. под ред. Н.В. Баничука. Москва, Мир, 1983, 478 с.
- [10] Christensen P.W., Klarbring A. *An introduction to structural optimization*. Gladwell G.M.L., ed. Sweden, Springer, 2009, 211 p.
- [11] Базара М., Шетти К. *Нелинейное программирование. Теория и алгоритмы*. Пер. с англ. под ред. Д.Б. Юдина. Москва, Мир, 1982, 583 с.
- [12] Зангвилл У. *Нелинейное программирование. Единый подход*. Пер. с англ. под ред. Е.Г. Гольштейна. Москва, Советское радио, 1973, 312 с.
- [13] Голуб Дж., Ван Лоун Ч. *Матричные вычисления*. Пер. с англ. под ред. В.В. Воеводина. Москва, Мир, 1999, 548 с.
- [14] Бидерман В.Л. *Теория механических колебаний*. Москва, Высш. шк., 1980, 408 с.
- [15] Парлетт Б. *Симметричная проблема собственных значений. Численные методы*. Пер. с англ. Москва, Мир, 1983, 384 с.
- [16] *MSC Nastran 2018. Dynamic analysis user's guide*.
URL: <https://simcompanion.hexagon.com/customers/s/article/msc-nastran-2018-dynamic-analysis-user-s-guide-doc11514>
- [17] Зенкевич О. *Метод конечных элементов в технике*. Пер. с англ. под ред. Б.Е. Подбери. Москва, Мир, 1975, 541 с.
- [18] Галлагер Р. *Метод конечных элементов. Основы*. Пер. с англ. под ред. Н.В. Баничука. Москва, Мир, 1984, 428 с.
- [19] Liu G.R., Quek S.S. *The finite element method: a practical course*. Oxford, Boston, Butterworth-Heinemann, 2003, 348 p.

Статья поступила в редакцию 23.11.2023

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Боровиков А.А., Тушев О.Н. Методика определения расположения межпанельных кронштейнов корпуса космического аппарата с использованием модифицированного метода SIMP топологической оптимизации. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2024, вып. 1. <http://dx.doi.org/10.18698/2308-6033-2024-1-2331>

Боровиков Александр Александрович — ассистент кафедры «Аэрокосмические системы» МГТУ им. Н.Э. Баумана. e-mail: borovikov@bmstu.ru

Тушев Олег Николаевич — д-р техн. наук, профессор кафедры «Аэрокосмические системы» МГТУ им. Н.Э. Баумана. e-mail: kafsm2@bmstu.ru

Technique employing the modified SIMP topology optimization method to determine the panel-to-panel support bracket position in a spacecraft body

© A.A. Borovikov, O.N. Tushev

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, 105005, Russian Federation

One of the most important requirements to spacecraft design is that of ensuring dynamic compatibility between the spacecraft and the launch vehicle, which consists in limiting the first fundamental tones of the spacecraft's natural oscillations. Selecting the optimal number and installation positions of the panel-to-panel brackets connecting the spacecraft thermal honeycomb panels appears to be one of the approaches to solving the problem. "Manual" selection of the panel-to-panel brackets position is extremely ineffective and could be rather time consuming; therefore, the authors previously proposed a technique using the SIMP topology optimization method. Its essence lies in simulating the area of possible installation of the panel-to-panel brackets with the hexagonal finite elements and further topology optimization. However, using the SIMP method in standard formulation significantly increases the number of required design variables (at least three per one bracket), and, consequently, the computation time. This paper proposes modification to the SIMP method making it possible to use a minimum number of the design variables (one variable per one bracket). To illustrate efficiency of the developed apparatus, it uses a test problem as an example and compares the results obtained through the standard and modified versions of the SIMP method.

Keywords: SIMP method, topology optimization, design optimization, dynamic compatibility requirements

REFERENCES

- [1] Wijker J.J. *Spacecraft Structures*. Springer Science & Business Media, 2008, 504 p.
- [2] *Soyuz CSG User's Manual*. Issue 2.1. Arianspace, May 2018. Available at: <https://www.arianespace.com/wp-content/uploads/2015/10/Soyuz-UsersManual-issue2-Revision1-May18.pdf>
- [3] *Falcon User's Guide*. September 2021. Available at: <https://www.spacex.com/media/falcon-users-guide-2021-09.pdf>
- [4] Borovikov A.A., Leonov A.G., Tushev O.N. Metodika opredeleniya raspolozheniya mezhpanelnykh kronshteynov korpusa kosmicheskogo apparata s ispolzovaniem topologicheskoy optimizatsii [Technique employing topology optimization to determine panel-to-panel support bracket positions in a spacecraft body]. *Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Ser. Mashinostroenie — Herald of the Bauman Moscow State Technical University, Series Mechanical Engineering*, 2019, no. 4, pp. 4–19. <https://doi.org/10.18698/0236-3941-2019-4-4-19>
- [5] Bendsoe M.P., Sigmund O. *Topology optimization. Theory, methods, and application*. Springer, 2004, 370 p.
- [6] *MSC Nastran 2018. Quick reference guide*. Available at: <https://simcompanion.hexagon.com/customers/s/article/msc-nastran-2018-quick-reference-guide-doc11515>
- [7] Attetkov A.V., Galkin S.V., Zarubin V.S. *Metody optimizatsii* [Optimization methods]. 2nd ed., stereotip. Zarubin V.S., Krishchenko A.P., ed. Moscow, BMSTU Publ., 2003, 440 p.

- [8] Borodakiy Yu.V., Zagrebaev A.M., Kritsyna N.A., Kulyabichev Yu.P., Shumilov Yu.Yu. *Nelineynoe programmirovaniye v sovremennykh zadachakh optimizatsii* [Nonlinear programming in modern optimization problems]. Moscow, NIYaU MIFI Publ., 2011, 244 p.
- [9] Haug E., Arora J. *Applied optimal design: Mechanical and structural systems*. Wiley, 1979 [In Russ.: Khog E., Arora Ya. Prikladnoye optimalnoye proektirovaniye: Mekhanicheskie sistemy i konstruktzii. Moscow, Mir Publ., 1983, 478 p.].
- [10] Christensen P.W., Klarbring A. *An introduction to structural optimization*. Gladwell G.M.L. ed. Sweden, Springer, 2009, 211 p.
- [11] Bazaraa M., Shetti C. *Nonlinear Programming: Theory and Algorithms*. John Wiley & Sons Inc., 1979 [In Russ.: Bazara M., Shetti K. Nelineynoe programmirovaniye. Teoriya i algoritmy. Moscow, Mir Publ., 1982, 583 p.].
- [12] Zangwill W. *Nonlinear Programming: A Unified Approach*. Prentice-Hall, 1969 [In Russ.: Zangvill U. Nelineynoe programmirovaniye. Edinyi podkhod. Moscow, Sovetskoe Radio Publ., 1973, 312 p.].
- [13] Golub J., Van Loan Ch. *Matrix Computations*. Johns Hopkins University Press, 1996 [in Russ.: Golub Dzh., Van Loun Ch. Matrichnye vychisleniya. Moscow, Mir Publ., 1999, 548 p.].
- [14] Biderman V.L. *Teoriya mekhanicheskikh kolebaniya* [Theory of mechanical oscillations]. Moscow, Vysshaya Shkola Publ., 1980, 408 p.
- [15] Parlett B. *The symmetric eigenvalue problem*. Englewood Cliffs, NJ, Prentice-Hall, 1980 [in Russ.: Parlett B. Simmetrichnaya problema sobstvennykh znacheniy. Chislennyye metody. Moscow, Mir Publ., 1983, 384 p.].
- [16] *MSC Nastran 2018. Dynamic analysis user's guide*. Available at: <https://simcompanion.hexagon.com/customers/s/article/msc-nastran-2018-dynamic-analysis-user-s-guide-doc11514>
- [17] Zienkiewicz O. *The Finite Element Method in Engineering Science*. McGraw-Hill, 1971 [In Russ.: Zenkevich O. Metod konechnykh elementov v tekhnike. Moscow, Mir Publ., 1975, 541 p.].
- [18] Gallagher R. *Finite Element Analysis: Fundamentals*. Pearson College Div., 1975 [In Russ.: Gallager R. Metod konechnykh elementov. Osnovy. Moscow, Mir Publ., 1984, 428 p.].
- [19] Liu G.R., Quek S.S. *The finite element method: a practical course*. Butterworth-Heinemann, 2003, 348 p.

Borovikov A.A., Assistant, Department of Aerospace Systems, Bauman Moscow State Technical University. e-mail: borovikov@bmstu.ru

Tushev O.N., Dr. Sc. (Eng.), Professor, Department of Aerospace Systems, Bauman Moscow State Technical University. e-mail: kafsm2@bmstu.ru