

Влияние поперечных сдвигов на контактные усилия и нагрузочную характеристику радиального роликового подшипника качения

© А.А. Кирюхин, Ф.Д. Сорокин, В.В. Попов

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Российская Федерация

Рассмотрена задача обжатия радиального роликового подшипника на жесткое основание. Контакт роликов с кольцами подшипника учитывается традиционным образом по известной формуле Пальмгрена. Широкий контакт нагружающей штанги и внутреннего кольца исследован по теории И.Я. Штаермана. Для внешнего кольца принята расчетная схема криволинейного стержня. Удовлетворительного совпадения результатов расчета и эксперимента удается добиться только при учете поперечных сдвигов в уравнениях деформации внешнего кольца. Для определения количества роликов, контактирующих с кольцами, предварительно проведено моделирование методом конечных элементов. Показано, что нагрузочная характеристика, рассчитанная по разработанному алгоритму, мало отличается от нагрузочной характеристики, полученной в эксперименте. Разработанный алгоритм обладает высоким быстродействием при достаточной точности, поэтому его можно рекомендовать к использованию в задачах роторной динамики.

Ключевые слова: подшипник, упругая характеристика, криволинейный стержень, сдвиговая деформация, широкий контакт

Введение. Подшипниковые узлы являются важнейшими элементами современных машин и приборов [1–4]. При решении задач роторной динамики вращающихся машин большое значение имеет знание упругих характеристик подшипниковых узлов. Методы расчета указанных характеристик, основанные на разбиении всех элементов подшипника (колец, роликов, сепаратора) на объемные конечные элементы, практически неприменимы в задачах роторной динамики из-за низкого быстродействия, но могут использоваться для контроля.

Традиционно для расчета статической нагруженности и упругих свойств роликовых подшипников пользуются решением задачи теории упругости о контакте цилиндров с параллельными осями [5, 6]. Изгибные деформации колец при этом, как правило, не рассматриваются.

Цель данного исследования — построение алгоритма расчета упругой характеристики подшипника, обжатого на жесткое основание, учитывающего изгибные деформации колец и обладающего высоким быстродействием при достаточной точности.

Предметом исследования являлся радиальный роликовый подшипник качения 12309KM (рис. 1), изготовленный из стали ШХ15, со следующими параметрами:

Внутренний диаметр d , мм	45
Наружный диаметр D , мм	100
Ширина B , мм	25
Длина ролика L , мм	14
Диаметр ролика H , мм	14
Средний диаметр D_0 , мм	73
Диаметр борта наружного кольца D_1 , мм	81,4
Диаметр борта внутреннего кольца d_1 , мм	64
Количество роликов n	12
Модуль упругости первого рода E , МПа	$2 \cdot 10^5$
Коэффициент Пуассона μ	0,3

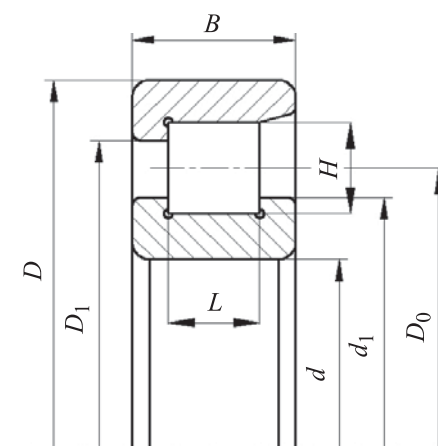


Рис. 1. Подшипник 12309KM

При расчете упругой характеристики учитывались следующие механические факторы:

- изгиб внешнего кольца подшипника с учетом сдвиговых деформаций [7–9], рассчитываемый методами механики стержней;
- контактные взаимодействия между роликами и кольцами подшипника, рассчитываемые по формуле Пальмгрена (Palmgren) [10, 11];
- контактное взаимодействие между внешним кольцом подшипника и нагружающей плитой, рассчитываемое по формуле Пальмгрена;
- контактное взаимодействие между внутренним кольцом подшипника и штангой, рассчитываемое по теории И.Я. Штаермана [12–14].

Эксперимент. Нагрузочная характеристика роликового подшипника 12309KM при действии радиальной нагрузки была определена в натурном эксперименте на универсальной испытательной машине Quasar 50 (рис. 2) [11, 15, 16].

Подшипник нагружался жесткой плитой испытательной машины, действующей на наружное кольцо. Внутреннее кольцо фиксировалось

на жесткой штанге. Штангой являлся стальной цилиндр, плотно входящий во внутреннее кольцо подшипника. Штанга опиралась на стальную вилку. Плотный контакт штанги и внутреннего кольца обеспечивал отсутствие его изгиба. Ролики располагались симметрично — по шесть роликов с каждой стороны. Измерялись перемещения нагружающей плиты.

Полученные данные аппроксимировались степенными зависимостями методом наименьших квадратов (рис. 3) [16].

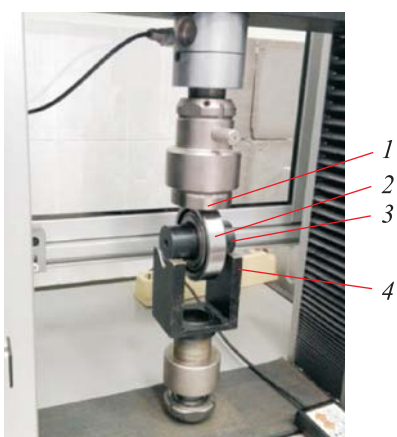


Рис. 2. Постановка эксперимента по определению нагрузочной характеристики роликового подшипника [16]:
1 — нагружающая плита; 2 — радиальный роликовый подшипник качения; 3 — штанга; 4 — стальная вилка

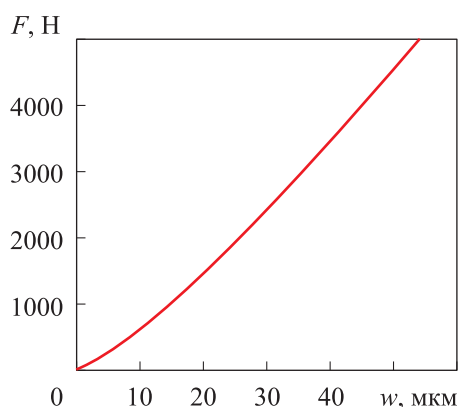


Рис. 3. Экспериментальная упругая характеристика [16]:

F — нагрузка, Н; w — перемещение нагружающей плиты испытательной машины, мкм

Для наблюдения за изгибом наружного кольца применялся метод тензометрии, при этом тензорезистор был размещен в области, прилегающей к месту приложения нагрузки (рис. 4). Тензометрия показала, что наружное кольцо существенно деформируется.

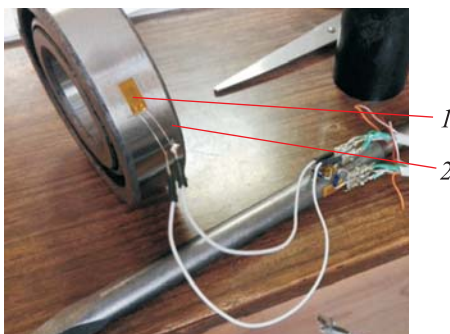


Рис. 4. Тензорезистор (1) на наружном кольце подшипника (2) [16]

Оценка количества роликов, контактирующих с кольцами.

Для построения методики полуаналитического расчета упругой характеристики подшипника необходимо знание количества роликов, вступивших в контакт. Вполне достаточно сделать предположение о том, какое количество роликов находится в контакте, и проверить его после завершения расчета. Так как ролики располагаются симметрично относительно плоскости симметрии, то в контакт могут вступить два, четыре или шесть роликов. Каждый из этих случаев требуется рассмотреть отдельно. Очевидно, что на практике реализуется только один из трех возможных случаев.

Для сокращения объема вычислений и выявления количества роликов, вступивших в контакт, была сформирована конечно-элементная модель подшипника (рис. 5) в среде ANSYS Workbench 2021 R1 [17]. Модель представляет собой ансамбль двумерных конечных элементов PLANE, имитирующих кольца подшипника, ролики, сепаратор, штангу и нагружающую плиту. Для имитации абсолютно жестких тел задавался модуль упругости сепаратора, штанги и нагружающей плиты, увеличенный в 10 000 раз. Поверхность штанги была жестко закреплена. Для имитации внешней сжимающей силы к нагружающей плите прикладывалась распределенная нагрузка. С учетом симметрии рассматривалась только половина конструкции. Задача решалась в двумерной постановке (плоское напряженное состояние). Расчет показал, что в контакт вступают две пары роликов, но основная часть нагрузки (более 90 %) приходится на верхнюю пару роликов. Поэтому было принято решение в полуаналитическом расчете учитывать только верхнюю пару роликов.

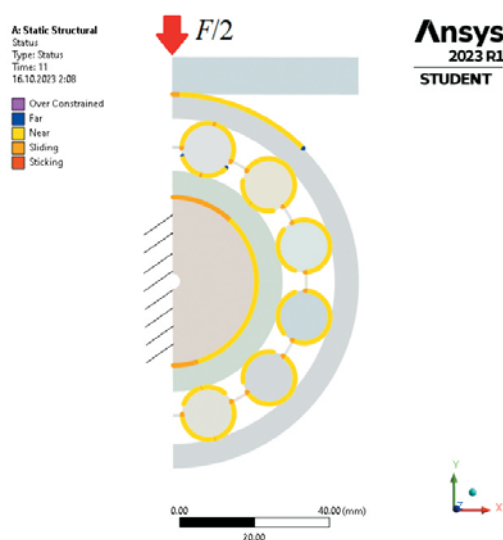


Рис. 5. Конечно-элементная модель экспериментальной установки

Полуаналитический расчет упругой характеристики подшипника. Для определения упругой характеристики подшипника использовалась схема, изображенная на рис. 6. Для удобства задача решалась в обращенной постановке, т. е. плита была жестко закреплена, а нагрузка прикладывалась к штанге. С учетом данных о поведении КЭ-модели подшипника было принято, что в контакт вступают только два симметрично расположенных ролика. Наружное кольцо подшипника может изгибаться. Изгиб внутреннего кольца исключен, так как оно плотно прилегает к жесткой штанге.

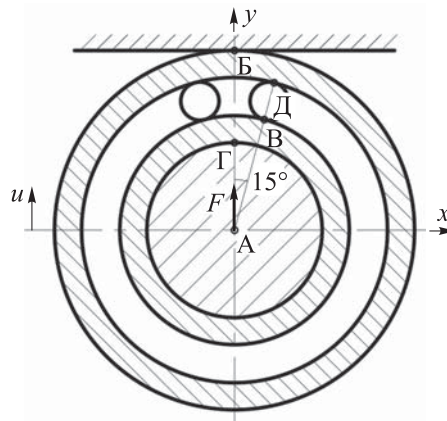


Рис. 6. Расчетная схема для определения упругой характеристики подшипника

В конструкции, показанной на рис. 6, присутствуют несколько зон контактного взаимодействия: в окрестностях точек В, Б и Д реализуется узкий контакт, в окрестности точки Г — широкий. При узком контакте размер зоны контакта мал по сравнению с габаритами контактирующих деталей, при широком — размер зоны контакта сопоставим с габаритами деталей.

Сближение тел при узком контакте определяется формулой Пальмгрена [10, 11], полученной при экспериментальном исследовании обжатия роликов:

$$\delta_B = \delta_D = 3,81 \left(\frac{1-\mu_1^2}{\pi E_1} + \frac{1-\mu_2^2}{\pi E_2} \right) \frac{P^{0,9}}{l^{0,8}}; \quad (1)$$

$$P = \frac{F}{2 \cos \varphi_P},$$

где δ_B, δ_D — сближение ролика и колец в точках В и Д, мм; $\mu_{1,2}$ — коэффициенты Пуассона; индексы 1 и 2 обозначают контактирующие тела (1 — ролик, 2 — кольцо); $E_{1,2}$ — модули упругости первого рода, МПа; P — нагрузка на ролик, Н; l — длина ролика, мм; φ_P — угловая координата точки приложения силы ($\varphi_P = 15^\circ$, см. рис. 6).

Для рассмотрения контакта в точке Б достаточно учесть, что материал деталей один и тот же ($E_1 = E_2 = E$, $\mu_1 = \mu_2 = \mu$) и заменить в выражении (1) длину ролика на ширину кольца:

$$\delta_B = 7,62 \frac{(1-\mu^2)F^{0,9}}{\pi EB^{0,8}}, \quad (2)$$

где δ_B — сближение наружного кольца и жесткой плиты, мм; F — нагрузка на штангу (см. рис. 6), Н; B — ширина колец подшипника, мм.

Сближение деталей в зоне контакта внутреннего кольца и штанги (точка Г) вычислялось с помощью теории широкого контакта Штармана [14]. При этом границы пятна контакта (рис. 7) задавались в соответствии с алгоритмом, изложенным в [12, 13]:

$$u_{Sht} = \frac{2U(1-\mu^2)(r_1+r_2)}{\pi E} + \frac{V(1-2\mu)(1+\mu)(r_1-r_2)}{2E};$$

$$U = 2 \int_0^{\varphi_0} p(\varphi) \ln \left[\operatorname{tg} \left(\frac{\varphi}{2} \right) \right] \cos \varphi d\varphi; \quad (3)$$

$$V = 2 \int_0^{\varphi_0} p(\varphi) \sin \varphi d\varphi + \frac{4(1-\mu^2)r_1}{\pi E} \int_0^{\varphi_0} p(\varphi) d\varphi,$$

где u_{Sht} — сближение контактирующих тел; μ — коэффициент Пуассона; r_1 — радиус штанги (рис. 7); r_2 — радиус внутреннего кольца, $r_2 = d_1/2$; E — модуль упругости первого рода; φ_0 — угловая граница пятна контакта; φ — угловая координата.

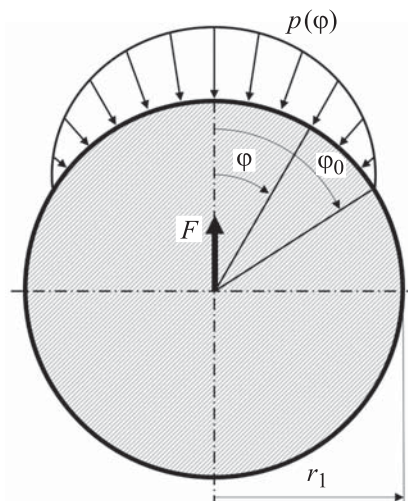


Рис. 7. Контактное давление, действующее на штангу со стороны внутреннего кольца подшипника

Для упрощения расчетов была использована приближенная формула распределения контактного давления, приведенная в [12]:

$$p(\varphi) = a_1 \cos\left(\frac{\pi\varphi}{2\varphi_0}\right) + a_3 \cos\left(\frac{3\pi\varphi}{2\varphi_0}\right), \quad (4)$$

где a_1, a_3 — эмпирические коэффициенты.

Для определения податливости наружного кольца в местах контакта с роликами рассматривалась задача о нагружении половины кольца сосредоточенной силой P (рис. 8). Использовалась система дифференциальных уравнений механики криволинейных стержней [18], дополненная следующими формулами учета поперечных сдвигов:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dN}{ds} + \frac{Q}{R} + q_1 = 0; \\ \frac{dQ}{ds} - \frac{N}{R} + q_n = 0; \\ \frac{dM}{ds} = Q; \\ \frac{dv}{ds} + \frac{w}{R} = 0; \\ \frac{dw}{ds} - \frac{v}{R} + \vartheta = \frac{kQ}{GA}; \\ \frac{d\vartheta}{ds} = \frac{M}{EJ}, \end{array} \right. \quad (5)$$

где N, Q, M — силовые факторы; s — дуговая координата; R — средний радиус кольца; q_1, q_n — внешние распределенные нагрузки; v, w — перемещения (см. рис. 8); ϑ — поворот; k — коэффициент учета неравномерности распределения касательных напряжений, $k = 6/5$; G — модуль упругости второго рода; A — площадь сечения; E — модуль упругости первого рода; J — момент инерции сечения [8].

Для системы (5) была решена краевая задача с граничными условиями, показанными на рис. 8. Распределенные нагрузки в системе (5) были заданы следующим образом:

$$q_1 = 0; \quad q_n = P \frac{a}{\pi \left(1 + a^2 (s - R\varphi_p)^2\right)}, \quad (6)$$

где a — большое число с размерностью m^{-1} .

В формуле (6) множителем при силе P является непрерывный аналог дельта-функции Дирака, предложенный в [18].

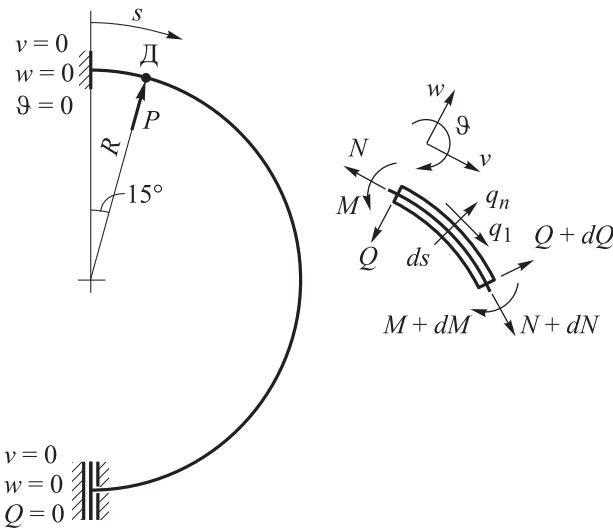


Рис. 8. Схема нагружения для определения податливости наружного кольца подшипника

Численное решение линейной краевой задачи для системы дифференциальных уравнений (5) было получено с помощью процедуры NDSolve из компьютерного пакета Wolfram Mathematica. В результате были определены функции $N(s)$, $Q(s)$, $M(s)$, $v(s)$, $w(s)$, $\vartheta(s)$. По найденному перемещению w_D определялась податливость кольца в точке приложения силы:

$$\delta_{11} = \frac{w_D}{P},$$

где w_D — поперечное перемещение точки Д.

Для контроля полученного значения вычислялся интеграл Мора

$$\delta_{11}^M = \int_0^{\pi R} \left(\frac{M_1 M_1}{EJ} + \frac{k Q_1 Q_1}{GA} \right) ds,$$

где M_1 , Q_1 — функции силовых факторов от единичной силы, приложенной в точке Д.

В итоге получили следующие значения податливости:

$$\delta_{11} = 5,14769 \cdot 10^{-9} \text{ м/Н};$$

$$\delta_{11}^M = 5,14791 \cdot 10^{-9} \text{ м/Н}.$$

Два способа вычисления податливости приводят практически к одинаковым результатам, расхождение не превышает 0,005 %. Поскольку податливым является не только кольцо, но и ролик, для вычисления результирующего перемещения в точке В необходимо учитывать еще и поджатие ролика с двух сторон:

$$w_B = \delta_B + \delta_D + \delta_{11} P.$$

Перемещение точки А является комбинацией трех составляющих:

$$u_A = \frac{w_B}{\cos \varphi_P} + \delta_B + u_{Sh},$$

где u_A — вертикальное перемещение штанги.

Итоговая упругая характеристика подшипника при обжатии на жесткое основание представлена на рис. 9, где также показан вклад отдельных составляющих результирующего перемещения. Из рисунка следует, что наибольший вклад вносят перемещения, вызванные изгибом кольца с учетом сдвиговых деформаций, и перемещения, вызванные обжатием ролика.

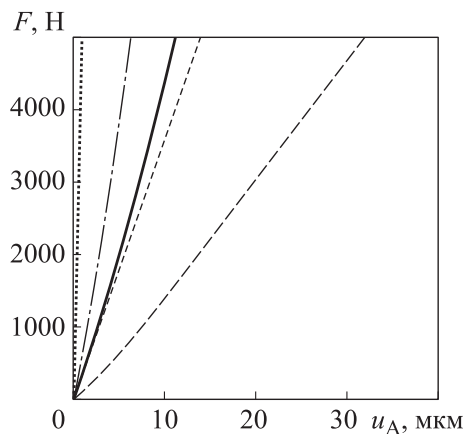


Рис. 9. Упругая характеристика подшипника и ее составляющие:

— обжатие ролика; -·-·-· — изгиб с учетом сдвигов; ····· — контакт внутреннего кольца со штангой; - - - - — контакт внешнего кольца с плитой; - - - - — суммарные перемещения

Упругая характеристика, показанная на рис. 10, заметно отличается от экспериментальной (см. рис. 3). Например, при нагрузке $F = 5000$ Н в эксперименте получается 54 мкм, а в расчете — 32 мкм. Гипотетически отмеченное различие связано с деформациями в местах контакта штанги и вилки (см. рис. 2). Для проверки этого предположения дополнительно был учтен контакт между штангой и вилкой. Штанга, на которой закреплен подшипник (см. рис. 2), контактирует с вилкой под углом 45° к вертикальной оси. Полное перемещение w нагружающей плиты испытательной машины будет складываться из найденного выше перемещения u_A и дополнительного перемещения, возникающего за счет деформаций в контакте между штангой и вилкой.

$$w = u_A + \frac{\delta_{\text{ш}}}{\cos \psi};$$

$$\delta_{\text{ш}} = 7,62 \frac{1 - \mu^2}{\pi E} \frac{F_{\text{ш}}^{0,9}}{H_{\text{ш}}^{0,8}}; \quad (7)$$

$$F_{\text{ш}} = \frac{F}{4 \cos \psi},$$

где w — полное перемещение верхней плиты; $\delta_{\text{ш}}$ — сближение вилки и штанги по нормали к контактной поверхности, мм; ψ — наклон контактной поверхности, $\psi = 45^\circ$; $F_{\text{ш}}$ — контактная сила, Н; $H_{\text{ш}}$ — ширина площадки контакта вилки и штанги, $H_{\text{ш}} = 10$ мм.

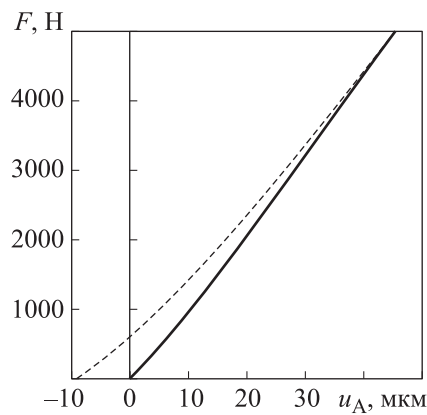


Рис. 10. Расчетная и экспериментальная упругие характеристики:
 — суммарные перемещения; - - - - экспериментальные данные

В результате получилась упругая характеристика, которая при некотором смещении экспериментальной кривой вдоль оси перемещений гораздо лучше соответствует экспериментальным данным (см. рис. 10).

Различия между экспериментальной и расчетной упругими характеристиками (см. рис. 10) можно объяснить тем, что при проведении испытания между деталями испытательной машины идет выбор зазоров и выдавливание масла. Возможно также влияние трения, которое при расчете не учитывалось. Наклоны кривых на рис. 10, по которым и определяется жесткость для дальнейшего использования в задачах роторной динамики, достаточно близки друг к другу.

Заключение. В работе показано, что при расчете подшипника, обжимаемого на плоскость, обязательно должны учитываться сдвиговые деформации наружного кольца. Полученные на основе сочетания решений уравнений механики стержней и нескольких контактных

задач результаты хорошо подтверждаются экспериментом. Это позволяет рекомендовать разработанный метод, при котором учитываются поперечные сдвиги колец, для оценки радиальной податливости слабо закрепленных подшипников.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Лустенков М.Е., Лустенкова Е.С. *Расчет и проектирование сферических роликовых передач*: монография. Могилев, Белорус.-Рос. ун-т, 2017, 177 с. URL: <http://e.biblio.bru.by/handle/12121212/4901> (дата обращения: 15.11.2023).
- [2] Орлов М.Р., Григоренко В.Б., Морозова Л.В., Наприенко С.А. Исследование эксплуатационных разрушений подшипников методами оптической, растровой электронной микроскопии и рентгеноспектрального микроанализа. *Труды ВИАМ*, 2016, № 1 (37). dx.doi.org/ 10.18577/2307-6046-2016-0-1-62-79
- [3] Лустенкова Е.С. *Расчет и проектирование сферических роликовых передач для малогабаритных приводов: автореф. дис. ... канд. техн. наук: 05.02.02*. Минск, Белорус. нац. техн. ун-т, 2023. URL: <https://rep.bntu.by/handle/data/127391> (дата обращения: 15.11.2023).
- [4] Нахатакян Ф.Г. Влияние зазора в роликовых подшипниках на силовой контакт между его элементами. *Труды МАИ*, 2020, № 115. DOI: 10.34759/trd-2020-115-04
- [5] Герц Г. О контакте упругих твердых тел. *Журнал по чистой и прикладной математике*, 1882, т. 92, с. 156–171.
- [6] Герц Г. О контакте жестких упругих тел и о твердости. В кн.: *Разные статьи*. Лондон (Великобритания), Macmillan and Co., Ltd., 1896, с. 163–183. (на англ. яз.)
- [7] Биргер И.А., Мавлютов Р.Р. *Сопротивление материалов*. Москва, Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986, 560 с.
- [8] Феодосьев В.И. *Сопротивление материалов*. 13-е изд., перераб. и доп. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2004, 592 с.
- [9] Саркисян С.О., Хачатрян М.В. Математическая модель плоского кривого (кругового) упругого стержня по классической теории упругости с учетом поперечных сдвиговых деформаций. *Доклады НАН РА*, 2016, т. 116, № 1, с. 34–42.
- [10] Пальмгрен А. *Шариковые и роликовые подшипники*. Москва, Машгиз, 1949, 124 с.
- [11] Чжан Х. *Разработка рациональной методики расчета роликовых подшипников для применения в задачах роторной динамики: дис. ... канд. техн. наук: 01.02.06*. Москва, МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2019, 162 с.
- [12] Александров В.М., Ромалис Б.Л. *Контактные задачи в машиностроении*. Москва, Машиностроение, 1986, 176 с.
- [13] Солодов Н.В. Прочность и деформативность при смятии в болтовом соединении. *Вестник БГТУ им. В.Г. Шухова*, 2017, № 1, с. 82–87. DOI: 10.12737/23889
- [14] Штаерман И.Я. *Контактная задача теории упругости*. Москва, Гостехтеориздат, 1949, 272 с.
- [15] Сорокин Ф.Д., Чжан Х., Попов В.В., Иванников В.В. Экспериментальная верификация энергетической модели роликового подшипника для моделирования опорных узлов авиационных двигателей. Ч. 1. Нагружение под-

- шипника радиальной силой и поперечным моментом на специальном стенде, предотвращающем изгиб колец. *Труды МАИ*, 2018, № 103.
URL: https://trudymai.ru/upload/iblock/804/Sorokin_CHzhan_Popov_Ivannikov_rus.pdf?lang=ru&issue=103 (дата обращения: 15.11.2023).
- [16] Сорокин Ф.Д., Чжан Х., Попов В.В., Иванников В.В. Экспериментальная верификация энергетической модели роликового подшипника для моделирования опорных узлов авиационных двигателей. Ч. 2. Исследование влияния изгиба колец на нагрузочную характеристику в случае не закрепленного в обойме подшипника. *Труды МАИ*, 2019, № 104.
URL: https://trudymai.ru/upload/iblock/b8f/Sorokin_CHzhan_Popov_Ivannikov_rus.pdf?lang=ru&issue=104 (дата обращения: 15.11.2023).
- [17] Басов К.А. *ANSYS в примерах и задачах*. Д.Г. Красковский, ред. Москва, КомпьютерПресс, 2002, 224 с.
- [18] Светлицкий В.А. *Механика стержней. В 2 ч. Ч. 1: Статика*. Москва, Высш. шк., 1987, 320 с.

Статья поступила в редакцию 15.12.2023

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Кирюхин А.А., Сорокин Ф.Д., Попов В.В. Влияние поперечных сдвигов на контактные усилия и нагрузочную характеристику радиального роликового подшипника качения. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2024, вып. 1.
<http://dx.doi.org/10.18698/2308-6033-2024-1-2327>

Кирюхин Артем Александрович — магистрант кафедры «Прикладная механика», МГТУ им. Н.Э. Баумана. e-mail: arkiryukhin1999@gmail.com

Сорокин Федор Дмитриевич — д-р техн. наук, профессор кафедры «Прикладная механика», МГТУ им. Н.Э. Баумана. e-mail: sorokinfd@bmstu.ru

Попов Валерий Васильевич — старший преподаватель кафедры «Прикладная механика», МГТУ им. Н.Э. Баумана. e-mail: vvpopov@bmstu.ru

Transverse shifting influence on contact forces and load characteristics of the radial roller bearing

© A.A. Kiryukhin, F.D. Sorokin, V.V. Popov

Bauman Moscow State Technical University,
Moscow, 105005, Russian Federation

The paper considers a problem of compressing a radial roller bearing onto the rigid base. The contact between the rollers and the bearing rings is accounted for in the traditional way using the well-known Palmgren formula. The loading rod and the inner ring wide contact is studied according to the I.Ya. Shtaerman theory. The curved rod design diagram is adopted for the outer ring. Satisfactory agreement between the calculation and experiment results could be achieved only when considering transverse shears in the outer ring deformation equations. To determine the number of rollers in contact with the rings, the finite element simulation is first carried out. The paper shows that the load characteristic was calculated using the developed algorithm and differed insignificantly from those obtained in the experiment. The developed algorithm provides high performance with sufficient accuracy; therefore, it is recommended for use in solving the rotor dynamics problems.

Keywords: bearing, elastic characteristic, curved rod, shear deformation, wide contact

REFERENCES

- [1] Lustenkov M.E., Lustenkova E.S. *Raschet i modelirovanie sfericheskikh rolikovykh peredach*: monografiya [Calculation and design of spherical roller gears: monograph]. Mogilev, Belorussko-Rossiyskiy Universitet Publ., 2017, 177 p. Available at: <http://e.biblio.bru.by/handle/1212121212/4901> (accessed November 15, 2023).
- [2] Orlov M.R., Grigorenko V.B., Morozova L.V., Naprienko S.A. Issledovanie ekspluatatsionnykh razrusheniy podshipnikov metodami opticheskoy, rastrovoy elertronnoy mikroskopii i rentgenospektralnogo mikroanaliza [Research of operational damages of bearings by methods of optical microscopy, scanning electron microscopy and X-ray microanalysis]. *Trudy VIAM (Proceedings of VIAM)*, 2016, no. (37). [dx.doi.org/ 10.18577/2307-6046-2016-0-1-62-79](https://doi.org/10.18577/2307-6046-2016-0-1-62-79)
- [3] Lustenkova E. S. *Raschet i proektirovanie sfericheskikh rolikovykh peredach dlya malogabaritnykh privodov: Avtoref. dis. ... kand. tekhn. nauk: 05.02.02* [Calculation and design of spherical roller gears for small drives: abstract, dissertation ... Cand. Sc. (Eng.): 05.02.02]. Minsk, Belorusskiy Natsionalnyi Tekhnicheskii Universitet Publ., 2023. Available at: <https://rep.bntu.by/handle/data/127391> (accessed November 15, 2023).
- [4] Nakhatakyan F.G. Vliyanie zazora v rolikovykh podshipnikakh na silovoy kontakt mezhdru ego elementami [The impact of clearance in roller bearings on the power contact between its elements]. *Trudy MAI*, 2020, no. 115. DOI: 10.34759/trd-2020-115-04
- [5] Hertz H. On the contact of elastic solids. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 1882, Bd. 92, S. 156–171 [In Russ.: Gerts G. O kontakte uprugikh tverdykh tel].
- [6] Hertz H. On the contact of rigid elastic solids and on hardness [O kontakte zhestkikh uprugikh tel i o tverdosti]. In: *Raznye statyi — Miscellaneous Papers*, London (UK), Macmillan and Co. Ltd., 1896, pp. 163–183.

-
- [7] Birger I.A., Mavlyutov R.R. *Soprotivlenie materialov* [Resistance of materials]. Moscow, Nauka. Gl. Red. Fiz.-Mat. Lit. Publ., 1986, 560 p.
- [8] Feodosyev V.I. *Soprotivlenie materialov* [Resistance of materials]. 13th ed., rev. & enl. Moscow, BMSTU Publ., 2004, 592 p.
- [9] Sarkisyan S.O., Khachatryan M.V. Matematicheskaya model ploskogo krivogo (krugovogo) uprugovo sterzhnya po klassicheskoy teorii uprugosti s uchetom poperechnykh sdvigovykh deformatsii [Mathematical model of elastic plane curve beam (circular) with consideration of shear deformations on the basis of the classical theory of elasticity]. *Doklady NAN RA — National Academy of Sciences of Armenia Reports*, 2016, vol. 116, no. 1, pp. 34–42.
- [10] Palmgren A. *Ball and roller bearing engineering*. Philadelphia. SKF Industries Inc., 1959, 50 p.
- [11] Zhang H. *Razrabotka ratsionalnoy metodiki rascheta rolikovykh podshipnikov dlya primeneniya v zadachyakh rolikovoy dinamiki: dis. ... kand. tekhn. nauk: 01.02.06* [Development of a rational method for calculating roller bearings for use in problems of the rotary dynamics: diss. ... Cand. Sc. (Eng.), 01.02.06]. Moscow. BMSTU, 2019, 162 p.
- [12] Aleksandrov V.M., Romalis B.L. *Kontaknyye zadachi v mashinostroenii* [Contact problems in mechanical engineering]. Moscow, Mashinostroyeniye Publ., 1986, 176 p.
- [13] Solodov N.V. Prochnost i deformativnost pri smyatii v boltovom soedinenii [Strength and deformability in crumpled into the bolted connection]. *Vestnik BGTU im. V.G. Shukhova — Bulletin of BSTU named after V.G. Shukhov*, 2017, no. 1, pp. 82–87. DOI: 10.12737/23889
- [14] Shtaerman I.Ya. *Kontaktynaya zadacha teorii uprugosti* [Contact problem of elasticity theory]. Moscow, Gostekhteorizdat Publ., 1949, 272 p.
- [15] Sorokin F.D., Zhang H., Popov V.V., Ivannikov V.V. Eksperimentalnaya verifikatsiya energeticheskoy modeli rolikovogo podshipnika dlya modelirovaniya opornykh uzlov aviatsionnykh dvigateley. Chast 1. Nagruzhenie podshipnika radialnoy siloy i poperechnym momentom na spetsialnom stende, predotvrashchayushchim izgib kolets [Roller-bearing energy model experimental verification for aircraft engines supporting nodes modeling. Part 1. Roller-bearing loading by radial force and lateral moment on the special test bench, preventing the rings bending]. *Trudy MAI*, 2018, no. 103. Available at: https://trudymai.ru/upload/iblock/804/Sorokin_CHzhan_Popov_Ivannikov_rus.pdf?lang=ru&issue=103 (accessed November 15, 2023)
- [16] Sorokin F.D., Zhang H., Popov V.V., Ivannikov V.V. Eksperimentalnaya verifikatsiya energeticheskoy modeli rolikovogo podshipnika dlya modelirovaniya opornykh uzlov aviatsionnykh dvigateley. Chast 2. Issledovanie vliyaniya izgiba kolets na nagruzochnuyu kharakteristiku v sluchae ne zakreplennogo v oboyme podshipnika [Experimental verification of the roller bearing energy model for aircraft engines supporting nodes modelling. Part 2. Studying the rings bending impact on the full-load characteristic in the case of a bearing unfixed in the bearing race]. *Trudy MAI*, 2019, no. 104. Available at: https://trudymai.ru/upload/iblock/b8f/Sorokin_CHzhan_Popov_Ivannikov_rus.pdf?lang=ru&issue=104 (accessed November 15, 2023)
- [17] Basov K.A. *ANSYS v primerakh i zadachyakh* [ANSYS in examples and tasks], Kraskovsky D.G., ed. Moscow, KompyuterPress Publ., 2002, 224 p.
- [18] Svetlitskiy V.A. *Mekhanika sterzhney. V 2 ch. Chast 1. Statika* [Mechanics of rods. In 2 parts. Part 1. Statics]. Moscow, Vysshaya. Shkola Publ., 1987, 320 p.

Kiryukhin A.A., Master's Program Student, Department of Applied Mechanics, Bauman Moscow State Technical University. e-mail: arkiryukhin1999@gmail.com

Sorokin F.D., Dr. Sc. (Eng.), Professor, Department of Applied Mechanics, Bauman Moscow State Technical University. e-mail: sorokinfd@bmstu.ru

Popov V.V., Senior Lecturer, Department of Applied Mechanics, Bauman Moscow State Technical University. e-mail: vvpopov@bmstu.ru